

УДК 550. 838: 518.5

© Т.Л. Михеева, 2011

*Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины,  
г. Киев*

## **МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ МАГНИТОАКТИВНЫХ ИСТОЧНИКОВ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ**

Приведены решения двумерных прямых и обратных задач магнитометрии, когда аномалиеобразующие массы состоят из фиксированного числа звездных тел. Каждое намагниченное тело имеет внешний контур самого общего положения. Акцентировано внимание на возможности использования этого решения для оценки местоположения намагниченных рудных тел и построения геологической модели, массы которой могут обусловить наблюдаемое поле.

**Ключевые слова:** магнитометрия, прямая и обратная задачи магнитометрии, намагниченное тело, автоматизированный подбор.

Современные методы обработки цифровой и графической информации существенно влияют на подходы и принципы решения конкретных геологических задач изучения глубинного строения земной коры посредством математического моделирования реальной геофизической среды, и поэтому разработка геологически эффективных и удобных для использования компьютерных технологий интерпретации гравиметрических и магнитометрических материалов для сложнопостроенных моделей среды до сих пор является важной и актуальной [1–3, 8–10, 12–15]. Каждая практическая задача находит свое решение в определенном модельном классе геологических объектов [4, 5, 8–13]. В настоящем исследовании рассматриваются некоторые особенности использования программного обеспечения для одного подкласса геологических объектов, который можно использовать при моделировании горизонтальных цилиндрических тел. Изучаемые неоднородности геологической среды аппроксимируются совокупностью цилиндрических тел с горизонтальными и параллельными между собой осями, сами тела могут быть как однородными, так и неоднородными по физическим параметрам. Такой способ параметризации вполне адекватен реальным условиям проведения интерпретации данных полевых геофизических наблюдений, поскольку измерения геопотенциальных

полей очень часто выполняются по профилям, расположенным вкрест простирания изучаемых структур и локальных объектов. Недостаток априорной информации о геологических объектах является необходимым условием проведения интерпретационных построений. Как правило, имеются некоторые сведения, полученные с помощью других геофизических методов или бурения вдоль интерпретируемого профиля, а изменения геометрических характеристик возмущающих объектов в плане изучены весьма слабо. Возникает необходимость работы с двумерными или “2,5-мерными моделями”, особенно на этапах региональных и поисковых работ. В данном модельном классе, по сравнению с трехмерными способами параметризации, легче и быстрее решаются прямые и обратные задачи грави- и магниторазведки. В выделенном классе геологических моделей вполне успешно используется метод подбора. Он базируется на аппроксимационном подходе к решению задач математической физики [3–8].

Выделим класс двумерных горизонтально расположенных цилиндрических тел – односвязных, ограниченных замкнутым контуром. Если для гравиметрии решения прямых задач в указанном классе достаточно хорошо разработаны, то для магнитометрии таких задач мало. По-видимому, аппроксимационная конструкция аномальных объектов, которая используется при этом, плохо приспособлена к решению обратных задач. Ввиду изложенного разработан специальный аппроксимационный подход. Теоретические основы такого подхода детально рассмотрены в работах [6, 7]. Широкий класс цилиндрических тел переходит в более узкий – класс звездных цилиндрических объектов. Оси цилиндров горизонтальны и параллельны между собой. Обычно подобные модели описываются своими вертикальными сечениями. Некоторые тела такого класса могут быть ограничены по простиранию. Они трехмерные, но не меняют конфигурации в вертикальных сечениях, которые проводятся вкрест осей цилиндров или простирания геологических объектов. В этом случае удастся ввести такую параметризацию модели, которая описывается небольшим числом параметров. Внешний контур каждого  $k$ -го тела можно представить положением последовательности точек, и геологическая модель описывается параметрами

$$P1 = \{jk; [(\xi, \zeta)_i, i = 1, 2, \dots, n_k]_k; k = 1, 2, \dots, jk\}.$$

Массы данного тела намагничены однородно. Требуется решить обратную задачу – найти параметры намагниченного тела. Аномальное поле задано таблично в  $n$  фиксированных точках земной поверхности:

$$Zn(x_i, z_i) = Zn(i); \quad Hn(x_i, z_i) = Hn(i), i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

$$Zn(x_i, z_i = \text{const}) = Zn(i); \quad Hn(x_i, z_i = \text{const}) = Hn(i), i = 1, 2, \dots, n.$$

Геологическая модель первого приближения определена параметрической записью. Каждое тело имеет точку – центр звездности. Эти точки в центральной системе координат представлены

$$jk; (a_k, b_k), k = 1, 2, \dots, jk. \quad (2)$$

В локальной системе координат внешний контур цилиндрического тела описывается радиусом-вектором относительно своего центра звездности. Запишем

$$R = R(\varphi) = R_0 + \sum_{j=1}^{mf} A_j \cos j\varphi + B_j \sin j\varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3)$$

Таким образом, внешний контур описан аналитической функцией. Модель представлена параметрами

$$P = [W1; W2]; \quad (4)$$

$$W1 = \{jk; (a_k; b_k), k = 1, 2, \dots, jk\};$$

$$W2 = \{[Ix, Iz]_k; [mF; R_0; A_j; B_j, j = 1, 2, \dots, mF]_k, k = 1, 2, \dots, jk\}.$$

Выделяется две группы параметров. В первой группе указано, что геологическая модель состоит из  $jk$  цилиндрических тел. Положение центров звездности определено в центральной системе координат. Вторая группа параметров характеризует каждое  $k$ -е тело. Записаны составляющие вектора интенсивности намагничения масс и те параметры, которые определяют положение внешнего контура цилиндрического тела. Сложность функции (3) зависит от параметра  $mF$ . Интерпретатор сам устанавливает численные значения этого параметра. На начальном этапе обычно интересно получить самое общее представление о модели и обычно полагают  $mF = 1$  или  $mF = 2$ . При повторном решении это число увеличивают. В точках, где была задана табличная функция (1), получено теоретическое магнитное поле. Оно обусловлено намагниченными массами модели. Имеем

$$Zt(x_i, z_i, P) = Zt(i, P); \quad Ht(x_i, z_i, P) = Ht(i, P), i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Здесь подчеркнuto, что теоретическое поле определено параметрами модели. Функции (1) и (5) сопоставляются между собой:

$$\begin{aligned} \Delta I_i &= Zn(x_i) - Zt(i, P), \\ \Delta Z_i &= Hn(x_i) - Ht(i, P). \end{aligned} \quad (6)$$

Далее от численных значений вектора  $P^{(0)}$  нужно перейти к вектору  $P^*$ , который минимизирует эти невязки. Так вектор  $P^*$  дает решение обратной задачи.

**Прямая задача.** Внешний контур тела в координатной плоскости  $XOZ$  выделяет односвязную область  $S$ . Она ограничена замкнутым контуром  $L$ . Массы, которые сосредоточены в этой области, намагничены и создают в точках внешнего пространства магнитное поле. Запишем потенциал этого поля:

$$\begin{aligned} U(x, z) &= \iint_S (I, \text{grad}V) ds = \iint_S (I_x V_x + I_z V_z) ds, \\ V &= 2 \ln \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}} = -\ln [(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]. \end{aligned}$$

Напряженность магнитного поля определяется

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \iint_S (I_x V_{xz} + I_z V_{zz}) ds, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \iint_S (I_x V_{xx} + I_z V_{xz}) ds.$$

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} Zt(x, z) &= 4 \iint_S I_x \frac{(\xi - x)(\zeta - z)}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} ds - 2 \iint_S I_z \frac{(\xi - x)^2 - (\zeta - z)^2}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} ds; \\ Ht(x, z) &= 2 \iint_S I_x \frac{(\xi - x)^2 - (\zeta - z)^2}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} ds + 4 \iint_S I_z \frac{(\xi - x)(\zeta - z)}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} ds. \end{aligned}$$

Перейдем от интеграла по площади к криволинейному интегралу. Запишем

$$T_z(x, z) = Z(x, z) = -2 \int_L I_x \frac{(\zeta - z) d\zeta}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} + 2 \int_L I_z \frac{(\xi - x) d\zeta}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}, \quad (7)$$

$$T_x(x, z) = H(x, z) = -2 \int_L I_x \frac{(\xi - x) d\zeta}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} - 2 \int_L I_z \frac{(\zeta - z) d\zeta}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}, \quad (8)$$

Внешний контур аппроксимирован формулой (3). Сделаем замену переменных:

$$\xi = R(\varphi) \cos \varphi; \quad \zeta = R(\varphi) \sin \varphi,$$

$$R(\varphi) = R_0 + \sum_{j=1}^{mf} A_j \cos j\varphi + B_j \sin j\varphi, \quad (9)$$

$$\frac{d\zeta}{d\varphi} = R \cos \varphi + \sin \varphi \sum_{j=1}^{mf} -A_j j \sin j\varphi + B_j j \cos j\varphi.$$

Формулы (7, 8) дают решение прямой задачи. Каждое слагаемое вычисляется в своей локальной системе координат. Она определена положением центра звездности  $(a_k; b_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, jk$ . Расчетная часть сведена к центральной системе координат. В работе [7] детально описан подход, позволяющий работать в точках центральной системы координат

**Обратная задача.** Пусть в фиксированных точках земной поверхности задано аномальное магнитное поле (рис. 1.):

$$Zn(x_i, z_i) = Zn(i); \quad Hn(x_i, z_i) = Hn(i), i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Если рельеф земной поверхности сложный, то могут возникнуть трудности в качественном анализе наблюдаемых данных. Аналитическая аппроксимация исходных данных позволяет определить аномальное поле в точках горизонтальной плоскости. Имеем

$$Zn(x_i, z_i = \text{const}) = Zn(i); \quad Hn(x_i, z_i = \text{const}) = Hn(i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

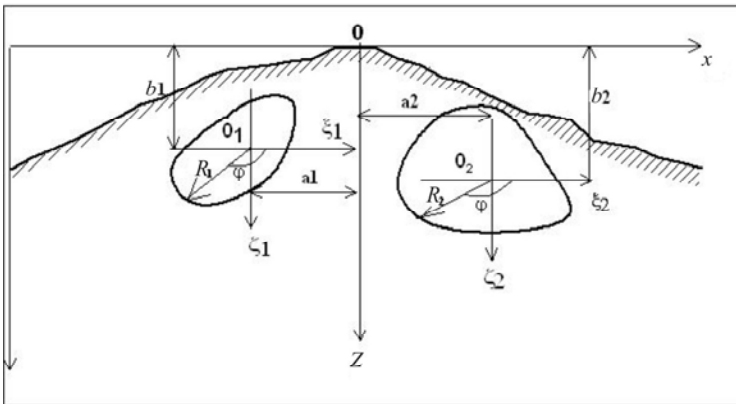


Рис. 1. Общая геологическая модель

Далее необходимо прогнозировать положение той модели, которая могла обусловить наблюдаемое поле. Обратимся к (4) и установим вектор  $P = P^{(0)}$ . Сопоставление полей произведено в метрике  $L_2$  с использованием функционалов

$$F_Z(P) = \sum_{i=1}^n [Zn(i) - Zt(i, P)]^2, \quad F_H(P) = \sum_{i=1}^n [Hn(i) - Ht(i, P)]^2. \quad (12)$$

Таким образом, обратная задача магнитометрии сведена к минимизации параметрического функционала. От вектора  $P^{(0)}$  итерационно переходим к вектору  $P^*$ , который минимизирует невязки сопоставляемых функций. Итерационная последовательность всегда сходится [3]. На рис. 2 представлена геологическая модель, поле которой мало отклоняется от исходного. Средняя невязка равна 7,6 нТл, представлены графики полей, которые обусловлены моделью начального приближения – вектор  $P^{(0)}$ , и моделью окончательного решения – вектор  $P^*$  [7].

Разработанная технология аппроксимации аномальных объектов контурами сложной конфигурации адаптирована также в программный комплекс моделирования потенциальных полей [4, 10, 16]. С учетом многофункциональности программного комплекса было решено большое количество модельных задач для разнообразных режимов работы программного обеспечения. Результаты выполненных экспериментов могут представлять определенный интерес для специалистов, занимающихся непосредственным моделированием гравитационных и магнитных полей.

На рис. 3, 4 представлены отдельные характерные результаты восстановления конфигурации источника по компоненте магнитного поля  $\Delta Z$ , а также приведены некоторые дополнительные данные, несущие следующую смысловую информацию:  $F2_0$  – значение среднеквадратического показателя приближения на нулевой итерации подбора;  $F2_n$  – то же, но на последней итерации подбора;  $R_0$  – начальные значения радиуса-вектора;  $A_i, B_i$  – начальные значения коэффициентов усеченного тригонометрического ряда;  $i = 1, \dots, 3$  – количество членов ряда;  $x_0, z_0$  – координаты центра тяжести тела. На рис. 3 показаны примеры восстановления контура тремя членами ряда при фиксированном значении постоянной составляющей радиуса-вектора  $R_0$ .

На рис. 3, а практически точно восстанавливается конфигурация источника, а следовательно, и все коэффициенты ряда. На рис. 4 приведен

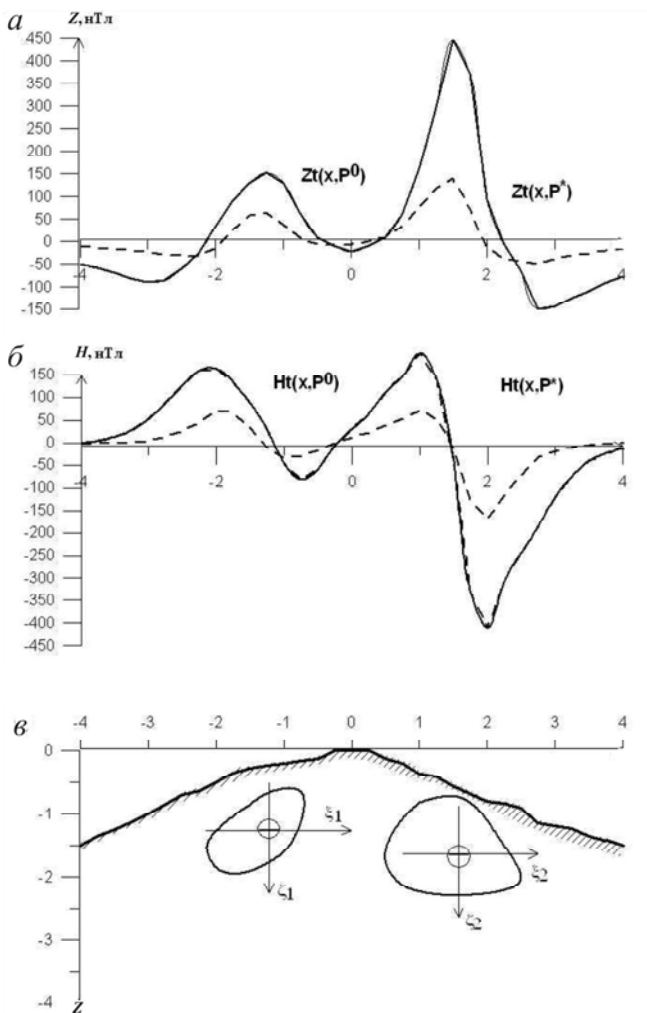


Рис. 2. Решение обратной задачи: а – по полю  $Zn(x_i, z_i)$ ; б – по полю  $Hn(x_i, z_i)$ ; в – схема рельефа земной поверхности и параметры подобранной модели

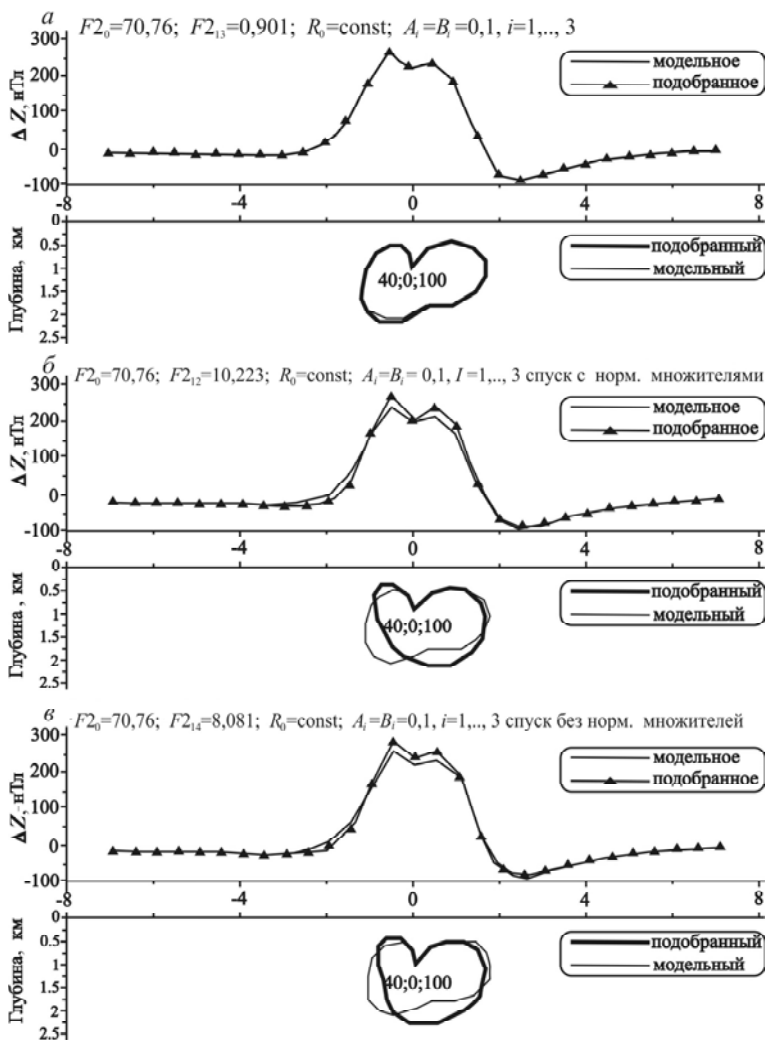


Рис. 3. Результаты автоматизированного подбора модельного источника сложной конфигурации по магнитному полю с различных начальных приближений



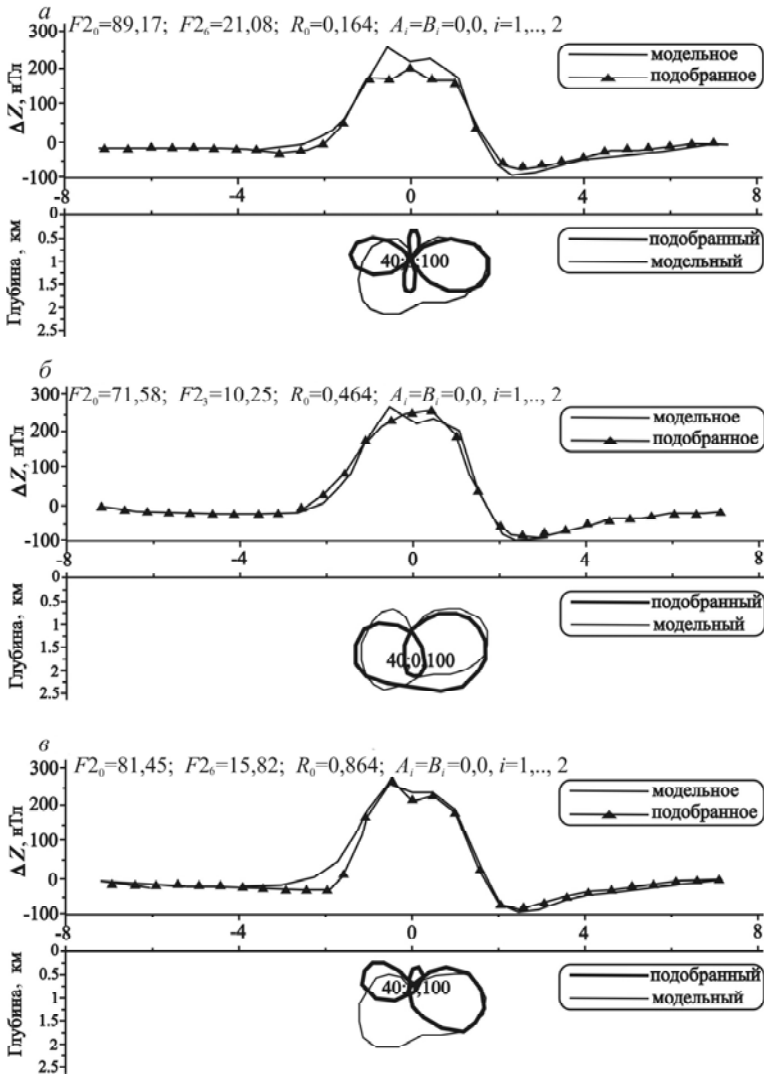


Рис. 4. Результаты неудачного подбора модельного источника сложной конфигурации по магнитному полю с различных начальных приближений

ден пример неудачного восстановления контура аномального тела путем подбора постоянной составляющей радиуса-вектора и двух членов ряда с различных начальных приближений. Решение задачи существенно зависит от выбора начального приближения. На примере показано, что неадекватный выбор начального приближения приводит к образованию петель в подборе конфигурации контура, аномальное поле удовлетворительно не восстанавливается. Для такого случая более целесообразна аппроксимация в классе круговых цилиндрических тел. Круговые цилиндры хорошо определяют положение центральной точки аномального тела. Такой подход детально описан в работе [6].

Используя опыт тестирования и опробования программного комплекса на модельных примерах, а также опыт практического применения, можно сформулировать ряд практических рекомендаций для получения с его помощью более эффективных и достоверных результатов. Численные расчеты показали, что даже для простых изолированных источников аномалий с относительно небольшим числом подбираемых геометрических и физических параметров целевая функция, на минимизации которой построены алгоритмы автоматизированного подбора, многоэкстремальна. Конечные результаты решения задач подбора в значительной мере определены выбором начального приближения, а также особенностями и режимами используемых в каждом конкретном случае алгоритмов минимизации. При моделировании структуры и физических параметров конкретных геологических объектов с большим числом определяемых параметров необходимо в первую очередь самым тщательным образом учитывать априорную информацию для формирования модели первого приближения, а также применять ограничения на компоненты радиуса-вектора. Поэтому в случае недостатка априорной информации для обоснованного выбора начального приближения можно исследовать и опробовать несколько альтернативных его вариантов.

Предложенная методика к решению задач геологической интерпретации магнитометрических данных использовалась при моделировании отдельных локальных магнитных аномалий, зарегистрированных в Черном море.

1. *Блох Ю.И.* Решение прямых задач гравиразведки и магниторазведки. – М.: Моск. гос. геологоразв. академия, 1993. – 79 с.
2. *Блох Ю.И.* Количественная интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. – М.: Моск. гос. геологоразв. академия, 1998. – 88 с.

3. Булах Е.Г. Автоматизированная система интерпретации гравитационных аномалий (метод минимизации). – Киев: Наук. думка, 1973. – 111 с.
4. Булах Е.Г., Зейгельман М.С., Корчагин И.Н. Автоматизированный подбор гравитационных и магнитных аномалий: программно-алгоритмическое обеспечение, методические рекомендации // Докл. АН УССР. Сер. Б. – 1986. – 235 с. – Деп. в ВИНТИ № 8363-В86.
5. Булах Е.Г. К вопросу о методе подбора при решении обратных задач гравиметрии и магнитометрии: Обзор // Физика Земли. – 2006. – № 2. – С. 72–77.
6. Булах Е.Г., Михеева Т.Л. Прямая и обратная задачи магнитометрии для совокупности горизонтально расположенных круговых цилиндрических тел // Геофизика. – 2009. – № 3. – С. 20–26.
7. Булах Е.Г., Михеева Т.Л. Прямая и обратная задачи магнитометрии для сложнопостроенных горизонтальных цилиндрических тел // Геофизика. – 2009. – № 5. – С. 26–32.
8. Долгаль А.С. Аппроксимация геопотенциальных полей эквивалентными источниками при решении практических задач // Геофиз. журн. – 1999. – 21, № 4. – С. 71–80.
9. Кобрунов А.И. Теоретические основы решения обратных задач геофизики. – Ухта: Ухтин. политехн. ин-т, 1995. – 228 с.
10. Кобрунов А.И. Теория интерпретации данных гравиметрии для сложнопостроенных сред. – Киев: УМК ВО, 1989. – 100 с.
11. Маловичко А.К. Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их применения к задачам гравиразведки. – М.: Гостоптехиздат, 1956. – 160 с.
12. Новиков П.С. О единственности решения обратной задачи теории потенциала // Докл. АН СССР. – 1938. – 18, № 13. – С. 165–168.
13. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии // Киев: Наук. думка, 1978. – 228 с.
14. Страхов В.Н. К теории метода подбора // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1964. – № 4. – С. 494–509.
15. Страхов В.Н. О проблеме параметризации в обратных задачах гравиметрии // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1978. – № 6. – С. 39–49.
16. Korchagin I.M., Yakymchuk N.A., Micheeva T.L. et al. Gravity and magnetic modeling of anomalous sources with complex configuration Geophysics in the Baltic region // Problems and prospects for the new millennium (Int. conf., Sept. 26–30, 2000). – Tallinn, Estonia, 2000. – P. 83–84.

### **Методика моделювання магнітоактивних джерел складної конфігурації** Т.Л. Міхеєва

**РЕЗЮМЕ.** Наведено розв’язок двовимірних прямих і обернених задач магнітометрії для фіксованого числа збуджувальних аномальних мас. Кожне намагнічене тіло має зовнішній контур загального положення. Приділено увагу можливості використання цього розв’язку для оцінки місцерозміщення намагнічених рудних тіл і побудови геологічної моделі, яка зумовлює спостережене поле.

**Ключові слова:** магнітометрія, пряма та обернена задачі, намагнічене тіло, автоматизований підбір.

**The method of magnetic modeling of anomalous sources with complex configuration** T.L. Mikheeva

**SUMMARY.** Decisions of two-dimensional direct and observe problems magnitometry when anomalies weights will consist of the fixed number of star bodies resulted. Each magnetized body has an external contour of the most general position. The attention to opportunities of using of this decision for an estimaton of a site of the magnetized ore bodies for designing geological model which mass can observed field is stressed.

**Keywords:** magnitometry, direct and inverse problems, magnetized body, automatic fitting.