УДК 519.21

І. К. Мацак (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ЛІЧИЛЬНОГО ПРОЦЕСУ У СХЕМІ МАКСИМУМУ

We establish the exact asymptotic behavior of the logarithm of counting process in the max-scheme.

Получена точная асимптотика логарифма считающего процесса в схеме максимума.

Розглянемо послідовність (ξ_n), $n \geq 1$, незалежних однаково розподілених випадкових величин (н. о. р. в. в.) з функцією розподілу $F(x) = \mathbf{P}(\xi_n < x)$. Нехай

$$z_n = \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i, \qquad N(t) = \min(n \geq 1 \colon z_n \geq t).$$

За аналогією з теорією відновлення процес $N(t)$ будемо називати лічильним процесом для послідовності (z_n). Неважко зрозуміти, що процес $N(t)$ має в кожній точці геометричний розподіл

$$\mathbf{P}\big(N(t) = k\big) = q(1-q)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad q = 1 - F(t).$$

Відомо, що він має незалежні прирости. Цей процес вивчався у роботах [1 – 3], де можна знайти деякі інші властивості лічильного процесу у схемі максимуму.

Досить повний огляд результатів та методів дослідження узагальнених лічильних процесів (чи узагальнених процесів відновлення) наведено у монографії [4].

У даній роботі встановлено одне твердження типу закону повторного логарифма (ЗПЛ) для лічильного процесу у схемі максимуму. Зрозуміло, що цей результат тісно пов'язаний із ЗПЛ для схеми максимуму.

ЗПЛ для сум незалежних випадкових величин (н. в. в.) Бернуллі вперше встановлений Хінчиним [5]. У подальшому ЗПЛ для сум довільних н. в. в. інтенсивно досліджувався (див., наприклад, [6]).

Для схеми максимуму ЗПЛ вивчався у роботах [7 – 11]. Наведемо один із основних результатів по цій тематиці (див. [9]).

Нехай F має додатну похідну $F'(x)$ для всіх достатньо великих x і функції $f(x)$ та $g(x)$ визначено рівностями

$$f(x) = \frac{1 - F(x)}{F'(x)}, \qquad g(x) = f(x) \ln\ln \left\{ \frac{1}{1 - F(x)} \right\}.$$

Якщо

$$\lim_{t \to \infty} g'(t) = 0, \tag{1}$$

то виконується наступний ЗПЛ для схеми максимуму: майже напевно (м. н.)

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n) \ln\ln n} = 1, \tag{2}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln n} = 0, \tag{3}$$

де

$$a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \qquad F^{-1}(y) = \inf\{x\colon F(x) \geq y\} \quad \text{— функція, обернена до} \quad F(x).$$

Покладемемо

$$R(x) = -\ln\big(1 - F(x)\big) \qquad \text{або} \qquad F(x) = 1 - \exp\big(-R(x)\big).$$

Нещодавно у роботі [11] при умові, що хоча б одна із функцій $f(x)$ та $h(x) = f\big(R^{-1}(x)\big)$ правильно змінюється, рівність (3) було посилено таким чином:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln\ln n} = -1. \tag{4}$$

Наша мета полягає в тому, щоб, ґрунтуючись на рівностях типу (2) – (4), дослідити асимптотичну поведінку лічильного процесу.

Сформулюємо основний результат даної роботи.

Теорема. *Нехай функція розподілу $F(x)$ є неперервною, строго монотонно зростаючою і для всіх $x \in \mathbb{R}$ $F(x) < 1$. Тоді м. н.*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln N(t) - R(t)}{\ln\ln R(t)} = 1, \tag{5}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\ln N(t) - R(t)}{\ln R(t)} = -1. \tag{6}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $F(x) = 1 - \exp(-x)$, $x > 0$. Для цього випадку рівності (5), (6) запишуться так: м. н.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln N(t) - t}{\ln\ln t} = 1, \tag{7}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\ln N(t) - t}{\ln t} = -1. \tag{8}$$

При доведенні рівностей (7), (8) нам знадобиться допоміжне твердження, встановлене в роботі [11].

Лема. *Нехай (ξ_i) — послідовність н. в. в. з функцією розподілу $F(x) = 1 - \exp(-x)$, $x > 0$. Тоді м. н.*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{z_n - \ln n}{\ln\ln n} = 1, \tag{9}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - \ln n}{\ln\ln\ln n} = -1. \tag{10}$$

Почнемо із доведення рівності (8). Вона буде встановлена, якщо покажемо, що для будь-якого досить малого $\epsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{t\to\infty}\frac{\ln N(t)-t}{\ln t}\le -1+\epsilon\right)=1, \tag{11}$$

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{t\to\infty}\frac{\ln N(t)-t}{\ln t}\le -1-\epsilon\right)=0. \tag{12}$$

Введемо позначення

$$\bigl\{g_1(t)\le g_2(t),\quad \text{н. ч. р.},\quad t\uparrow\infty\bigr\},$$

яке означає, що існує послідовність (t_n), $t_n\uparrow\infty$, для якої $g_1(t_n)\le g_2(t_n)\ \forall\ n\ge 1$.

Покладемо

$$A(c)=\left\{\frac{\ln N(t)-t}{\ln t}\le c,\ \text{ н. ч. р.},\ \ t\uparrow\infty\right\}.$$

Нехай $\delta>0$. Тоді

$$A(c-\delta)\subset\left\{\liminf_{t\to\infty}\frac{\ln N(t)-t}{\ln t}\le c\right\}\subset A(c+\delta).$$

Тому рівності (11), (12) виконуються для будь-якого $\epsilon>0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\mathbf{P}\bigl(A(-1+\epsilon)\bigr)=1\quad\forall\epsilon>0, \tag{13}$$

$$\mathbf{P}\bigl(A(-1-\epsilon)\bigr)=0\quad\forall\epsilon>0. \tag{14}$$

Зрозуміло, що

$$A(-1+\epsilon)=\bigl\{\ln N(t)\le t+(-1+\epsilon)\ln t,\ \text{н. ч. р.},\ t\uparrow\infty\bigr\}=$$

$$=\bigl\{N(t)\le\hat r(t),\ \text{н. ч. р.},\ t\uparrow\infty\bigr\},$$

де $\hat r(t)=\exp\bigl(t+(-1+\epsilon)\ln t\bigr)$.

Нехай $r=r(t)=\bigl[\hat r(t)\bigr]$ — ціла частина числа $\hat r(t)$. Оскільки

$$\bigl\{N(t)\le\hat r(t)\bigr\}=\bigl\{N(t)\le r(t)\bigr\},$$

а для цілого r

$$\bigl\{N(t)\le r\bigr\}=\{Z_r\ge t\},$$

то

$$A(-1+\epsilon)=\bigl\{N(t)\le r(t),\ \text{н. ч. р.},\ t\uparrow\infty\bigr\}=$$

$$=\bigl\{Z_{r(t)}\ge t,\ \text{н. ч. р.},\ t\uparrow\infty\bigr\}=$$

$$=\left\{\frac{Z_{r(t)}-\ln r(t)}{\ln\ln r(t)}\ge\frac{t-\ln r(t)}{\ln\ln r(t)},\ \text{н. ч. р.},\ t\uparrow\infty\right\}.$$

Неважко бачити, що при $t \to \infty$

$$\ln r(t) = t + (-1+\epsilon)\ln t + o(1),$$

$$\ln\ln r(t) = \ln t + o(1).$$

Тому

$$\frac{t - \ln r(t)}{\ln\ln r(t)} = 1 - \epsilon + o(1), \quad t \to \infty,$$

а отже,

$$A(-1+\epsilon) = \left\{ \frac{Z_{r(t)} - \ln r(t)}{\ln\ln r(t)} \geq 1 - \epsilon + o(1), \text{ н. ч. р., } t \uparrow \infty \right\}.$$

Якщо t змінюється від 1 до ∞, то $r(t)$ пробігає всі натуральні числа більші за 1. Звідси та з рівності (9) випливає (13).

Застосовуючи подібні міркування до події $A(-1-\epsilon)$, одержуємо

$$A(-1-\epsilon) = \left\{ \frac{Z_{r(t)} - \ln r(t)}{\ln\ln r(t)} \geq 1 + \epsilon + o(1), \text{ н. ч. р., } t \uparrow \infty \right\}.$$

Так само, як і вище, звідси та з (9) маємо рівність (14).

Перейдемо до доведення рівності (7). За аналогією з $A(c)$ введемо подію

$$B(c) = \left\{ \frac{\ln N(t) - t}{\ln\ln t} > c, \text{ н. ч. р., } t \uparrow \infty \right\}.$$

Тоді для $1 > \epsilon > 0$ маємо

$$B(1-\epsilon) = \left\{ N(t) > \hat{m}(t), \text{ н. ч. р., } t \uparrow \infty \right\},$$

де $\hat{m}(t) = \exp\big(t + (1-\epsilon)\ln\ln t\big)$.

Нехай $m = m(t) = \big[\hat{m}(t)\big]$. Далі, скориставшись рівностями

$$\big\{N(t) > \hat{m}(t)\big\} = \big\{N(t) > m(t)\big\}$$

та

$$\{N(t) > m\} = \{Z_m < t\},$$

запишемо подію $B(1-\epsilon)$ таким чином:

$$B(1-\epsilon) = \big\{N(t) > m(t), \text{ н. ч. р., } t \uparrow \infty\big\} =$$

$$= \{Z_{m(t)} < t, \text{ н. ч. р., } t \uparrow \infty\} =$$

$$= \left\{ \frac{Z_{m(t)} - \ln m(t)}{\ln\ln\ln m(t)} < \frac{t - \ln m(t)}{\ln\ln\ln m(t)}, \text{ н. ч. р., } t \uparrow \infty \right\}. \tag{15}$$

Оскільки при $t \to \infty$

$$\ln m(t) = t + (1-\epsilon)\ln\ln t + o(1),$$

$$\ln\ln\ln m(t) = \ln\ln t + o(1),$$

то

$$\frac{t - \ln m(t)}{\ln\ln\ln m(t)} = -1 + \epsilon + o(1).$$

Звідси та з рівностей (15) маємо

$$B(1-\epsilon) = \left\{ \frac{Z_{m(t)} - \ln m(t)}{\ln\ln\ln m(t)} < -1 + \epsilon + o(1),\ \text{н. ч. р.},\ t \uparrow \infty \right\}.$$

Із останнього зображення та співвідношення (10) отримуємо

$$\mathbf{P}\big(B(1-\epsilon)\big) = 1 \quad \forall \epsilon > 0,$$

а отже,

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln N(t) - t}{\ln\ln t} > 1 - \epsilon\right) = 1 \quad \forall\epsilon > 0. \tag{16}$$

Так само, ґрунтуючись на співвідношенні (10), доводимо рівності

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln N(t) - t}{\ln\ln t} > 1 + \epsilon\right) = \mathbf{P}\big(B(1+\epsilon)\big) = 0 \quad \forall\epsilon > 0. \tag{17}$$

Із (16), (17) одержуємо (7).

Перехід від рівностей (7), (8) до загального випадку зробити неважко. Дійсно, відомо (див., наприклад, [9]), що в умовах теореми 1 в. в. $\tau_i^e = R(\xi_i)$, $i \geq 1$, мають стандартний експоненціальний розподіл, $\mathbf{P}(\tau_i^e < x) = 1 - \exp(-x)$. Нехай

$$z_n^e = \max_{1\leq i\leq n} \tau_i^e, \qquad N^e(t) = \min(n \geq 1\colon z_n^e \geq t).$$

Тоді

$$N(t) = \min(n \geq 1\colon z_n \geq t) = \min\big(n \geq 1\colon R(z_n) \geq R(t)\big) =$$

$$= \min\big(n \geq 1\colon z_n^e \geq R(t)\big) = N^e\big(R(t)\big).$$

Звідси та з (7), (8) вже безпосередньо випливають рівності (5), (6).

Терему доведено.

1. *Resnick S. I.* Invers of extremal processes // Adv. Appl. Probab. – 1974. – **6**, № 2. – P. 392 – 406.
2. *Shorrock R. V.* On discrete time extremal processes // Adv. Appl. Probab. – 1974. – **6**, № 3. – P. 580 – 592.
3. *Resnick S. I.* Extreme values, regular variation and point processes. – Berlin: Springer, 1987. – 320 p.
4. *Булдигін В. В., Індлекофер К. Х., Клесов О. І., Штайнебах Й. Г.* Псевдорегулярні функції та узагальнені процеси відновлення. – Київ: ТВіМС, 2012. – 441 с.
5. *Khintchin A.* Uber einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Fund. math. – 1924. – **6**, № 1. – P. 9 – 12.
6. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
7. *Pickands J.* Sample sequences of maxima // Ann. Math. Statist. – 1967. – **38**, № 5. – P. 1570 – 1574.
8. *Pickands J.* An iterated logarithm law for the maximum in a stationary Gaussian sequence // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1969. – **12**, № 3. – S. 344 – 355.
9. *De Haan L., Hordijk A.* The rate of growth of sample maxima // Ann. Math. Statist. – 1972. – **43**. – P. 1185 – 1196.
10. *de Haan L., Ferreira A.* Extreme values theory: an introduction. – Berlin: Springer, 2006.
11. *Акбаш К. С., Мацак І. К.* Одне уточнення закону повторного логарифма для схеми максимуму // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1132 – 1137.

Одержано 22.11.12,
після доопрацювання — 18.03.13