УДК 550.831

П.А. Миненко

Криворожский государственный педагогический университет, Украина, г. Кривой Рог

МОДЕЛИ ПОГЛОЩЕНИЯ СОБСТВЕННОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ПЛАНЕТАМИ

Решены прямые и обратные задачи гравиметрии для двух моделей поглощения поля веществом планеты: с линейной и квадратичной зависимостью показателя экспоненты от плотности и радиуса планеты. Установлено, что параметры этого явления зависят от выбранной модели поглощения. В первой модели для каждой плотности, большей измеренной и вычисленной без учета поглощения поля, имеем одно значение коэффициента поглощения, которое растет с увеличением плотности планеты и уменьшается с увеличением ее радиуса. Во второй модели для каждой плотности планеты получено от одного до трех значений коэффициента, которые удовлетворяют значению силы тяжести на ее поверхности и различаются между собой более чем в 1000 раз.

Ключевые слова: гравиметрия, поглощение поля, прямая и обратная задачи.

Известны методы решения прямых и обратных задач гравиметрии (ПЗГ и ОЗГ) с учетом поглощения поля [2–4]. Основной недостаток этих методов состоит в том, что они разработаны для локальных поисково-разведочных моделей и для изучения поля планет малопригодны из-за расхождения гравитационного излучения с увеличением расстояния.

Цель настоящего сообщения – получить решения ПГЗ и ОЗГ для сферических моделей планет с учетом различных схем поглощения поля.

Поставленная цель достигается тем, что в известном методе решения ПЗГ [1] используют коэффициент поглощения [4] и еще более сложную схему поглощения, предложенную автором.

Решим прямую задачу гравитационного потенциала для сферы по методу, изложенному в работе [1] для Земли с однородной плотностью σ. Запишем выражение потенциала V для сферического слоя мощностью $R_{02} - R_{01}$ в точке, расположенной на расстоянии ρ_1 от центра Земли, с учетом коэффициента поглощения поля в виде $k_1 = \exp(-\mu\rho\sigma)$ при постоянных значениях σ и линейно-плотностного коэффициента (ЛПК) поглощения гравитационного поля μ:

$$V = 2\pi k \int_{R_{01}}^{R_{02}} \frac{RdR}{\mu\rho_1} \int_{\rho-R}^{\rho+R} e^{-\mu\rho\sigma} d(\mu\rho\sigma); \qquad (1)$$

где k – гравитационная постоянная; R – текущее расстояние от каждой точки масс внутри шара до его центра; ρ – радиус шара.

Проинтегрировав выражение потенциала (1) по $\mu\rho\sigma$ получим

$$V = 2\pi k e^{-\mu\rho\sigma} \int_{R_{01}}^{R_{02}} \frac{RdR}{\mu\rho_1(\mu\sigma)^2} (e^{\mu R\sigma} - e^{-\mu R\sigma}), \qquad (2)$$

где $\rho = R_{02} = R = \rho_1 - h$.

Положив $R_{01} = 0$, $h = 0$ и проинтегрировав (2) по R, запишем точное выражение:

$$V = \frac{2\pi k e^{-\mu\rho\sigma}}{\mu\rho_1(\mu\sigma)^2} (e^{\mu R\sigma}(\mu R\sigma - 1) + (\mu R\sigma + 1) e^{-\mu R\sigma}).$$

Из потенциала найдем выражение силы тяжести:

$$g = -\frac{dV}{d\rho_1} = \frac{2\pi k(\mu R\sigma + 1)}{\mu\rho_1^2(\mu\sigma)^2}((\mu R\sigma - 1) + (\mu R\sigma + 1)e^{-2\mu R\sigma}).$$

При $\rho_1 = \rho + h$; $h \to 0$; $\rho_1 \to \rho = R$; $u = \mu\sigma\rho$ окончательно получим:

$$g = \frac{2\pi k(u+1)}{\mu u^2}((u-1) + (u+1)e^{-2u}) = \frac{2\pi k}{\mu} E, \qquad (3)$$

где $E = E(u) = E(\mu\sigma\rho) = (u + 1)((u - 1) + (u + 1)e^{-2u})/u^2$.

Теперь решим ОЗГ, использовав решение прямой задачи (3). Положив $\beta = \mu\sigma$, запишем более удобное выражение

$$g = \frac{2\pi k\sigma}{\beta} E, \qquad (4)$$

где $E = E(u) = E(\beta\rho) = (u + 1)((u - 1) + (u + 1)e^{-2u})/u^2$.

Образуем уравнение для двух разных точек (g_i, ρ_i):

$$g_1 / g_2 = E(\beta\rho_1) / E(\beta\rho_2), \qquad (5)$$

решив его, получим значение линейного коэффициента (ЛК) поглощения поля по расстоянию $\beta = \mu\sigma$ для Земли с постоянной плотностью. Полный коэффициент (ПК) поглощения поля $k_1 = \exp(-\beta\rho)$ зависит от плотности тела и расстояния между точкой измерения поля и центром шара. Средняя плотность Земли также неизвестна, но может быть вычислена по формуле

$$\sigma = \frac{\beta / E(\beta\rho_i)}{2\pi k / g_i}. \qquad (6)$$

Вычисленную по нескольким точкам плотность (6) можно осреднить. Однако в отношение g_1/g_2 необходимо ввести поправки за сжатие Земли. Например, для двух точек, расположенных на полюсе и экваторе, из (5) получим уточненное уравнение

$$\delta g_{1p} g_{1p} / \delta g_{1e} g_{2e} = E(\beta\rho_{1p}) / E(\beta\rho_{2e}), \qquad (7)$$

где

$$\delta g_{1p} = (1 - \frac{\sigma_0}{\sigma}((\rho_{2e} / \rho_{1p})^2 - 1)); \qquad (8)$$

$$\delta g_{2e} = (1 + \frac{\sigma_0}{\sigma}(1 - \rho_{1p} / \rho_{2e})).$$

Поскольку в $E(\beta\rho_{1p})$ и $E(\beta\rho_{2e})$ коэффициенты β отличаются на 2–3 %, то следует решать уравнение (7) для нескольких точек и желательно по разным схемам, например:

$$\delta g_{1p} g_1 - \frac{2\pi k\sigma}{\beta} E(\beta\rho_{1p}) = 0; \ \ \delta g_{1e} g_2 - \frac{2\pi k\sigma}{\beta} E(\beta\rho_{2e}) = 0. \qquad (9)$$

Для оценки полученных решений необходимо также решить систему уравнений (9) без поправок (8) за сжатие Земли:

$$g_1 - \frac{2\pi k\sigma}{\beta} E(\beta\rho_{1p}) = 0; \ \ g_2 - \frac{2\pi k\sigma}{\beta} E(\beta\rho_{2e}) = 0. \qquad (10)$$

Некоторые результаты решения ОЗГ для планет земной группы, выполненные по схеме (9), приведены в табл. 1. Из нее следует, что для всех планет достигается равенство силы тяжести для модели без поглощения поля и для модели с поглощением поля при различной средней плотности планеты $\sigma > \sigma_0$, а при известной плотности σ_0 ЛПК поглощения поля равен нулю. Кроме того, оказалось, что при плотности, близ-

Таблица 1. Параметры поглощения гравитационного излучения веществом в планетах типа Земля и пр.

Планета	Плотность, кг/м^3		ЛК поглощения по расстоянию, $\beta = \mu\sigma$, 1/м	ЛПК поглощения, $\mu = \beta / \sigma$, м^2/кг	ПК поглощения на экваторе или полюсе, отн. ед.	Сила тяжести, м/с^2	
	без поглощения поля	с поглощением поля				на полюсе	на экваторе
Земля	5 517	6 130 6 896 7 881	1,83e–07 3,04e–07 4,30e–07	4,17e–11 6,16e–11 7,62e–11	0,5326 0,3582 0,2343	9,8322	9,8147
Сатурн	517	574 642	2,0e–09 10,8e–09	3,49e–12 16,7e–12	0,887 0,524	10,616	8,638
Юпитер 1 шар в модели 2 шара в модели	1370 полюс экватор полюс экватор полюс экватор	1 712 1 712 1522 1 522 1 522 1 522	11,36e–09 15,08e–09 5,35e–09 10,76e–09 4,72e–09 9,84e–09	6,63e–12 8,79e–12 3,515e–12 7,07e–12 3,1e–12 6,46e–12	0,4679 0,3400 0,7 0,4631 0,7293 0,4948	28,343	24,786
Марс	3950 полюс экватор полюс экватор	4 390 4 390 4 940 4 940	1,83e–07 1,93e–07 3,04e–07 3,12e–07	4,17e–11 4,40e–11 6,16e–11 6,32e–11	0,5392 0,5192 0,3581 0,3467	3,7618	3,7132
Луна	3 340	3 711	3,34e–07	9,0e–11	0,5597	1,6252	1,6232
Луна	3 340	4 175	5,58e–07	13,36e–11	0,3796	1,6252	1,6232
Венера	5 238	5 820	0,96e–07	1,654e–11	0,5584	8,875	8,865
Венера	5 238	6 548	1,60e–07	2,45e–11	0,379	8,875	8,865
Солнце	1 409	1452	4,42e–10	3,05e–13	0,733	274,0	274,0
Солнце	1409	1565	9,16e–10	5,85e–13	0,5257	274,0	274,0
Солнце	1409	2348	2,8e–09	1,192e–12	0,1403	274,0	274,0

кой к σ_0 решение ОЗГ сильно неустойчивое, так как вычисляемые промежуточные функции и их составляющие находятся в пределах компьютерной точности вычислений. Из уравнений (9), (10) следует вывод, что во всех случаях ЛПК возрастает с ростом средней плотности планеты и убывает с увеличением ее радиуса.

В табл. 1 приведено по несколько параметров поглощения (ЛПК, ЛК, ПК) для каждой планеты, Луны и Солнца. Для ряда планет разница значений ЛПК на экваторе и полюсе явно заметна. Но эта разница зависит от радиусов планеты на полюсе и экваторе, а поэтому невозможно установить в ней долю за счет поглощения собственного гравитационного поля собственным веществом планеты. Однако во всех случаях ЛПК и ЛК на экваторе больше, чем на полюсе. Таким образом, установлено, что в любой точке поверхности планеты фактически измеренное значение силы тяжести достигается эквивалентным набором трех параметров – средней плотности планеты, длины ее радиуса и ЛПК:

$$g_0(R) = f(\sigma_1, R, \mu_1) = f(\sigma_2, R, \mu_2) = ... = f(\sigma_i, R, \mu_i).$$

Изменяя плотность в большую сторону от средней плотности планеты при одном и том же ее радиусе, получаем ЛПК больше нуля. Приближая плотность к средней плотности планеты при том же радиусе, имеем сильно неустойчивое решение ОЗГ. Однако в пределе при $u = \mu\rho\sigma = 0$ т. е. при ЛПК $\mu = 0$, из выражения (3) находим известное выражение силы тяжести на поверхности сферы:

$$g_0 = \frac{4\pi k\sigma_0\rho^3}{3\rho^2}. \tag{11}$$

Приравняв (3) и (11) при различной плотности, получим

$$\frac{4\pi k\sigma_0\rho^3}{3\rho^2} = \frac{2\pi k\sigma\rho(u+1)}{u^3}((u-1)+(u+1)e^{-2u}). \tag{12}$$

После выполнения сокращений

$$\frac{\sigma_0 u^3}{3} = \frac{\sigma(u+1)}{2}((u-1)+(u+1)e^{-2u}). \tag{13}$$

В табл. 2 сведены ЛПК для планет с различным радиусом, но при одной и той же плотности, реализующей внешнее поле силы тяжести каждой планеты. Здесь явно видно, что с ростом плотности ЛПК увеличивается. На экваторе ЛПК всегда больше, чем на полюсе. Получено

Таблица 2. Параметры поглощения гравитационного излучения при одинаковой средней плотности в моделях планет

Планета и ее средняя плотность, кг/м^3	Плотность в модели, кг/м^3	ЛПК, м^2/кг на экваторе		ЛПК, м^2/кг на полюсе	
		1 шар	2 шара	1 шар	2 шара
Юпитер, 1370	6130	1,55e–11	1,47e–11	1,49e–11	1,416e–11
Земля, 5517	6130	1,661e–11	1,52e–11	1,616e–11	1,478e–11
Марс, 3940	6130	8,47e–11	7,97e–11	8,27e–11	7,77e–11
Юпитер, 1370	6900	1,56e–11	1,48e–11	1,50e–11	1,42e–11
Земля, 5517	6900	2,4e–11	2,23e–11	2,37e–11	2,20e–11
Марс, 3940	6900	9,12e–11	9,03e–11	8,53e–11	8,17e–11

также решение ПЗГ для модели совмещенных двух шаров различной плотности (формулы здесь не приведены). Решением обратной задачи установлено, что для одного однородного шара ЛПК всегда больше, чем для модели совмещенных двух шаров различной плотности, и с уменьшением радиуса планеты ЛПК увеличивается.

Из (13) при бесконечной плотности также получено предельное значение ЛПК для каждой планеты с параметрами (σ_0, ρ): $\mu_{\text{пред}} = 3/(2\rho\sigma_0)$, но с одной оговоркой – это касается только модели поглощения, описываемой формулой (1). Поэтому рассмотрим модель с учетом расхождения поля в сферическом теле. Например, из (1) при тех же обозначениях получим

$$V = 2\pi k\sigma \int\limits_{R_{01}}^{R_{02}} \frac{RdR}{\mu\rho_1} \int\limits_{\rho-R}^{\rho+R} e^{-\mu^2\rho^2} d(\mu\rho). \tag{14}$$

Точное решение ПЗГ для этой модели имеет вид

$$V_z = \frac{\pi k\sigma}{\mu}(\sqrt{\pi}(1-\frac{1}{4\mu^2\rho^2})\mathrm{erf}(2\mu\rho) + \frac{2}{\mu\rho}e^{-4\mu^2\rho^2}). \tag{15}$$

Данное выражение справедливо для шара с постоянной плотностью, но учитывает эффект расхождения гравитационного излучения с увеличением расстояния от центра сферы. Для переменной плотности и для сравнения поглощения поля на других планетах следует ввести множитель $\mu = \sigma\mu_o$. В табл. 3 приведены решения ОЗГ по модели (15) отдельно для полюса и экватора планет (без поправок за сфероидность):

$$V_z(2\mu_{op}\sigma\rho_p) = V_z(\sigma_o\rho_p); V_z(2\mu_{oe}\sigma\rho_e) = V_z(\sigma_o\rho_e). \tag{16}$$

Для сферических планет имеем одно решение: $\mu_o = \mu_{op} = \mu_{oe}$

Из табл. 3 следует, что для Земли, Марса и Венеры, кроме нулевого ЛПК, существует еще три ненулевых ЛПК, при которых по второй модели на поверхности планеты наблюдается одно и то же значение силы тяжести, равное тому, что имеем и измеряем без учета поглощения. Более того, для каждой плотности найдется соответствующие значения ЛПК, а для крупных планет, Солнца и Луны трех ЛПК для одной плотности пока не обнаружено. Существенной разницы между ЛПК на полюсе и экваторе Земли и других сфероидных планет нет.

Таблица 3. Текущие ЛПК для сфероидной Земли и планет

Планета	Для полюса		Для экватора		
	Радиус R_p, км g_p, м/с^2 Плотность σ, кг/м^3	ЛПК μ_{op} 10^{-12} м^2/кг	Радиус R_e, км g_e, м/с^2 Плотность σ, кг/м^3	ЛПК μ_{oe}, 10^{-12}м^2/кг	Отношение ЛПК μ_{oe} / μ_{op}
Земля	6356 9,8639 5517	0,1897 2,7296 28,440	6378 9,7979 5462	0,1925 2,724 28,636	1,015 0,998 1,007
Марс	3374 3,7618 3940	0,373 9,906 74,0	3396 3,7132 3862	0,3670 10,158 74,9	0,984 1,0254 1,012
Венера	6051,76 8,75 5239	0,428 1,46 31,851	6051,8 8,65 5234	0,433 1,45 31,853	1,012 0,99315 1,00006
Луна	1736,8 1,6252 σ = 3340 σ = 3711	198,0 – – 190,8	1738 1,6232 σ =3340 σ =3711	197,5 – – 191,3	0,997 – – 1,003
Сатурн	59776,4 10,6156 σ = 517 σ = 574	0,03797 – – 0,05	66268,0 8,6375 σ =300 σ =517	0,038004 – – 35,9	1,002
Юпитер	66856,46 28,3428 σ = 1327 σ = 1474 – –	0,01672 – – 0,0332 2,06 9,5675	71492 24,7865 σ =1020 σ =1206 – –	0,0166 – – 0,038 2,33 10,95	0,993 – – 1,145 1,131 1,144
Солнце	701580 274 1409	1,03895	701580 274,028 1565	1,139	1,096

Выводы.

1. Если принять гипотезу о существовании поглощения собственного гравитационного поля веществом планеты, то параметры этого явления зависят от используемой модели поглощения.
2. В первой модели для каждой плотности, большей измеренной и вычисленной без учета поглощения поля, имеем одно значение ЛПК, которое растет с увеличением плотности планеты и уменьшается с увеличением ее радиуса.
3. Во второй модели для каждой плотности планеты имеем от одного до трех значений ЛПК, удовлетворяющих значению силы тяжести на ее поверхности, однако строгой зависимости ЛПК от плотности и радиуса планеты уже нет, поскольку все три ЛПК различаются между собой более, чем в 1000 раз.

Перспектива дальнейших исследований. Следует искать более эффективные модели, позволяющие выделить параметр или процесс, который количественно оценивает интенсивность явления.

1. *Грушинский Н.П.* Теория фигуры Земли / Николай Пантелеймонович Грушинский. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
2. *Михайлов И.Н.* Возможности и проблемы гравиразведки / И.Н. Михайлов // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: 32-я сес. Междунар. науч. семинара им. Д.Г. Успенского, 29 янв. – 01 февр. 2005 г., г. Пермь: Тез. докл. – Пермь, 2005. – С. 189–192.
3. *Михайлов И.Н.* Гравитация и гравиразведка / И.Н. Михайлов // Геофизика. – 2005. – № 1. – С. 38–49.
4. *Мужикова А.В.* Практическая эквивалентность в методах подбора сеточными моделями / А.В. Мужикова, Е.Н. Мотрюк // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей : 35-я сес. Междунар. науч. семинара им. Д. Г. Успенского, 29 янв. – 03 февр. 2008 г., г. Ухта: Тез. докл. – Сыктывкар, 2007. – С. 218–221.

Моделі поглинання власного гравітаційного поля планетами П.О. Міненко

Розв'язано прямі й обернені задачі гравіметрії для двох моделей поглинання поля речовиною планети: із лінійною і квадратичною залежністю показника експоненти від густини та радіуса планети. Установлено, що параметри цього явища залежать від вибраної моделі поглинання. У першій моделі для кожної густини, більшої за виміряну й обчисленої без урахування поглинання поля, маємо одне значення коефіцієнта поглинання, що росте зі збільшенням густини планети й зменшується зі збільшенням її радіуса. У другій моделі для кожної густини планети отримано від одного до трьох значень коефіцієнта, що задовольняють значення сили тяжіння на її поверхні й відрізняються між собою більш ніж у 1000 разів.
Ключові слова: гравіметрія, поглинання поля, пряма та обернена задачі.

Models of absorption own gravitational field planets P.A. Minenko

Direct and return problems of the gravimetry for two models of absorption are solved weeding substance of a planet: with linear and square-law dependence of an indicator exhibitors from density and planet radius. It is established that parameters of this phenomenon depend on used model of absorption. In the first model for each density, more measured and calculated without field absorption, we have one value of factor of absorption which grows with increase in density of a planet and decreases with increase in its radius. In the second model for each density of a planet it is received from one factor to three values, satisfying to value of gravity on its surface and differ among themselves more, than in 1000 times.
Keyword: gravimetry, absorption, direct and return problem.

