УДК 519.21

А.Ф. ГОДОНОГА, Ш.А. БЛАНУЦА, Б.М.ЧУМАКОВ

АЛГОРИТМ НАСТРОЙКИ ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ ПОТОКОВ В ПРОЦЕССЕ ПРОИЗВОДСТВА

Рассмотрена недифференцируемая модель производственных систем, направленных на максимизацию прибыли, без ограничения на количество рынков приобретения потоков ресурсов и сбыта товаров. Предложен алгоритм, построенный на основе метода обобщенного градиента, который итеративно корректирует входы системы на ее выходах, что позволяет получать в предельном варианте оптимальные значения этих потоков.

Введение. Метод моделирования – это один из основных методов экономической кибернетики [1]. Производственные системы занимают особое место среди семейства экономико-кибернетических систем. Эффективное функционирование производственной системы (предприятия) в некоторых случаях можно описать посредством линейных моделей, но в других случаях, более адекватными для этой цели, являются нелинейные негладкие модели. То есть, либо целевая функция недифференцируема [2], либо ограничения модели «порождают» недифференцируемые функции относительно факторов принятия решений.

В свою очередь, соответствующие нелинейные модели являются достаточно сложными для анализа посредством аналитических методов, а тем более для их оптимального решения. Определенные модификации метода обобщенных градиентов [3] позволяют эффективно решать задачи такого типа.

В данной работе предложенный алгоритм использует в качестве направления движения обобщенный градиент целевой функции, если ограничения по расходу ресурсов выполняются с заданным «порогом толерантности» [4], или обобщенный градиент функции максимального отклонения соответствующих ограничений, в противном случае.

Случай А. Все ресурсы приобретены на едином рынке производственных факторов и все блага реализуются на одном рынке товаров. Данная модель представима в виде

$$R(u,x,y)=\sum_{j=1}^{n}v_j(u_j,y_j)-\sum_{i=1}^{m}r_ix_i\to\max(u,x), \tag{1}$$

где $v_j(u_j,y_j)=c_j\min\{u_j,y_j\}-p_j\max\{0;u_j-y_j\}-q_j\max\{0;y_j-u_j\}$
или

$$v_j(u_j,y_j)=\begin{cases}c_ju_j,\ \text{если } u_j=y_j\\ c_ju_j-q_j(y_j-u_j),\ \text{если } u_j<y_j\\ c_jy_j-p_j(u_j-y_j)\ \text{если } u_j>y_j.\end{cases}$$

Значение $v_j(u_j,y_j)$ представляет ту часть величины дохода предприятия в случае, когда выпуск j-го продукта равен u_j, а соответствующий спрос на этот продукт равен y_j единиц. Значение $q_j(y_j-u_j)$ – это величина ущерба или штрафа из-за недостающей продукции в объеме (y_j-u_j) единиц, а $p_j(u_j-y_j)$ выражает потери связанные с перепроизводством, т. е. когда $u_j>y_j$.
Ограничения модели

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_j\le b_i+x_i,\ \ i=m, \tag{2}$$

$$0\le \underline{u_j}\le u_j\le \overline{u_j}, \tag{3}$$

$$0\le x_i\le \overline{x_i},\ \ i=m. \tag{4}$$

Здесь u_j и x_i – факторы контроля в рамках модели, причем величина x_i – это дополнительное снабжение предприятия i-ым ресурсом в случае нехватки имеющимися уже ресурсами этого вида в объеме b_i единиц;

y_j – заранее известная величина (например, когда предприятие заключает договор с определенным экономическим агентом), либо представляется как величина неопределенного характера;

c_j – цена единицы блага j-го типа;

r_i – цена единицы ресурсов вида i;

a_{ij} – технологические коэффициенты.

Краткое описание алгоритма решения задачи (1) – (4). Определяются следующие функции:

$$\varphi_i(u,x_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_j-b_i-x_i,$$

$$\varphi(u,x)=\max\{\varphi_1(u,x_1),\dots,\varphi_m(u,x_m)\}.$$

Рассматриваются множества

$$U = \{u = (u_1, ..., u_j, ..., u_n) : \underline{u_j} \le u_j \le \overline{u_j},\ j = \overline{1,n}\},$$

$$X = \{x = (x_1, ..., x_i, ..., x_m) : 0 \le x_i \le \overline{x_i},\ i = \overline{1,m}\}.$$

Алгоритм состоит в построении двух последовательностей $\{u^k\}$ и $\{x^k\}$ в соответствии со следующими правилами:

$$u^{k+1} = P_U(u^k + h_k g_u^k),\ \text{где } g_u^k = grad\ R_u(u^k, x^k, y);\ \text{если } \varphi(u^k, x^k) \le \delta_k.$$

$$x^{k+1} = P_X(x^k + h_k g_x^k),\ \text{для } g_x^k = grad\ R_x(u^k, x^k, y);\ \text{если } \varphi(u^k, x^k) \le \delta_k.$$

$$u^{k+1} = P_U(u^k - h_k g_u^k),\ \text{для } g_u^k = grad\ \varphi_u(u^k, x^k);\ \text{если } \varphi(u^k, x^k) > \delta_k.$$

$$x^{k+1} = P_X(x^k - h_k g_x^k),\ \text{для } g_x^k = grad\ \varphi_x(u^k, x^k);\ \text{если } \varphi(u^k, x^k) > \delta_k,$$

причем j-ая компонента вектора $g_u^k = grad\ R_u(u^k, x^k, y)$ вычисляется по правилу:

$$(g_u^k)_j = \begin{cases} c_j, & \text{если } u_j^k = y_j \\ c_j + q_j, & \text{если } u_j^k < y_j \\ -p_j, & \text{если } u_j^k > y_j \end{cases}$$

i-ая компонента вектора $g_x^k = grad\ R_x(u^k, x^k, y)$ равна – r_i, j-ая компонента вектора $g_u^k = grad\ \varphi_u(u^k, x^k)$ равна $a_{i_k j}$, где i_k – тот индекс i, для которого реализуется максимум функции $\varphi(u, x)$ в точке (u^k, x^k), а i-ая компонента вектора $g_x^k = grad\ \varphi_x(u^k, x^k)$ равна значению – 1, если $i = i_k$ и равна нулю, в противном случае.

Относительно числовых последовательностей $\{h_k\}$ и $\{\delta_k\}$ [3], предполагаются выполненными следующие условия:

$$h_k > 0, h_k \to 0, \delta_k > 0, \delta_k \to 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta_k = \infty,\ h_k / \delta_k \to 0.$$

Их соблюдение должно обеспечить теоретическую сходимость последовательностей $\{u^k\}$ и $\{x^k\}$, вышеопределенных, к оптимальному варианту относительно предложения продукции и спроса, со стороны предприятия, на необходимые ресурсы.

Замечание. Выполнение условия $\varphi(u^k, x^k) \le \delta_k$, в процессе реализации алгоритма, обеспечивает сходимость u^k и x^k к оптимальному набору u^*, x^*, соответственно, даже в том случае, когда условие Слейтера [3] для данной задачи не имеет место.

Случай Б. Каждый фактор производства i может быть доставлен на нескольких рынках, их число известно и равно m_i. Продукция j-го типа может продаваться на разных рынках, их количество равно n_j (см. рисунок).

РИСУНОК. Схема снабжения предприятия ресурсами и распределения благ для продажи

$$R(u,x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_j} v_j^l(u_j^l,y_j^l)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m_i} r_i^s x_i^s \to \max(u,x), \qquad (5)$$

где $v_j^l(u_j^l,y_j^l)=c_j^l\min\{u_j^l,y_j^l\}-p_j^l\max\{0;u_j^l-y_j^l\}-q_j^l\max\{0;y_j^l-u_j^l\}$.

В данном случае

$$u=(u_1^1,\dots u_1^{n_1};\dots;u_j^1,\dots,u_j^{n_j};\dots;u_n^1,\dots u_n^{n_n}),$$

$$y=(y_1^1,\dots y_1^{n_1};\dots;y_j^1,\dots,y_j^{n_j};\dots;y_n^1,\dots y_n^{n_n}),$$

$$x=(x_1^1,\dots x_1^{m_1};\dots;x_i^1,\dots,x_i^{m_i};\dots;x_m^1,\dots x_m^{m_m}).$$

Ограничения в новой модели выглядят следующим образом:

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n}\ \sum\nolimits_{i=1}^{n_j} a_{ij}u_j^l \le b_i+\sum\nolimits_{s=1}^{m_i} x_i^s,\ i=1,2,\dots,m. \qquad (6)$$

$$0\le \underline{u}_j \le \sum\nolimits_{i=1}^{n_j} u_j^l \le \overline{u}_j,\ j=\overline{1,n}. \qquad (7)$$

$$0\le u_j^l \le \overline{u_j},\ l=\overline{1,n_j};\ j=\overline{1,n}. \qquad (8)$$

$$0\le x_i^s \le \overline{x_i^s},\ s=\overline{1,m_t};\ i=\overline{1,m}. \qquad (9)$$

Аналогичным образом определяются функции:

$$\varphi_i(u,x_i^1,\dots,x_i^{m_i})=\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{l=1}^{n_j} a_{ij}u_j^l-b_i-\sum_{s=1}^{m_i}x_i^s,\ i=1,2,\dots,m.$$

Для применения алгоритма необходимо также дополнительно определить следующие функции:

$$\underline{\Psi}_j(u_j^1,\dots,u_j^{n_j})=\underline{u}_j-\sum_{l=1}^{n_j}u_j^l,\quad \overline{\Psi}_j(u_j^1,\dots,u_j^{n_j})=\sum_{l=1}^{n_j}u_j^l-\overline{u}_j,\ j=\overline{1,n}.$$

Очевидно, в допустимом варианте, значении всех этих функций должны быть неположительными, т. е.

$$\underline{\Psi}_j(u_j^1,...,u_j^{n_j}) \le 0; \overline{\Psi}_j(u_j^1,...,u_j^{n_j}) \le 0,\ j=1,2,...,n. \qquad (10)$$

Далее определяются функции

$$\Psi(\cdot) = \max\{\underline{\Psi}_1(\cdot),...,\underline{\Psi}_n(\cdot); \overline{\Psi}_1(\cdot),...,\overline{\Psi}_n(\cdot)\},\ \varphi(\cdot) = \max\{\varphi_1(\cdot),...,\varphi_m(\cdot); \Psi(\cdot)\}.$$

Для решения задачи (5) – (9) можно применять алгоритм разработанный для случая А, учитывая также при этом выполнение ограничений (10) с тем же порогом толерантности δ_k. В этом случае множества U и X определены неравенствами (8) и (9), соответственно.

Замечание. Вышерассмотренные алгоритмы разработаны, исходя из предположения, что компоненты набора y известны заранее, например, когда предприятие производит согласно заключенным договорам. Но, естественно, представляют также интерес и случаи, в которых данные компоненты являются случайными, или неопределенными, а целевая функция выражается в терминах *средней прибыли:*

$$\max_{u,x}[M_y(R(u,x,y))],$$

или *наихудшего показателя прибыли* (критерий Вальда):

$$\max_{u,x}\min_y R(u,x,y),$$

или минимизации *функции сожалений* Сэвиджа:

$$\min_{u,x}[\max_y(\max_{u,x} R(u,x,y) - R(u,x,y))],$$

или максимизации, в смысле *критерия реализма* Гурвица:

$$\min_{u,x}[a\min_y R(u,x,y) + (1-a)\max_y R(u,x,y)],$$

где параметр $a \in [0;1]$ и выражает склонность принимающего решения к пессимизму.

Все эти постановки подлежат дальнейшему исследованию.

Выводы. В работе предложены недифференцируемые производственные модели, относительно контролируемых факторов, для решения которых, на основе метода проекции обобщенных градиентов с автоматической регулировкой шаговых множителей, разработаны численные алгоритмы, использующие принцип «порога толерантности». Величина данного порога должна стремиться к нулю, но существенно медленнее, чем величина шага. Выполнение соответствующих условий гарантирует получение приемлемых приближенных решений даже для случаев, когда в задачах не выполняется известное условие Слейтера, т. е. когда множество допустимых решений не образует тело в пространстве переменных. Именно в таких случаях, при анализе некоторых практических задач, было обнаружено, что если величину порога толерантности приравнять нулю, то обобщенный градиент целевой функции ни разу, ни на одной итерации, не участвует в процессе реализации алгоритма. И конечно, тогда и невозможно надеяться на получение ожидаемых результатов.

А.Ф. Годонога, Ш.А. Блануца, Б.М. Чумаков

АЛГОРИТМ РЕГУЛЮВАННЯ ПОТОКІВ ВХОДУ І ВИХОДУ У ВИРОБНИЧОМУ ПРОЦЕСІ

Розглянуто недиференційовану модель виробничих систем, спрямованих на максимізацію прибутку, без обмеження на числа ринків придбання потоків ресурсів і збуту товарів. Запропоновано алгоритм, побудований на основі методу узагальненого градієнта, який ітеративно коригує входи системи на її виходах, що дозволяє отримувати в граничному варіанті оптимальні значення цих потоків.

A.F. Godonoga, S.A. Blanutsa, B.M. Chumakov

ALGORITHM FOR ADJUSTING INPUT AND OUTPUT FLOWS IN A PRODUCTION PROCESS

This paper considers an undifferentiated model of production systems aimed at maximizing profit, considering that resources can be procured from multiple markets and goods in their turn can be traded on different markets as well. At the same time, for the described model it is proposed, based on the generalized gradient method, a numerical algorithm which iteratively adjusts the inputs of the system at its outputs, obtaining in the limit variant the optimal values of these flows.

Список литературы

1. Scarlat E., Chirita N. Cibernetica sistemelor economice, ASE Bucuresti. 2003. 629 p.
2. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев. Наук. думка, 1979. 199 с.
3. Godonoagă A., Baractari A. Modele economice nediferentiabile. Aspecte decizionale. Editura ASEM, Chisinău. 2011. 275 p.
4. Годонога А.Ф., Чумаков Б.М. Детерминированные и стохастические схемы метода проекции субградиента. *Теорія оптимальних рішень*. Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2015. С. 90 – 97.

Получено 15.03.2019