Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

Г.П. ДОНЕЦЬ, В.І. БІЛЕЦЬКИЙ, Е.І. НЕНАХОВ

ОПТИМАЛЬНИЙ ПОШУК ДВОХ АКТИВНИХ КУЛЬ НА МНОЖИНІ $n = 127$

Розглядається задача пошуку двох активних куль на множині заданих для $n = 127$. *Доводиться теорема, що розв'язок досягається за 13 кроків. Доведення базується на введені 2-х нових типів графів – Q-графа та N-графа.*

У роботі [1] приведений алгоритм пошуку двох активних куль на множині заданих розмірності $n = 89$. Тут приводиться доведення теореми про дві активні кулі серед $n = 127$ заданих щонайменше можна відшукати за 13 перевірок (кроків).

При доведенні, як у [1], будемо використовувати функції: $f_2(n)$ – мінімальна кількість перевірок для виявлення двох активних куль із n заданих; $g(n_1, n_2)$ – мінімальна кількість перевірок для виявлення двох активних куль, які перебувають по одній у двох підмножинах, одна з яких містить n_1 куль, а друга – n_2; $h(n_1^+, n_2)$ – мінімальне число перевірок для пошуку двох активних куль, якщо у першій множині є хоча б одна активна куля.

Теорема. На множині куль для $n = 127$ мінімальна кількість перевірок для пошуку двох активних куль $f_2(127) = 13$.

Доведення. **Крок 1.** Беремо для перевірки 38 куль. Якщо результат перевірки $<38>^-$, тоді залишається 89 куль, дві активні кулі серед яких можна знайти за $f_2(89) = 12$ кроків [1], а всього для знаходження двох активних куль досить 13 перевірок. Якщо результат перевірки $<38>^+$, то отримаємо функцію $h(38^+, 89) = 38 \cdot 89 + C_{38}^2 = 4085 < 2^{12}$. Це говорить про достатність 12-и кроків для розв'язання задачі. Далі будемо брати кулі з обох множин. Результати перевірок будемо, як правило, представляти у вигляді 2-х графів, які показані на рис. 1, 2.

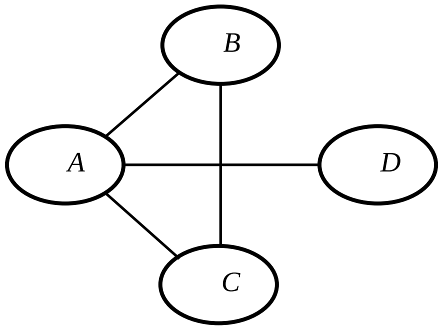

РИС. 1. Q-граф

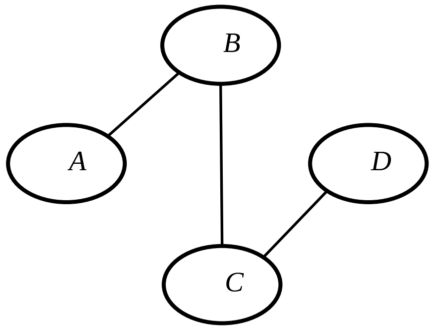

РИС. 2. N-граф

Перший граф називається Q-графом і позначається Q (A,B,C,D), другий – N-графом і позначається $N(A,B,C,D)$. Частини графів будемо називати відповідно A –, B –, C і D – частинами. Відмітимо, що тільки в A – частині Q-графа є внутрішні ребра. Кількість ребер Q-графа дорівнює $A(B+C+D)+ B{\cdot}C+C_A^2$, де C_A^2 – число комбінацій, а кількість ребер N-графа $A{\cdot}B+B{\cdot}C+C{\cdot}D$. Характерно, що
в Q-графі D-частина не має спільних ребер з B – і C – частинами. Якщо в Q-графі зробити вибірку з C – частини, то в разі позитивного результату ребра між A – і B – частинами зникають, і, таким чином, отримуємо N-граф. Те саме можна сказати і про B – частину. Здійснюючи вибірки з N-графа, в разі позитивного результату отримуємо або N-граф, або дводольні графи, які позначимо $d(\alpha,\beta)$, де α,β – кількість вершин у долях.

Крок 2. (+). Перевіряємо 12 куль з першої групи та 23 з другої. Якщо результат перевірки $< 12_1, 23_2 >^+$, то отримаємо граф Q (12, 23, 26, 66). Кількість ребер цього графа $m = 12(23 + 26 + 66) + 23{\cdot}26 + C_{12}^2 = 2044 < 2^{11}$.

Крок 3. (++). Беремо 8 куль з групи 12_1 та 10 з групи 66. В разі позитивного результату отримаємо граф Q(8,10,4,105). Кількість ребер цього графу $m = 8(10 + 4 + 105) + 10{\cdot}4 + C_8^2 = 1020 < 2^{10}$. Група із 105 вершин має спільні ребра тільки з групою 8-и.

Крок 4. (+++). Беремо для перевірки 64 кулі з групи 105. В разі позитивного результату отримаємо дводольний граф $d(8,64)$, який відповідає функції $g(8,16) = g(2^3, 2^6) = 9$ (див. [2]). У сумі буде 13 = 9+4 кроків (K = 13).

Крок 5. (+++−). У цьому випадку отримаємо граф Q (8, 10, 4, 41). Для нього $m = 8(10+4+41)+10{\cdot}4 + C_8^2 = 508 < 2^9$. Беремо 32 кулі з групи 41. В разі позитивного результату отримаємо дводольний граф $d(8,32)$, що відповідає функції $g(2^3,2^5)=8$. В сумі K = 8+5 = 13.

Крок 6. (+++——). У цьому випадку отримаємо граф Q (8, 10, 4, 9). Для нього m = 8(10+4+9)+10·4 + C_8^2 = 252< 2^8. Беремо 10 куль з групи 10 та 1 кулю з групи 9. У разі позитивного результату отримаємо граф N(4, 10, 8, 1), для якого m = 4·10+10·8+ 8·1 = 128 $\leq 2^7$.

Крок 7. (+++——+). Беремо послідовно для перевірки половину куль з груп залишених (4 і 8) і застосовуємо метод дихотомії. Незалежно від результату отримаємо граф N(1, 10, 2, 1), для якого $m \leq 2^5$.

Крок 9. (+++——+**), де * – будь-який знак (+ або −) . Беремо 1 кулю з A – частини і 3 кулі з 10-и. В разі негативного результату перевірки отримаємо дводольний граф $d(2,8)$, для якого функція $g(2,8)=4$. При позитивному результаті отримаємо граф N(7,1,3,2), для якого m = 16 $\leq 2^4$, тобто за наступні 4-и кроки легко отримуємо розв'язок. У сумі K = 9 + 4 = 13.

У разі негативного результату на 6-му кроці отримаємо функцію $h(8^+,12)$, яка дорівнює 7 [1, лема 10].

При негативному результаті на 3-му кроці отримаємо граф Q (4, 23, 26, 56), для якого m = 4·(23+26+56) +23·26+ C_4^2 = 1024 = 2^{10}.

Крок 4. (++−). Беремо 16 куль з 23-х і 8 – з 56-и. У разі позитивного результату отримаємо 2 дводольні графи $d(16,30)$ і $d(4,8)$, які в сумі мають 512 ребер. Методом дихотомії за 9 кроків знаходимо шукане ребро, тобто 2 активні кулі. В сумі K = 9 +4 = 13.

При негативному результаті отримаємо граф Q (4, 7, 26, 48), для якого m = 512.

Крок 5. (++——). Беремо 6 куль з 7-и та 19 з 48-и. У разі позитивного результату отримаємо 2 дводольних графа $d(6,30)$ і $d(4,19)$, які мають в сумі 256 ребер. Методом дихотомії за 8 кроків знаходимо 2 активні кулі. Всього K = 13.

При негативному результаті отримаємо граф Q (4, 1, 26, 29), для m = = 4·(1+26+29) +1·26+ C_4^2 = 256 = 2^8.

Крок 6. (++———). Беремо 24 кулі з 26 і 2 кулі з 29-и. При позитивному результаті отримаємо 2 дводольних графа $d(5,24)$ і $d(2,4)$, які в сумі мають 128 ребер. Методом дихотомії за 7 кроків знаходимо 2 активні кулі. Всього K = 13.

У разі негативного результату отримаємо граф Q (4, 1, 2, 27), для якого m =4·(1+2+27) +1·2+ C_4^2 = 128 $\leq 2^7$.

Крок 7. (++———). Беремо 16 куль з 27. При позитивному результаті отримаємо дводольний граф $d(4,16)$, який має 64 ребра. Для нього функція $g(4,16) = g(2^2, 2^4) = 6$.

При негативному результаті отримаємо граф Q (4, 1, 2, 11), для якого m = 64.

Крок 8. (++————). Беремо 1 кулю з 4-х і 5 куль з 11-и. При позитивному результаті отримаємо граф Q (1, 5, 3, 9), у якого m = 32.

Крок 9. (++————+). Беремо 4 кулі з 5-и. У разі позитивного результату отримаємо дводольний граф $d(4,4)$, для якого $g(4,4) = 4$. А при негативному результаті отримаємо граф Q (1, 1, 3, 9), для якого m = 16, з якого розв'язок легко отримати за 4 кроки. Всього K = 9 + 4=13.

При негативному результаті на 8-у кроці отримаємо граф Q (3, 1, 2, 6), який має 32 ребра.

Крок 9. (++—————). Беремо 1 кулю 2-х і 4 кулі з 6-и. При позитивному результаті отримаємо два дводольні графа $d(1,4)$ і $d(3,4)$, які в сумі мають 16 ребер. Розв'язок легко знаходиться за 4 кроки. Всього K = 9 + 4=13.

А при негативному результаті отримаємо граф Q (3, 1, 1, 2), для якого m = 16 і розв'язок теж знаходиться за 4 кроки.

Тепер розглянемо негативний результат 2-го кроку. Отримаємо функцію $h(26^+, 66)$.

Крок 3. (+–). Беремо 8 куль з 26-и та 18 куль з 66-и. Отримаємо граф Q (8, 18, 18, 48), для якого $m = 8\cdot(18+18+48) + 18\cdot 18 + C_8^2 = 1024 = 2^{10}$. Якщо результат позитивний, здійснюємо наступний

Крок 4. (+–+). Беремо 16 куль з B-частини та 12 куль з 48-и. При позитивному результаті отримаємо 2 дводольні графи $d(26,16)$ і $d(12,8)$, які в сумі мають 512 ребер. Методом дихотомії для них розв'язок знаходиться за 9 кроків. Всього K = 9 + 4=13.

У разі негативного результату отримаємо граф Q (8, 2, 18, 36), для якого $m = 8\cdot(2+18+36) + 2\cdot 18 + C_8^2 = 512 = 2^9$.

Крок 5. (+–+–). Беремо 16 куль з 18-и та 12 куль з 36-и. При позитивному результаті отримаємо 2 дводольні графи $d(16,10)$ і $d(12,8)$, які в сумі мають 256 ребер. Методом дихотомії для них розв'язок знаходиться за 8 кроків. Всього K = 8 + 5 = 13.

А при негативному результаті отримаємо граф Q (8, 2, 2, 24), для якого $m = 8\cdot(2+2+24) + 2\cdot 2 + C_8^2 = 256 = 2^8$.

Крок 6. (+–+––). Беремо 16 куль з 24-х. При позитивному результаті отримаємо дводольний граф $d(8,16)$ з 128 ребрами, для якого розв'язок методом дихотомії знаходиться за 7 кроків. У сумі K = 6 + 7 = 13.

У разі негативного результату отримаємо граф Q (8, 2, 2, 8), для якого $m = 8\cdot(2+2+8) + 2\cdot 2 + C_8^2 = 128 = 2^7$.

Крок 7. (+–+–––). Беремо 3 кулі з A-частини та 2 з D-частини. При позитивному результаті отримаємо граф Q (3, 2, 5, 10), для якого $m = 3\cdot(2 + 5 + 10) + 2\cdot 5 + C_3^2 = 64 = 2^6$.

Крок 8. (+–+–––+). Беремо 1 кулю з 2-х та 8 з 10-и. У разі позитивного результату отримаємо два дводольні графи $d(1{,}8)$ і $d(3{,}8)$, для яких розв'язок методом дихотомії знаходиться за 5 кроків. У сумі K = 8+5=13.

При негативному результаті отримаємо граф Q (3, 1, 5, 2), для якого $m = 3\cdot(1 + 5 + 2) + 1\cdot 5 + C_3^2 = 32 = 2^5$.

Крок 9. (+–+–––+–). Беремо 4 кулі з 5-и. У разі позитивного результату отримаємо дводольний граф $d(4{,}4)$, для якого розв'язок методом дихотомії знаходиться за 4 кроки. У сумі K = 9 + 4 = 13.

При негативному результаті отримаємо граф Q (3, 1, 1, 2), для якого функція $h(3^+, 4)$, як доведено в [1], дорівнює 4. Тут теж K = 9 + 4 = 13.

Якщо на кроці 7 (+–+–––) буде негативний результат, то отримаємо граф Q (5, 2, 2, 6), для якого $m = 5\cdot(2 + 2 + 6) + 2\cdot 2 + C_5^2 = 64 \leq 2^6$.

Крок 8. (+–+––––). Беремо 1 кулю з 5-и, 3 кулі з 6-и та 1 кулю з B-частини. При позитивному результаті отримаємо граф $G1$ (рис. 3).

Крок 9. (+–+––––+). Беремо 3 кулі та 1 з правої 4-и. У разі позитивного результату отримаємо 2 дводольні графи $d(3{,}5)$ і $d(1{,}1)$, для яких розв'язок знаходиться за 4 кроки.

При негативному результаті отримаємо граф Q (1, 1, 6, 3), для якого розв'язок легко знаходиться за 4 кроки. В обох випадках K = 9 + 4 = 13.

При негативному результаті на кроці 8 (+–+––––) отримуємо граф Q (4, 1, 2, 3), для якого $m = 4\cdot(1+2+3) + 1\cdot 2 + C_4^2 = 32 = 2^5$.

Крок 9. (+–+–––––). Беремо 1 кулю з 4-х, 1 кулю з 2-х і 1 кулю з 3-х. У разі позитивного результату отримаємо граф $G2$ (рис. 4).

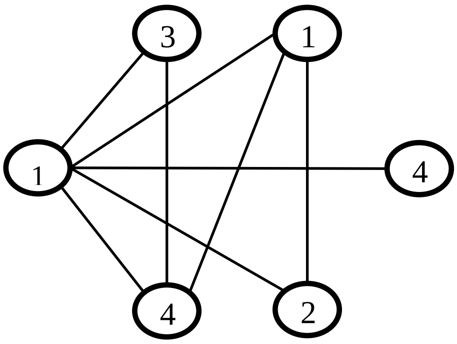

РИС. 3. Граф $G1$

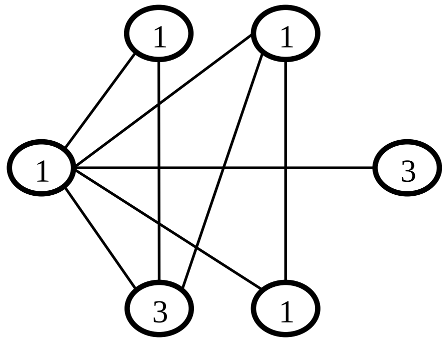

РИС. 4. Граф $G2$

Крок 10. (+–+––––––+). Беремо 1 кулю (верхню праву) та 3 кулі з правої трійки. При позитивному результаті отримаємо 2 дводольні графи $d(1,5)$ і $d(1,3)$, які в сумі мають 8 ребер і для яких розв'язок знаходиться за 3 кроки.

А при негативному результаті отримаємо граф Q (1, 1, 3, 1), для якого розв'язок методом дихотомії знаходиться за 3 кроки. У сумі $K = 10 + 3 = 13$.

У разі негативного результату на кроці 9 (+–+––––––), див. крок 9(+–+––––+–), негативний результат. У цьому випадку отримаємо граф Q (3, 1, 1, 2), для якого функція $h(3^+, 4) = 4$.

При негативному результаті на кроці 3 (+–) отримуємо функцію $h(18^+, 48)$, для якої $m = 18{\cdot}48 + C_{18}^2 = 1017 < 2^{10}$.

Крок 4. (+––). Беремо 8 куль з 18-и та 2 кулі з 48-и. А при позитивному результаті отримаємо граф Q (8, 2, 10, 46), для якого $m = 8{\cdot}(2+10+46) + 2{\cdot}10 + C_8^2 =$ $= 512 = 2^9$.

Крок 5. (+––+). Беремо 8 куль з 10-и та 22 кулі з 46-и. У разі позитивного результату отримаємо 2 дводольні графи $d(8,10)$ і $d(8,22)$ з 256 ребрами, для яких методом дихотомії отримаємо розв'язок за 8 кроків. У сумі $K = 5 + 8 = 13$.

При негативному результаті, див. крок 5 (+–+–), негативний результат.

Якщо на кроці 4(+––) результат негативний, то отримуємо функцію $h(10^+, 46)$, для якої $m = 10{\cdot}46 + C_{10}^2 = 505 < 2^9$.

Крок 5. (+–––). Беремо 4 кулі з 10-и та 7 куль з 46-и. У разі позитивного результату отримаємо граф Q (4, 7, 6, 39), для якого $m = 4{\cdot}(7+6+39) + 7{\cdot}6 + C_4^2 =$ $= 256 = 2^8$.

Крок 6. (+–––+). Беремо 6 куль з 7-и та 17 із 39-и. При позитивному результаті отримаємо граф $N(6, 6, 4, 17)$, для якого $m = 6\cdot(6+4)+4\cdot 17 = 128 = 2^7$, для якого методом дихотомії розв'язок отримуємо за 7 кроків. $K = 6 + 7 = 13$.

При негативному результаті отримаємо граф Q (4, 1, 6, 22), для якого $m = 4\cdot(1+6+22) + 1\cdot 6 + C_4^2 = 128 = 2^7$.

Крок 7. (+–––+–). Беремо 4 кулі з 6-и та 11 куль із 22-х. У разі позитивного результату отримаємо 2 дводольні графи $d(4,5)$ і $d(11,4)$ з 64 ребрами, для яких методом дихотомії отримуємо розв'язок за 6 кроків. $K = 7 + 6 = 13$.

При негативному результаті отримаємо граф Q (4, 1, 2, 11), для якого $m = 4\cdot(1 + 6 + 22) + 1\cdot 6 + C_4^2 = 128 = 2^7$. Далі див. крок 7 (++––––), негативний результат.

А при негативному результаті на кроці 5(+–––) отримаємо функцію $h(6^+, 39)$, для якої $m = 6\cdot 39 + C_6^2 = 249 < 2^8$.

Крок 6. (+––––). Беремо 2 кулі з 6-и та 10 куль з 39-и. У разі позитивного результату отримаємо граф Q (2, 10, 4, 29), для якого $m = 2\cdot(10 + 4 + 29) + {}$ $+ 10\cdot 4 + C_2^2 = 127 < 2^7$.

Крок 7. (+––––+). Беремо 10 куль і 2 кулі з 29-и. При позитивному результаті отримаємо 2 дводольні графи $d(10,6)$ і $d(2,2)$ з 64 ребрами, для яких методом дихотомії отримуємо розв'язок за 6 кроків.

При негативному результаті отримуємо функцію $h(2^+, 31)$, для якої $m = 2\cdot 31 + C_2^2 = 63 < 2^6$. В цьому випадку розв'язок отримаємо за 6 (1 + 5) кроків, якщо з 31 кулі послідовно (до отримання позитивного результату) брати для перевірки 16, 8, 4, 2, 1 куль. Кількість необхідних кроків буде визначатися за формулою $g(2^k, 2^l) = k + l$ [2]. В обох випадках $K = 7 + 6 = 13$.

Якщо на кроці 6 (+––––) буде негативний результат, то отримаємо функцію $h(4^+, 29)$, для якої $m = 4\cdot 29 + C_4^2 = 122 < 2^7$. Розв'язок отримаємо за 7 кроків, якщо з 31 кулі послідовно (до отримання позитивного результату) брати для перевірки 16, 8, 4, 2, 1 куль. $K = 6 + 7 = 13$.

Як бачимо, в усіх випадках $K = 13$. Цим і завершується доведення теореми.

Г.А. Донец, В.И. Билецкий, Э.И. Ненахов

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОИСК ДВУХ АКТИВНЫХ ШАРОВ НА МНОЖЕСТВЕ $n = 127$

Рассматриваются задачи поиска двух активных шаров на множестве заданных для $n = 127$. Доказывается теорема, что решение достигается за 13 шагов. Доказательство базируется на введении 2-х новых типов графов – Q-графа и N-графа.

G.A. Donets, V.I. Biletskyi, E.I. Nenakhov

OPTIMAL SEARCH FOR TWO ACTIVE BALLS IN THE SET FOR $n = 127$

The Problem of search or for two active balls in the set of given ones for n=127 is considered. The theorem is proved, consisting in assertion that the task is achiked in 13 steps. The proof is based on the use of the introduced new types of graphs, namely the Q-graph and the N-graph.

Список літератури

1. Билецкий В.И., Ненахов Э.И. Алгоритмы поиска двух активных шаров на заданных множествах. *Теорія оптимальних рішень*. К: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины. 2016. С. 78 – 85.
2. Донец Г.А., Билецкий В.И., Ненахов Э.И. Оптимальный поиск двух активных шаров на множестве заданных. *Теорія оптимальних рішень*. К: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины. 2015. С. 134 – 139.

Одержано 26.03.2018