

© С.Г. Анікєєв, 2010

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, м. Івано-Франківськ*

## **ПРО СПОСІБ ШВИДКОГО ВИРІШЕННЯ ПРЯМОЇ ЗАДАЧІ ГРАВІРОЗВІДКИ І МАГНІТОРОЗВІДКИ З ВИКОРИСТАННЯМ КІНЦЕВО-ЕЛЕМЕНТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ**

Представлено швидкий спосіб вирішення прямої задачі граві- і магніторозвідки для складних геологічних моделей, апроксимацією яких є щільна упаковка великої кількості ( $100 \cdot 10^6$  і більше) малих однорідних паралелепіпедів. Ефективності способу досягнуто шляхом зведення прямої задачі до операції згортки із застосуванням дискретного перетворення Фур'є. Явища, спричинені апроксимацією прямої задачі лінійною згорткою та трансформацією лінійної згортки у колову, враховані структурними перебудовами підінтегральних функцій.

**Ключові слова:** швидке вирішення прямої 3D задачі гравірозувідки і магніторозвідки, складні моделі, апроксимація, щільна упаковка великої кількості однорідних паралелепіпедів, дискретне перетворення Фур'є, лінійна і колова згортка.

Прямі задачі гравірозувідки і магніторозвідки застосовуються у методах моделювання геологічних середовищ. Широко відомі дослідження будови земної кори С.С. Красовського, засновані на гравіметричному моделюванні. Також вони активно розвиваються у рамках геологічно змістовних методів підбору Є.Г. Булаха. Актуальність проблеми ефективного рішення прямих задач та використання змістовних апроксимацій потенціальних полів і геологічних середовищ відображена в роботах Є.Г. Булаха, Г.Я. Голіздри, В.І. Старостенко, В.М. Страхова, А.В. Циркульського й ін. [1–14].

Необхідність створення швидких і достатньо точних універсальних алгоритмів прямої задачі гравірозувідки і магніторозвідки зазначав В.М. Страхов [5, 7], вважаючи однією з причин необхідності розробки принципово нових методів рішення обернених задач без рішення прямих не-ефективність останніх для широкого кола складних моделей геологічного середовища. Однією з конструктивних ідей В.М. Страхова при цьому є використання кінцево-елементного опису середовища [15, 16], тобто заповнення його об'єму великою кількістю ( $> 10^5$ ) малих однорідних кубиків.

У статті представлено швидкий спосіб вирішення прямої задачі граві- і магніторозвідки для складних геологічних моделей, апрокси-

мацією яких є щільна упаковка великої кількості ( $100 \cdot 10^6$  і більше) малих однорідних паралелепіпедів. Спосіб апроксимації відповідає постановці лінійних задач, але може бути використаний і у нелінійних за умови “редукції їх до послідовності лінійних задач” [17], наприклад, шляхом розкладу у ряд Тейлора. Ефективності способу вирішення прямої задачі досягнуто зведенням її до операції згортки із застосуванням дискретного перетворення Фур’є (ДПФ). Явища, спричинені апроксимацією прямої задачі лінійною згорткою та трансформацією лінійної згортки у колову, враховані структурними перебудовами підінтегральних функцій.

**Апроксимаційна конструкція.** Для практики геологічної інтерпретації зручним наближенням є щільна упаковка довільних за будовою геологічних моделей великою кількістю “маленьких” елементарних тіл та розрахунок модельного поля по рівномірній сітці з малим кроком.

Параметри такої апроксимації наступні:

- 1) елементарні тіла (призми, паралелепіпеди) є однорідними:  $I_{k,l,m} = \text{const}$ ;
- 2) двовимірною областю  $V$  розподілу джерел є прямокутник, тривимірною – паралелепіпед; вісь  $z$  спрямована вниз;
- 3) область  $V$  упакована прямокутними призмами з площею перетину  $s = \Delta x \cdot \Delta z$  для 2D задач, або паралелепіпедами об’ємом  $v = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  для 3D задач;
- 4) координати геометричних центрів елементарних тіл  $(x_k, y_l, z_m)$  визначені мережею точок  $x_k = (k - 1) \cdot \Delta x$ ,  $y_l = (l - 1) \cdot \Delta y$ ,  $z_m = Z_0 + (m - 1) \cdot \Delta z + \Delta z/2$ , де  $k = 1, 2, \dots, K$ ;  $l = 1, 2, \dots, L$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$ ;  $Z_0$  – початок області  $V$  по осі  $z$ ;
- 5) модельне поле  $U(x_k, y_l)$  розраховується у точках  $x_k, y_l$  на площині  $z = 0$ , тобто точки розташовані над геометричними центрами елементарних тіл.

Побудова алгоритму. Для спрощення розглянемо двовимірну задачу. Поле в точці  $x_0$  для моделі, складеної зі щільного ряду  $K$  елементарних тіл  $s_{k,m}$  на рівні  $z_m = \text{const}$  (рис. 1):

$$U_m(x_0) = \sum_{k=0}^{K-1} I_{k,m} \cdot S_{k,m}, \quad (1)$$

де  $S_{k,m}$  – значення поля в точці  $x_0$  від елементарного тіла  $s_{k,m}$  з джерелом одиничної інтенсивності (на рис. 1,  $a$  ці коефіцієнти прямої задачі зобра-

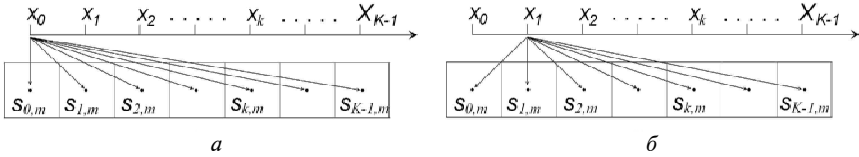


Рис. 1. Апроксимаційна конструкція моделі на рівні  $z_m = \text{const}$

жені стрілками);  $I_{k,m}$  – інтенсивність джерела у межах відповідного елементарного тіла.

Для точки  $x_1$  за умови, що всі тіла  $s_{k,m}$  однієї форми і сталих розмірів та модель доповнена з правого боку тілом з нульовим джерелом, можна записати:

$$U_m(x_1) = \sum_{k=0}^K I_{k,m} \cdot S_{k-1,m} . \quad (2)$$

Коефіцієнт  $S_{-1,m}$  дорівнює  $S_{1,m}$  на основі симетрії модельних перебудов (рис. 1, б).

Для останньої точки  $x_{K-1}$ :

$$U_m(x_{K-1}) = \sum_{k=0}^{2K-1} I_{k,m} \cdot S_{k-K+1,m} . \quad (3)$$

Далі показано, що рівняння типу (3) можна ефективно вирішити за допомогою колової згортки, завдяки застосуванню якої всі кінцеві функції трансформуються у періодичні. Тобто насправді модель можна доповнювати нульовими джерелами з правого, або з лівого боків.

З урахуванням доповнень розподілу джерел нульовими джерелами ліворуч та симетричних доповнень функції  $S$  перебудована модель на рівні  $z_m = \text{const}$  і модель її зв'язку із полем мають такий вигляд, як показано на рис. 2. Повністю перебудована модель (область  $V^*$ ) показана на рис. 3.

У результаті цих процедур отримано операцію лінійної згортки двох функцій (подібно описану у монографіях Е.А. Козлова і Г.Н. Гогоненкова [18], Л. Рабинера і Б. Гоулда [19]):

$$U^*(k)_m = \sum_{k_0=0}^{2K-1} G_{k_0,m} \cdot S_{k-k_0,m} = G_{k,m} * S_{k,m} , \quad (4)$$

де для перебудованого розподілу джерел  $I$  (доповненого симетричною до основної області  $V$  зоною “нульових значень”) введено позначення  $G$ .

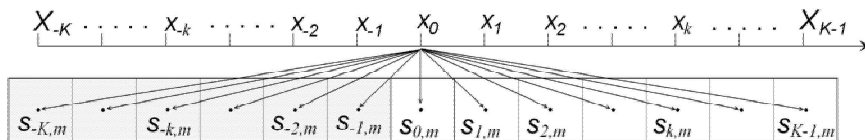


Рис. 2. Апроксимаційна конструкція перебудованої моделі на рівні  $z_m = \text{const}$

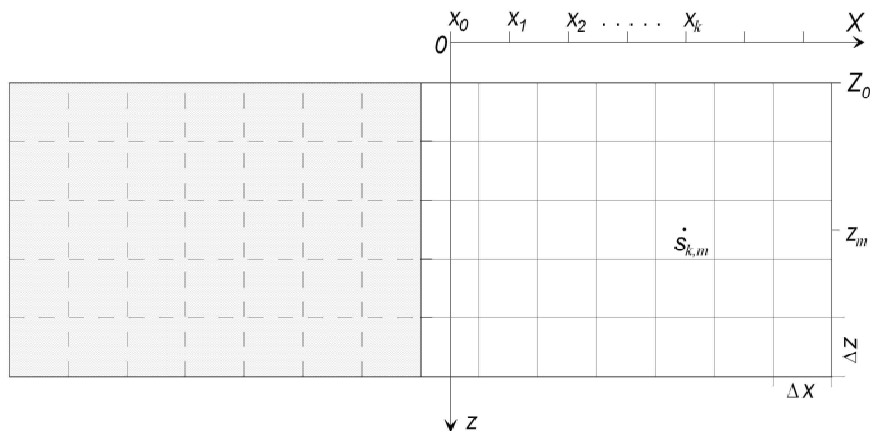


Рис. 3. Апроксимаційна конструкція перебудованої двовимірної моделі

Функція  $G$  залежить від розподілу джерел, функція  $S$  – від форми елементарних тіл  $s$ . Лінійна згортка двох кінцевих послідовностей  $G$  і  $S$ , кожна з яких має довжину  $2 \cdot K - 1$ , є кінцевою й має довжину  $2 \cdot (2 \cdot K - 1) - 1$  [19].

Для всієї трансформованої області  $V^*$  лінійна згортка (4) буде мати вигляд:

$$U^*(k) = \sum_{m=1}^M G_{k,m} * S_{k,m} . \quad (5)$$

У двовимірному випадку перебудована область  $V^*$  і кількість розрахунків збільшуються удвічі, у тривимірному – у чотири рази (зріз тривимірної області  $V^*$  по рівню  $z_m = \text{const}$  наведено на рис. 4, що, як показано далі, з успіхом компенсує швидка згортка).

Згідно з однією з основних теорем про спектри [20], інтеграл згортки неперервних функцій

$$U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x - \xi) \cdot G(\xi) d\xi \quad (6)$$

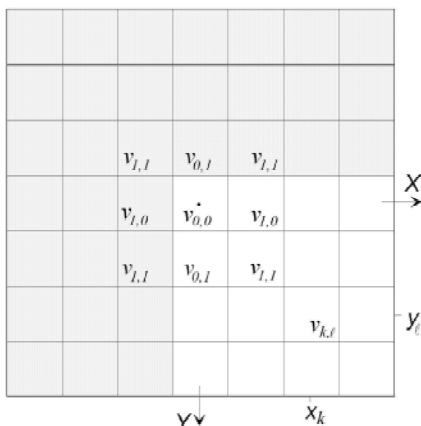


Рис. 4. Зріз апроксимаційної конструкції тривимірної області  $V^*$  по рівню  $z_m = \text{const}$  у спектральній області є простим добутком їхніх спектрів:

$$\hat{U}(\omega) = \hat{S}(\omega) \cdot \hat{G}(\omega). \quad (7)$$

У теорії дискретних лінійних систем з теореми про згортку і властивостей ДПФ випливає, що добуток ДПФ двох кінцевих послідовностей і наступне обернене ДПФ надає той же результат, що і колова згортка еквівалентних періодичних послідовностей, утворених із заданих кінцевих послідовностей [19]. Згортка періодичних послідовностей періодична і має той же період, що і самі послідовності. Оскільки період результату згортки має бути довжиною  $2 \cdot (2 \cdot K - 1) - 1$ , то для отримання результату такого ж періоду при коловій згортці необхідно, щоб послідовності  $G$  і  $S$  містили по  $2 \cdot (2 \cdot K - 1) - 1$  значень, що досягається доповненням кожної з них відповідним числом нулів. Але задача полягає у визначенні поля лише над областю  $V$ , тобто вочевидь допустимим є колове накладання (спотворення поля) за межами цієї області. Це означає, що додаткове нарощування дискретних функцій  $G$  і  $S$  нульовими значеннями не потрібне. Отже, лінійну згортку (5) можна замінити коловою згорткою:

$$U^*(x_k) = \sum_{m=1}^M \left( \hat{G}_{k,m} \cdot \hat{S}_{k,m} \right)^\cup, \quad (8)$$

де  $(\cdot)^\cup$  – обернене ДПФ;  $\hat{G}$  і  $\hat{S}$  – пряме ДПФ функцій  $G_{k,m}$  і  $S_{k,m}$ .

Періодична функція  $U^*$  відповідно до побудов  $G$  і  $S$  і властивостей колової згортки тотожна потенціальному полю  $U$  на площині  $z = 0$  над заданою областю  $V$ , тобто у межах першої половини основного періоду функції  $U^*$ . Інакше кажучи, формула (8) представляє спосіб рішення прямої задачі гравірозвідки або магніторозвідки. Також очевидно, що за способом (8) можна розраховувати як потенціали, так і їхні похідні.

Колова згортка ще називається швидкою, бо виконується за допомогою швидкого перетворення Фур'є. Як відомо, воно потребує  $(2 \cdot K) \cdot \log_2(2 \cdot K)$  операцій добутку і складання [19], де  $(2 \cdot K)$  – довжина двовимірної області  $V^*$ . Якщо не враховувати витрати часу на розрахунок коефіцієнтів прямої задачі, то кількість операцій для розрахунку поля у  $K$  точках над областю  $V$  (за  $M = 1$ ) за класичним способом дорівнює приблизно  $2 \cdot K^2$ . Тому якщо кількість точок за профілем  $K$  становить 1032, алгоритм (8) швидший за класичний спосіб у понад 90 разів. Для тривимірної моделі розміром  $1024 \cdot 1024 \cdot 1$  ефективність швидкої згортки (8) буде більша в 4500 разів. Витрати часу ПК з частотою процесора в 1 ГГц на розрахунок поля для моделі з  $1024 \cdot 1024 \cdot 1$  паралелепіпедів способом швидкої згортки складають близько 5 хвилин.

Спосіб швидкої згортки дозволяє використовувати у якості апроксимувальних елементарних тіл призми (для 2D задач) або паралелепіпеди (для 3D задач). Коефіцієнти прямої задачі, тотожні аномальному значенню поля від заданої форми тіла з одиничним джерелом і розташованого на відстані, визначеній апроксимаційною конструкцією, розраховуються за точними формулами.

**Формальна точність рішення прямої задачі** залежить від детальності опису геологічної моделі апроксимаційною конструкцією і від точності обчислень функцій  $S$  та ДПФ. Детальність опису області  $V$  можна підвищити шляхом зменшення розміру комірок апроксимації. Під час розрахунків функції  $S$  і ДПФ слід використовувати подвійну точність обчислень на ПК, що практично вирішує проблему стійкості обчислень різниці великих чисел для тривимірних моделей розміром  $\leq 1024 \cdot 1024 \cdot M$ .

**Апроксимаційна конструкція бокових зон.** У практиці гравітаційного і магнітного моделювання величезне значення має спосіб врахування впливу бокових зон. Нарощування моделі нульовими джерелами для уникнення колового накладання функцій при швидкій згортці вимагає збільшення ресурсів пам'яті ПК та часу. Водночас “нульові” області функції  $G$  можна і треба використовувати (з урахуванням періодичності ДПФ) для облямування моделі так званими ближніми боковими зонами,

що особливо привабливо у роботі з тривимірними моделями. Близькі бокові зони, як правило, описуються горизонтальним продовженням границь моделі, але можна застосувати й складніші модельні наближення будови цих зон, звісно, без додаткових витрат ресурсів ПК.

Уперше спосіб швидкої згортки був реалізований у виробничій версії компонента автоматизованої системи інтерпретації гравіметричних матеріалів “Маса-2, 3” АСІГМ “Карпати”, що свого часу успішно пройшла незалежну експертизу і була прийнята у фонди ОФАПг ЦГЕ МНП СРСР [21], наступна реалізація – у комп’ютерній системі “Complex.Gravity” [22]. Нова версія способу швидкого рішення прямих задач реалізована програмними компонентами до комп’ютеризованих систем інтерпретації геолого-геофізичних матеріалів. Компоненти написані мовою C++ Builder 6 і, хоча мають усі ознаки універсальності, поділені за властивостями задач: для дво- чи тривимірного випадку, для граві- чи магніторозвідки.

Автор вважає, що запропонований спосіб відповідає виділеному у роботах В.М. Страхова [5, 17] у якості пріоритетного принципу максимальної простоти та узагальненості.

1. Булах Е.Г., Коростиль Т.В. Метод простого моделирования при решении обратной задачи магнитометрии в классе двухмерных контактных поверхностей // Физика Земли. – 2002. – № 12. – С. 22–32.
2. Булах Е.Г., Маркова М.Н. Метод простого моделирования при решении задач гравиметрии в классе трехмерных контактных поверхностей // Геофиз. журн. – 2003. – 25, № 1. – С. 92–100.
3. Булах Е.Г., Маркова М.Н., Старостенко В.И. и др. Методическое руководство и сборник программ для решения прямых задач гравиразведки на ЭЦВМ “Минск-32” – К.: Наук. думка, 1971. – 92 с.
4. Голыздра Г.Я. Основные методы решения прямой задачи гравиразведки на ЭВМ // Обзор информ. Сер. Регион. разведка и промысл. геофизика. – М.: ВИЭМС, 1977. – 98 с.
5. Страхов В.Н. Аналогия аналитических выражений элементов гравитационного и магнитного полей двухмерных и трехмерных многоугольных тел и оптимальные вычислительные процессы решения прямых задач для этих тел // Теория и практика интерпретации гравитационных аномалий. – М.: Наука, 1982. – С. 59–137.
6. Пашко В.Ф., Старостенко В.И. Методы решения прямых и обратных задач гравиметрии и магнитометрии на ЭВМ (по материалам зарубежных публикаций) // Обзор информ. Сер. Регион. разведка и промысл. геофизика. – М.: ВИЭМС, 1982. – 93 с.
7. Страхов В.Н., Шулай Т.В. Решение прямых трехмерных задач гравиметрии и магнитометрии при произвольных непрерывных законах распределения плотности и намагниченности // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1983. – № 9. – С. 57–74.
8. Цирульский А.В., Никонова Ф.И., Фельдман С.И. Численное решение прямых задач гравиметрии // Обработка и интерпретация гравиразведки в сложных физико-геологических условиях. – 1986. – С. 14–33. – (Деп. ВИНТИ, Т 7229 – В86).

9. Булах Е.Г., Маркова М.Н., Михеева Т.Л. Решение прямых задач гравиразведки. Программное обеспечение и методические рекомендации / Ин-т геофизики АН Украины. – К., 1989. – 117 с. – (рус.) – (Деп. ВИНТИ, 11.08.89 № 5425 – В 89).
10. Старостенко В.И., Легостаева О.В. Прямая задача гравиметрии для неоднородной произвольно усеченной вертикальной прямоугольной призмы // Физика Земли. – 1998. – № 12. – С. 31–44.
11. Старостенко В.И. Гравитационное поле однородных  $n$ -угольных пластин и порожденных ими призм: обзор // Физика Земли. – 1998. – № 3. – С. 37–53.
12. Булах Е.Г., Коростиль Т.В. Прямые задачи гравиметрии в классе двухмерных контактных поверхностей. Программное обеспечение и методические рекомендации / Ин-т геофизики НАН Украины. – К., 2002. – 72 с. – (рус.) – (Деп. ГНТБ Украины, 17.06.02 № 92 – Ук2002).
13. Булах Е.Г., Коростиль Т.В. Прямые задачи магнитометрии в классе двухмерных контактных поверхностей. Программное обеспечение и методические рекомендации / Ин-т геофизики НАН Украины. – К., 2002. – 118 с. – (рус.) – (Деп. ГНТБ Украины, 17.06.02 № 91 – Ук2002).
14. Булах Е.Г., Михеева Т.Л. Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии в классе горизонтальных цилиндрических тел // Геоф. журн. – 2004. – № 5. – С. 23–38.
15. Страхов В.Н. Решение обратных задач гравиметрии без решения прямых // Новые теоретические, алгоритмические и технологические разработки в разведочной геофизике. – Препр. К., 2005. – С. 23–25.
16. Страхов В.Н. Основные направления развития теории интерпретации гравиметрических данных в начале XXI века // Геофиз. журн. – 2003. – № 3. – С. 3–8.
17. Страхов В.Н. Геофизика и математика // Основные проблемы теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий: Сб. науч. тр. – М.: ОИФЗ РАН, 1999. – С. 5–64.
18. Козлов Е.А., Годоненков Г.Н., Лернер Б.Л. и др. Цифровая обработка сейсмических данных. – М.: Недра, 1973 – 312 с.
19. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
20. Гладкий К.В. Гравиразведка и магниторазведка. – М.: Недра, 1967. – 320 с.
21. Комплекс программ решения обратной задачи гравиразведки в классе распределения плотности в площадном варианте “Масса-3” АСИГМ “Карпаты”/ Кобрунов А.И., Аникеев С.Г., Благый И.И. / ГОСФАП СССР №50870000812. – 1987.
22. Аникеев С.Г. Комп’ютерна система рішення прямих та обернених задач гравіроздак для 2D/3D моделей складнопобудованих середовищ // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – (Розвідувальна і промислова геологія). – 1997. – Вип. 34. – С. 57–63.

**О способе быстрого решения прямой задачи гравиразведки и магниторазведки с использованием конечно-элементных аппроксимаций С.Г. Аникеев**

**РЕЗЮМЕ.** Описан быстрый способ решения прямой задачи грави- и магниторазведки для сложных геологических моделей, аппроксимацией которых служит плотная упаковка большого числа ( $100 \cdot 10^6$  и более) малых однородных параллелепипедов. Эффективность способа решения прямой задачи обеспечена представлени-



ем ее в виде операции свертки с использованием дискретного преобразования Фурье. Явления, обусловленные аппроксимацией прямой задачи линейной сверткой и трансформацией линейной свертки в круговую, учтены структурными перестройками подинтегральных функций.

**Ключевые слова:** быстрое решение прямой 3D задачи гравиразведки и магнито-разведки, сложные модели, аппроксимация, плотная упаковка большого количества однородных параллелепипедов, дискретное преобразование Фурье, линейная и круговая свертка.

**About a way of the fast solution of a gravity and magnet direct with use finite-element approximations** S.G. Anikeyev

**SUMMARY.** The article represents the fast way of the solution of a gravity and magnetic directs for the complex geological models, which approximated is dense packing of the big number (can be  $100 \cdot 10^6$  and more) of small homogeneous parallelepipeds. The efficiency of the way of solution of a direct problem is provided by its representation in the form of operation of convolution with use of discrete transformation Fourier. The phenomena caused approximate of a direct problem by linear convolution and transform of linear convolution in circular convolution, are considered structural rebuilding of the integrand functions.

**Keywords:** the solution of a gravity and magnetic 3D directs, complex models, approximate, dense packing of the big number of homogeneous parallelepipeds, fast Fourier transform, linear convolution and circular convolution.