УДК 512.745, 512.815.4, 519.114

Л. П. Бедратюк (Хмельниц. нац. ун-т)

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ТОТОЖНОСТІ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНІВ КРАВЧУКА

We introduce the notions of Kravchuk derivations of the polynomial algebra. It is proved that any element of the kernel of these derivations gives a polynomial identity satisfied by the Kravchuk polynomials. In addition, we prove that any kernel element of basic Weitzenbök derivations yields a polynomial identity satisfied by the Kravchuk polynomials. The corresponding intertwining maps are described.

Введены понятия дифференцирований Кравчука алгебры многочленов. Доказано, что произвольный элемент ядра такого дифференцирования определяет некоторое полиномиальное тождество для многочленов Кравчука. Также найдены в явном виде изоморфизмы, отображающие ядро базисного дифференцирования Вейтценбека в ядра дифференцирований Кравчука.

1. Вступ. У роботі [6] Михайло Кравчук увів систему ортогональних многочленів $\big\{K_n(x,a), n = 0, 1, \ldots\big\}$, які визначаються формулою

$$K_n(x,a) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{x}{i} \binom{a-x}{n-i}$$

і мають звичайну породжуючу функцію

$$\sum_{i=0}^{\infty} K_i(x,a) z^i = (1+z)^a \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^x .$$

Ці многочлени знайшли багато застосувань у різних областях математики і отримали назву (бінарних) многочленів Кравчука [2, 3].

Мета цієї роботи полягає в знаходженні поліноміальних тотожностей для цих многочленів, тобто тотожностей спеціального вигляду

$$P\big(K_0(x,a), K_1(x,a), \ldots, K_n(x,a)\big) = \varphi_1(a),$$

або

$$P\big(K_0(x,a), K_1(x,a), \ldots, K_n(x,a)\big) = \varphi_2(x),$$

де $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен від $(n+1)$-ї змінної, а $\varphi_1(a)$ та $\varphi_2(x)$ — деякі многочлени від однієї змінної. Ми пропонуємо загальний метод для знаходження таких тотожностей, який випливає із наступного простого спостереження: якщо частинна похідна по x дорівнює нулеві:

$$\frac{d}{dx} P\big(K_0(x,a), K_1(x,a), \ldots, K_n(x,a)\big) = 0,$$

то, очевидно, $P(K_0(x,a), K_1(x,a), \ldots, K_n(x,a))$ є функцією лише a, тобто є поліноміальною тотожністю. Аналогічно, якщо

$$\frac{d}{da} P\big(K_0(x,a), K_1(x,a), \ldots, K_n(x,a)\big) = 0,$$

то $P\big(K_0(x,a),\ldots,K_n(x,a)\big)$ є функцією лише однієї змінної x, тобто є поліноміальною тотожністю. З іншого боку, запишемо цю похідну у вигляді

$$\frac{d}{dx}P\big(K_0(x,a),K_1(x,a),\ldots,K_n(x,a)\big)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_0}P(x_0,x_1,\ldots,x_n)\Big|_{\{x_i=K_i(x,a)\}}\frac{d}{dx}K_0(x,a)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}P(x_0,\ldots,x_n)\Big|_{\{x_i=K_i(x,a)\}}\frac{d}{dx}K_n(x,a).$$

Припустимо, що ми виразили похідну $\dfrac{d}{dx}K_i(x,a)$ як многочлен від многочленів Кравчука, тобто нехай мають місце співвідношення $\dfrac{d}{dx}K_i(x,a)=f_i\big(K_0(x,a),\ldots,K_n(x,a)\big)$ для деякої системи многочленів $f_i(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{Q}[x_0,x_1,\ldots,x_n]$, $i=0,1,\ldots,n$. Тоді

$$\frac{d}{dx}P\big(K_0(x,a),K_1(x,a),\ldots,K_n(x,a)\big)=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_0}P(x_0,x_1,\ldots,x_n)\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}(x_0)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}P(x_0,x_1,\ldots,x_n)D_{\mathcal{K}_1}(x_n)\right)\Big|_{\{x_i=K_i(x,a)\}}=$$

$$=\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}\big(P(x_0,x_1,\ldots,x_n)\big)\Big|_{\{x_i=K_i(x,a)\}},$$

де диференціальний оператор $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}$ означено на $\mathbb{Q}[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ таким чином:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}(x_i):=f_i(x_0,x_1,\ldots,x_n),\quad i=0,1,\ldots,n.$$

Зрозуміло, що коли $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}\big(P(x_0,x_1,\ldots,x_n)\big)=0$, то виконується співвідношення

$$\frac{d}{dx}P\big(K_0(x,a),K_1(x,a),\ldots,K_n(x,a)\big)=0.$$

Тому довільний нетривіальний многочлен $P(x_0,x_1,\ldots,x_n)$, який належить ядру $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}$, тобто многочлен, для якого виконується рівність $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}\big(P(x_0,x_1,\ldots,x_n)\big)=0$, визначає поліноміальну тотожність вигляду $P\big(K_0(x,a),\ldots,K_n(x,a)\big)=\varphi_1(a)$ для деякого многочлена φ_1.

Аналогічно, припустимо, що

$$\frac{d}{da}K_i(x,a)=g_i\big(K_0(x,a),\ldots,K_n(x,a)\big),\quad g_i\in\mathbb{Q}[x_0,x_1,\ldots,x_n],$$

і визначимо диференціальний оператор $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}$ таким чином:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}(x_i):=g_i(x_0,x_1,\ldots,x_n),\quad i=0,1,\ldots,n.$$

Тоді довільний нетривіальний многочлен $P(x_0,x_1,\ldots,x_n)$, який належить ядру $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}$, визначає поліноміальну тотожність вигляду $P\big(K_0(x,a),\ldots,K_n(x,a)\big)=\varphi_2(x)$ для деякого многочлена φ_2.

Розглянемо приклад. Безпосередніми обчисленнями легко перевірити, що

$$\frac{d}{dx}K_0(x,a)=0, \qquad \frac{d}{da}K_0(x,a)=0,$$

$$\frac{d}{dx}K_1(x,a)=-2K_0(x,a), \qquad \frac{d}{da}K_1(x,a)=K_0(x,a),$$

$$\frac{d}{dx}K_2(x,a)=-2K_1(x,a), \qquad \frac{d}{da}K_2(x,a)=-\frac{1}{2}K_0(x,a)+K_1(x,a).$$

Тому для невеликих індексів визначимо диференціальні оператори $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}$ таким чином:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}(x_0)=0, \qquad \mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}(x_0)=0,$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}(x_1)=x_0, \qquad \mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}(x_1)=x_0,$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}(x_2)=x_1, \qquad \mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}(x_2)=-\frac{1}{2}x_0+x_1.$$

Розглянемо многочлен $P(x_0,x_1,x_2)={x_1}^2-2\,x_2x_0$. Маємо $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}\big(P(x_0,x_1,x_2)\big)=0$. Отже, вираз

$$K_1(x,a)^2-2\,K_2(x,a)K_0(x,a)$$

повинен бути функцією лише однієї змінної a. Підставляючи замість x_0, x_1, x_2 відповідно $K_0(x,a)$, $K_1(x,a)$, $K_2(x,a)$, після спрощення отримуємо

$$\varphi_1(a)=K_1(x,a)^2-2\,K_2(x,a)K_0(x,a)=a.$$

Аналогічно, легко перевірити, що многочлен $P(x_0,x_1,x_2)=x_0x_1-{x_1}^2+2\,x_2x_0$ належить ядру оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}$. Тому вираз $K_0(x,a)K_1(x,a)-K_1(x,a)^2+2\,K_2(x,a)K_0(x,a)$ залежить лише від змінної x. Справді, після спрощення маємо

$$\varphi_2(x)=K_0(x,a)K_1(x,a)-K_1(x,a)^2+2\,K_2(x,a)K_0(x,a)=$$

$$=-2\,x-(-2\,x+a)^2+4\,x^2-4\,ax+a^2=-2x.$$

Таким чином, деякий клас поліноміальних тотожностей для многочленів Кравчука можна отримати, використавши ядра диференціальних операторів $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}$ та $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}$. В загальній постановці задача знаходження ядер диференціювань є досить складною, але для деяких типів диференціювань отримано задовільні описи їхніх ядер, і ми використаємо ці результати для знаходження поліноміальних тотожностей для многочленів Кравчука.

Схожу задачу знаходження поліноміальних тотожностей для многочленів Аппеля і многочленів Фібоначчі та Люка розв'язано автором у роботах [4, 5]. Зокрема, доведено, що кожен нетривіальний елемент ядра диференціального оператора

$$\mathcal{D}=x_0\frac{\partial}{\partial x_1}+2x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+nx_{n-1}\frac{\partial}{\partial x_n}$$

визначає деяку поліноміальну тотожність для многочленів Аппеля. Нагадаємо, що многочлени $\big\{A_n(x)\big\}$ називаються многочленами Аппеля, якщо

$$A_n'(x) = nA_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Многочленами Аппеля, зокрема, є відомі многочлени Ейлера, Бернуллі та Ерміта. Диференціальний оператор $\mathcal{D}(x_i) = nx_{i-1}$, визначений на алгебрі раціональних многочленів $\mathbb{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, називається *базисним диференціюванням Вейтценбека*. Ядро цього диференціювання добре вивчено, воно ізоморфне до деякої алгебри SL_2-інваріантів.

З іншого боку, ядро базисного диференціювання Вейтценбека ізоморфне ядру кожного із диференціювань Кравчука $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}$ та $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}$. В роботі знайдено явний вигляд цих ізоморфізмів. Мультиплікативне лінійне відображення

$$\psi_{AK_1} : \mathbb{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

називається $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_{\mathcal{K}_1})$-переставним відображенням, якщо виконуються такі умови: $\psi_{AK_1}\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}\psi_{AK_1}$. Довільне таке відображення індукує ізоморфізм з $\ker \mathcal{D}$ до $\ker \mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}$.

Для прикладу дискримінант многочлена (від змінних X, Y)

$$x_0X^3 + 3\,x_1X^2Y + 3\,x_2XY^2 + x_3Y^3$$

дорівнює

$$\begin{vmatrix} x_0 & 3x_1 & 3x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_0 & 3x_1 & 3x_2 & x_3 \\ 3x_0 & 6x_1 & 3x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3x_0 & 6x_1 & 3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3x_0 & 6x_1 & 3x_2 \end{vmatrix} = 27(6\,x_0x_3x_2x_1 + 3\,{x_1}^2{x_2}^2 - 4\,{x_1}^3x_3 - 4\,{x_2}^3x_0 - {x_0}^2{x_3}^2)$$

і належить ядру оператора $\mathcal{D}$. Це відомий результат із класичної теорії інваріантів. Неважко перевірити, що лінійне відображення, визначене таким чином:

$$\psi_{AK_1}(x_0) = x_0, \qquad \psi_{AK_1}(x_1) = x_1,$$

$$\psi_{AK_1}(x_2) = 2x_2, \qquad \psi_{AK_1}(x_3) = -2\,x_1 + 6\,x_3,$$

комутує з операторами $\mathcal{D}$ та $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}$. Тому елемент

$$\begin{vmatrix} \psi_{AK_1}(x_0) & 3\psi_{AK_1}(x_1) & 3\psi_{AK_1}(x_2) & \psi_{AK_1}(x_3) & 0 \\ 0 & \psi_{AK_1}(x_0) & 3\psi_{AK_1}(x_1) & 3\psi_{AK_1}(x_2) & \psi_{AK_1}(x_3) \\ 3\psi_{AK_1}(x_0) & 6\psi_{AK_1}(x_1) & 3\psi_{AK_1}(x_2) & 0 & 0 \\ 0 & 3\psi_{AK_1}(x_0) & 6\psi_{AK_1}(x_1) & 3\psi_{AK_1}(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 3\psi_{AK_1}(x_0) & 6\psi_{AK_1}(x_1) & 3\psi_{AK_1}(x_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_0 & 3x_1 & 6x_2 & -2\,x_1 + 6\,x_3 & 0 \\ 0 & x_0 & 3x_1 & 6x_2 & -2\,x_1 + 6\,x_3 \\ 3x_0 & 6x_1 & 6x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3x_0 & 6x_1 & 6x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3x_0 & 6x_1 & 6x_2 \end{vmatrix}$$

належить ядру оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}$ і визначає таку тотожність для многочленів Кравчука:

$$\begin{vmatrix} K_0(x,a) & 3K_1(x,a) & 6K_2(x,a) & -2\,K_1(x,a)+6\,K_3(x,a) & 0 \\ 0 & K_0(x,a) & 3K_1(x,a) & 6K_2(x,a) & -2\,K_1(x,a)+6\,K_3(x,a) \\ 3K_0(x,a) & 6K_1(x,a) & 6K_2(x,a) & 0 & 0 \\ 0 & 3K_0(x,a) & 6K_1(x,a) & 6K_2(x,a) & 0 \\ 0 & 0 & 3K_0(x,a) & 6K_1(x,a) & 6K_2(x,a) \end{vmatrix} =$$

$$= 108a^3.$$

У статті ми застосовуємо методи теорії локально нільпотентних диференціювань для знаходження поліноміальних тотожностей для многочленів Кравчука.

У п. 2 наведено основні факти з теорії локально нільпотентних диференціювань, введено поняття першого та другого диференціювань Кравчука, описано їхні ядра та сформульовано дві гіпотези щодо поліноміальних тотожностей для многочленів Кравчука. У п. 3 з використанням комбінаторної техніки знайдено в явному вигляді $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_{\mathcal{K}_1})$-переставне відображення та $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_{\mathcal{K}_2})$-переставне відображення і доведено, що вони є ізоморфізмами відповідних ядер диференціювань.

2. Локально нільпотентні диференціювання та диференціювання Кравчука. Розглянемо алгебру раціональних многочленів $\mathbb{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ від $(n+1)$-ї змінної $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем раціональних чисел $\mathbb{Q}$. Нагадаємо, що *диференціюванням* алгебри $\mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ називається лінійне відображення в $\mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$, яке задовольняє правило Лейбніца:

$$D(f\,g) = D(f)g + fD(g) \quad \text{для всіх} \quad f, g \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

Диференціювання D називається *локально нільпотентним*, якщо для довільного $f \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ існує $\sigma(f) \in \mathbb{N}$ таке, що $D^{\sigma(f)}(f) = 0$. Довільне диференціювання D повністю визначено елементами $D(x_i)$. Диференціювання D називається *лінійним*, якщо $D(x_i)$ є лінійною формою. Лінійне локально нільпотентне диференціювання називається *диференціюванням Вейтценбека*. Диференціювання D називається *триангулярним*, якщо $D(x_i) \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_{i-1}]$. Будь-яке триангулярне диференціювання є локально нільпотентним.

Підалгебра

$$\ker D := \big\{ f \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] \mid D(f) = 0 \big\}$$

називається *ядром* диференціювання D.

Для довільного локально нільпотентного диференціювання D має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Припустимо, що існує многочлен h такий, що $D(h) \neq 0$, але $D^2(h) = 0$. Тоді*

$$\ker D = \mathbb{Q}\big[\sigma(x_0), \sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)\big]\big[D(h)^{-1}\big] \cap \mathbb{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_n],$$

де σ позначає відображення Діксм'є:

$$\sigma(x_i) = \sum_{k=0}^{\infty} D^k(x_i)\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \lambda = -\frac{h}{D(h)}, \qquad D(\lambda) = -1.$$

Доведення цього факту можна знайти в [9, с. 65].

Введемо два диференціювання, які відповідають частинним похідним многочленів Кравчука по змінних x та a. Звичайна породжуюча функція для многочленів Кравчука $\{K_n(x,a)\}$ має вигляд

$$\sum_{i=0}^{\infty} K_i(x,a) z^i = (1+z)^a \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^x.$$

Диференціюючи ліву і праву частини по змінній x, отримуємо звичайну породжуючу функцію для похідної $\dfrac{d}{dx}K_i(x,a)$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dx} K_i(x,a) z^i = (1+z)^a \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^x \ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} K_i(x,a) z^i\right) \ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right).$$

Враховуючи, що

$$\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \ln(1-z) - \ln(1+z) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{z^i}{i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{2i-1}\right) z^{2i-1} = -2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^i}{2i} z^i,$$

знаходимо

$$\frac{d}{dx} K_n(x,a) = [z^n] \left(\sum_{i=0}^{\infty} K_i(x,a) z^i\right) \left(-2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^i}{2i} z^i\right) =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} \frac{1-(-1)^i}{2i} K_{n-i}(x,a).$$

Тут $[z^n]$ позначає оператор взяття коефіцієнта при z^n.

У роботі [6] дано інше доведення цієї формули, а в роботі [7] наведено інший вираз для $\dfrac{d}{dx}K_n(x,a)$.

Диференціюючи породжуючу функцію для многочленів Кравчука по змінній a, отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{da} K_i(x,a) z^i = (1+z)^a \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^x \ln(1+z) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} K_i(x,a) z^i\right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{z^i}{i}\right).$$

Аналогічно, використовуючи співвідношення

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{da} K_i(x,a) z^i = \left(\sum_{i=0}^{\infty} K_i(x,a) z^i\right) \ln(1+z),$$

знаходимо явний вираз для похідної по a:

$$\frac{d}{da} K_n(x,a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+1+i}}{n-i} K_i(x,a).$$

Загальний вигляд виразів для $\dfrac{d}{dx}K_n(x,a)$ та $\dfrac{d}{da}K_n(x,a)$ мотивує наступне означення.

Означення 1. *Диференціювання $D_{\mathcal{K}_1}$ та $D_{\mathcal{K}_2}$ алгебри многочленів $\mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$, що визначені таким чином*:

$$D_{\mathcal{K}_1}(x_0) = 0, \qquad D_{\mathcal{K}}(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-(-1)^i}{2i}\, x_{n-i},$$

$$D_{\mathcal{K}_2}(x_0) = 0, \qquad D_{\mathcal{K}_2}(x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+1+i}}{n-i}\, x_i, \quad n = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

будемо називати першим та другим диференціюваннями Кравчука відповідно.

Маємо

$$D_{\mathcal{K}_1}(x_0) = 0, \qquad D_{\mathcal{K}_2}(x_0) = 0, \qquad D_{\mathcal{K}_1}(x_1) = x_0, \qquad D_{\mathcal{K}_2}(x_1) = x_0,$$

$$D_{\mathcal{K}_1}(x_2) = x_1, \qquad D_{\mathcal{K}_2}(x_2) = -\frac{1}{2}\, x_0 + x_1,$$

$$D_{\mathcal{K}_1}(x_3) = \frac{1}{3}\, x_0 + x_2, \qquad D_{\mathcal{K}_2}(x_3) = \frac{1}{3}\, x_0 - \frac{1}{2}\, x_1 + x_2,$$

$$D_{\mathcal{K}_1}(x_4) = \frac{1}{3}\, x_1 + x_3, \qquad D_{\mathcal{K}_2}(x_4) = -\frac{1}{4}\, x_0 + \frac{1}{3}\, x_1 - \frac{1}{2}\, x_2 + x_3,$$

$$D_{\mathcal{K}_1}(x_5) = \frac{1}{5}\, x_0 + \frac{1}{3}\, x_2 + x_4, \qquad D_{\mathcal{K}_2}(x_5) = \frac{1}{5}\, x_0 - \frac{1}{4}\, x_1 + \frac{1}{3}\, x_2 - \frac{1}{2}\, x_3 + x_4,$$

$$D_{\mathcal{K}_1}(x_6) = \frac{1}{5}\, x_1 + \frac{1}{3}\, x_3 + x_5, \qquad D_{\mathcal{K}_2}(x_6) = -\frac{1}{6}\, x_0 + \frac{1}{5}\, x_1 - \frac{1}{4}\, x_2 + \frac{1}{3}\, x_3 - \frac{1}{2}\, x_4 + x_5.$$

Визначимо підставний гомоморфізм $\varphi_{\mathcal{K}} \colon \mathbb{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{Q}[x]$ таким способом: $\varphi_{\mathcal{K}}(x_i) = K_i(x, a)$. Покладемо

$$\ker \varphi_{\mathcal{K}_1} := \Big\{ P(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_n] \mid \varphi_{\mathcal{K}}\big(P(x_0, x_1, \ldots, x_n)\big) \in \mathbb{Q}[a] \Big\},$$

$$\ker \varphi_{\mathcal{K}_2} := \Big\{ P(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_n] \mid \varphi_{\mathcal{K}}\big(P(x_0, x_1, \ldots, x_n)\big) \in \mathbb{Q}[x] \Big\}.$$

З означення зрозуміло, що довільний елемент з $\ker \varphi_{\mathcal{K}_1}$ та $\ker \varphi_{\mathcal{K}_2}$ визначає деяку поліноміальну тотожність. Покладемо

$$\ker \mathcal{D}_{\mathcal{K}_1} := \big\{ S \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_n] \mid \mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}(S) = 0 \big\},$$

$$\ker \mathcal{D}_{\mathcal{K}_2} := \big\{ S \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_n] \mid \mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}(S) = 0 \big\}.$$

Легко бачити, що $\varphi_{\mathcal{K}} \mathcal{D}_{\mathcal{K}_1} = \dfrac{d}{dx}\, \varphi_{\mathcal{K}}$ і $\varphi_{\mathcal{K}} \mathcal{D}_{\mathcal{K}_2} = \dfrac{d}{da}\, \varphi_{\mathcal{K}}$. Звідси випливає, що $\varphi_{\mathcal{K}}(\ker \mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}) \subset \ker \varphi_{\mathcal{K}_1}$ і $\varphi_{\mathcal{K}}(\ker \mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}) \subset \ker \varphi_{\mathcal{K}_2}$.

Отже, справедлива така теорема.

Теорема 2. *Нехай $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — деякий многочлен. Тоді*:

1) *якщо* $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}\big(P(x_0, x_1, \ldots, x_n)\big) = 0$, *то* $P\big(K_0(x, a), K_1(x, a), \ldots, K_n(x, a)\big) \in \mathbb{Q}[a]$;

2) *якщо* $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}\big(P(x_0,x_1,\ldots,x_n)\big)=0$, *то* $P\big(K_0(x,a),K_1(x,a),\ldots,K_n(x,a)\big)\in\mathbb{Q}[x]$.

Зауважимо, що $\varphi_{\mathcal{K}}(\ker\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1})\neq\ker\varphi_{\mathcal{K}}$ і $\varphi_{\mathcal{K}}(\ker\mathcal{D}_{\mathcal{K}_2})\neq\ker\varphi_{\mathcal{K}}$. Справді, маємо

$$\varphi_{\mathcal{K}}(x_3{x_1}^2-2\,x_2x_3x_0-x_1x_4x_0-3\,x_3{x_0}^2+5\,x_5{x_0}^2)=0,$$

але $x_3{x_1}^2-2\,x_2x_3x_0-x_1x_4x_0-3\,x_3{x_0}^2+5\,x_5{x_0}^2\notin\ker\mathcal{D}_{\mathcal{K}_{1,2}}$.

Очевидно, що обидва диференціювання Кравчука є триангулярними і тому вони локально нільпотентні. Тому для того, що знайти їхні ядра, можна скористатися теоремою 1.

Сконструюємо відображення Діксм'є для першого диференціювання Кравчука. Для цього спочатку отримаємо замкнений вираз для степенів $D^k_{\mathcal{K}_1}(x_n)$. Беручи до уваги співвідношення

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dx}K_i(x,a)z^i=\left(\sum_{i=0}^{\infty}K_i(x,a)z^i\right)\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right),$$

знаходимо

$$\sum_{i=k}^{\infty}\frac{d^k}{dx^k}K_i(x,a)z^i=\left(\sum_{i=0}^{\infty}K_i(x,a)z^i\right)\left(\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right)^k.$$

Використаємо відомий розклад

$$\left(\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right)^k=\sum_{i=k}^{\infty}S^{(k)}(i)z^i,$$

де

$$S^{(k)}(n)=\sum_{m=k}^{n}\binom{n-1}{m-1}\frac{2^m k!}{m!}s\,(m,k)$$

і $s(m,k)$ — числа Стірлінга першого роду. Тоді

$$\sum_{i=k}^{\infty}\frac{d^k}{dx^k}K_i(x,a)z^i=\sum_{n=k}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-k}K_i(x,a)S^{(k)}(n-i)\right)z^n.$$

Отже,

$$\mathcal{D}^k_{\mathcal{K}_1}(x_n)=\sum_{i=0}^{n-k}x_iS^{(k)}(n-i).$$

Тепер ми можемо знайти відображення Діксм'є:

$$\sigma(x_n)=\sum_{k=0}^{n}D^k_{\mathcal{K}_1}(x_n)\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}x_iS^{(k)}(n-i)=\sum_{i=0}^{n}x_i\sum_{k=0}^{n-i}\frac{\lambda^k}{k!}S^{(k)}(n-i).$$

Замінивши λ на $-\dfrac{x_1}{x_0}$, після спрощення отримаємо

$$\sigma(x_n)=\sum_{i=0}^{n}x_i\sum_{k=0}^{n-i}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^kS^{(k)}(n-i)=$$

$$= x_0 \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n + x_1 \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{n-1} + \sum_{i=0}^{1} x_i \sum_{k=0}^{n-i-1} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^k S^{(k)}(n-i) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} x_i \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^k S^{(k)}(n-i) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)!} \frac{x_1^n}{x_0^{n-1}} + \sum_{i=0}^{1} x_i \sum_{k=0}^{n-i-1} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^k S^{(k)}(n-i) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} x_i \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^k S^{(k)}(n-i).$$

Многочлени

$$C_n := n(n-2)! x_0^{n-1} \sigma(x_n) =$$

$$= (-1)^{n-1} x_1^n + n(n-2)! \sum_{i=0}^{1} x_i \sum_{k=0}^{n-i-1} \frac{(-1)^k}{k!} x_0^{n-1-k} x_1^k S^{(k)}(n-i) +$$

$$+ n(n-2)! \sum_{i=2}^{n} x_i \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k}{k!} x_0^{n-1-k} x_1^k S^{(k)}(n-i), \quad n > 1,$$

за побудовою належать ядру $\ker \mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}$. Назвемо їх *многочленами Келлі* локально нільпотентного диференціювання $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}$. Запишемо кілька перших многочленів Келлі:

$$C_2 = 2x_2x_0 - x_1^2,$$

$$C_3 = 3\,x_3{x_0}^2 - x_1{x_0}^2 - 3\,x_1x_0x_2 + {x_1}^3,$$

$$C_4 = 8\,x_4{x_0}^3 - 8\,x_1{x_0}^2x_3 + 4\,{x_1}^2x_0x_2 - {x_1}^4,$$

$$C_5 = 30\,x_5{x_0}^4 - 30\,x_1{x_0}^3x_4 - 10\,x_1{x_0}^3x_2 - 6\,x_1{x_0}^4 + 5\,{x_1}^3{x_0}^2 +$$

$$+ 15\,{x_1}^2{x_0}^2x_3 - 5\,{x_1}^3x_0x_2 + {x_1}^5,$$

$$C_6 = 144\,x_6{x_0}^5 + 8\,{x_1}^2{x_0}^4 - 48\,x_1{x_0}^4x_3 - 144\,x_1{x_0}^4x_5 + 48\,{x_1}^2{x_0}^3x_2 +$$

$$+ 72\,{x_1}^2{x_0}^3x_4 - 16\,{x_1}^4{x_0}^2 - -24\,{x_1}^3{x_0}^2x_3 + 6\,{x_1}^4x_0x_2 - {x_1}^6.$$

Із теореми 1 випливає таке твердження.

Теорема 3. *Має місце співвідношення*

$$\ker \mathcal{D}_{\mathcal{K}_1} = \mathbb{Q}[x_0, x_1, C_2, C_3, \ldots, C_n]\left[x_1^{-1}\right] \cap \mathbb{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

Отже, ми отримали опис ядра першого диференціювання Кравчука.

Для того щоб знайти тотожність для многочленів Кравчука, нам потрібно обчислити $\varphi_{\mathcal{K}}(C_n)$. Маємо

$$\varphi_{\mathcal{K}}(C_n) = \varphi_K(\sigma(x_n)) = \sum_{i=0}^{n} K_i \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k}{k!} K_1^k S^{(k)}(n-i).$$

За теоремою 2 права частина є функцією a. Безпосередніми обчисленнями знаходимо

$$\varphi_{\mathcal{K}}(C_2) = -a, \qquad \varphi_{\mathcal{K}}(C_3) = 0,$$

$$\varphi_{\mathcal{K}}(C_4) = a\,(a-2)\,, \qquad \varphi_{\mathcal{K}}(C_5) = 0,$$

$$\varphi_{\mathcal{K}}(C_6) = -3\,a\,(a-2)\,(a-4)\,.$$

Для загального випадку запропонуємо таку гіпотезу.

Гіпотеза 1. Для $n > 0$ має місце тотожність

$$\sum_{i=0}^{n} K_i(x,a) \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k}{k!} K_1(x,a)^k S^{(k)}(n-i) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ якщо } \quad n \quad \text{непарне}, \\ (-1)^m (2m-1)!!\, a(a-2)(a-4)\ldots\big(a-2(m-1)\big), \quad \text{якщо} \quad n = 2m, \end{cases}$$

де

$$S^{(k)}(n) = \sum_{m=k}^{n} \binom{n-1}{m-1} \frac{2^m k!}{m!} s\,(m,k)\,.$$

Аналогічно, для того щоб отримати замкнений вираз для степенів $D_{\mathcal{K}_2}^k(x_n)$ другого диференціювання Кравчука, використаємо відому експоненціальну породжуючу функцію для чисел Стірлінга першого роду $s(n,k)$:

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k) \frac{z^i}{n!} = \frac{\big(\ln(1+z)\big)^k}{k!}.$$

Маємо

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{d^k}{da^k} K_i(x,a) z^i = \left(\sum_{i=0}^{\infty} K_i(x,a) z^i \right) \big(\ln{(1+z)}\,\big)^k =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} K_i(x,a) z^i \right) \left(\sum_{i=k}^{\infty} \frac{k!}{n!} s(n,k) z^i \right) = \sum_{n=k}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-k} K_i(x,a) \frac{k!}{(n-i)!} s(n-i,k) \right) z^n.$$

Отже,

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}^k(x_n) = \sum_{i=0}^{n-k} x_i \frac{k!}{(n-i)!} s(n,k).$$

Оскільки $D_{\mathcal{K}_2}\left(-\dfrac{x_1}{x_0}\right)=-1$, покладемо $\lambda=-\dfrac{x_1}{x_0}$. Тепер ми можемо обчислити відображення Діксм'є:

$$\sigma(x_n)=\sum_{k=0}^{n}D^k_{\mathcal{K}_2}(x_n)\frac{\lambda^k}{k!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}x_i\frac{k!}{(n-i)!}\,s(n-i,k)=\sum_{i=0}^{n}x_i\sum_{k=0}^{n-i}\frac{\lambda^k}{(n-i)!}\,s(n-i,k).$$

Замінивши λ на $-\dfrac{x_1}{x_0}$, отримаємо

$$\sigma(x_n)=\sum_{i=0}^{n}x_i\sum_{k=0}^{n-i}\frac{(-1)^k}{(n-i)!}\frac{x_1^k}{x_0^k}\,s(n-i,k).$$

Перші кілька елементів мають вигляд

$$\sigma(x_2)=\frac{1}{2}\,\frac{x_1x_0-{x_1}^2+2\,x_2x_0}{x_0},$$

$$\sigma(x_3)=-\frac{1}{3}\,\frac{x_1{x_0}^2-{x_1}^3+3\,x_2x_1x_0-3\,x_3{x_0}^2}{{x_0}^2},$$

$$\sigma(x_4)=\frac{1}{8}\,\frac{2\,x_1{x_0}^3+{x_1}^2{x_0}^2-2\,{x_1}^3x_0-{x_1}^4+4\,x_2x_1{x_0}^2+4\,x_2{x_1}^2x_0-8\,x_3x_1{x_0}^2+8\,x_4{x_0}^3}{{x_0}^3}.$$

Застосувавши підставний гомоморфізм $\varphi_{\mathcal{K}}$, одержимо

$$\varphi_{\mathcal{K}}\big(\sigma(x_2)\big)=\frac{1}{2}\,\big(K_1(x,a)K_0(x,a)-K_1(x,a)^2+2\,K_2(x,a)K_0(x,a)\big)=-x,$$

$$\varphi_{\mathcal{K}}\big(\sigma(x_3)\big)=-\frac{1}{3}\,\Big(K_1(x,a)K_0(x,a)^2-K_1(x,a)^3+3\,K_2(x,a)K_1(x,a)K_0(x,a)-$$

$$-3\,K_3(x,a)K_0(x,a)^2\Big)=0,$$

$$\varphi_{\mathcal{K}}\big(\sigma(x_4)\big)=\frac{1}{8}\,\Big(2\,K_1(x,a)K_0(x,a)^3+K_1(x,a)^2K_0(x,a)^2-2\,K_1(x,a)^3K_0(x,a)-$$

$$-K_1(x,a)^4+4\,K_2(x,a)K_1(x,a)K_0(x,a)^2+4\,K_2(x,a)K_1(x,a)^2K_0(x,a)-$$

$$-8\,K_3(x,a)K_1(x,a)K_0(x,a)^2+8\,K_4(x,a)K_0(x,a)^3\Big)=\frac{1}{2}\,(x-1)\,x,$$

$$\varphi_{\mathcal{K}}\big(\sigma(x_5)\big)=0,\qquad \varphi_{\mathcal{K}}\big(\sigma(x_6)\big)=-\frac{1}{6}\,x\,(x-1)\,(x-2).$$

Для загального випадку ми пропонуємо наступну гіпотезу.

Гіпотеза 2.

$$\sum_{i=0}^{n} K_i(x,a) \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k}{(n-i)!} K_1(x,a)^k s(n-i,k) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \text{ непарне}, \\ (-1)^m \dbinom{x}{m}, & \text{якщо } n = 2\,m. \end{cases}$$

3. Переставні відображення для диференціювань Вейтценбека та Кравчука. Нагадаємо означення переставного відображення. Нехай $D_1,\ D_2$ — два диференціювання кільця $\mathbb{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ і ψ — лінійне відображення векторного простору $\mathbb{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, яке мультиплікативно діє на добуток многочленів:

$$\psi(f \cdot g) = \psi(f) \cdot \psi(g).$$

Означення 2. *Ендоморфізм ψ називається (D_1, D_2)-переставним відображенням, якщо виконується умова $\psi D_1 = D_2 \psi$.*

Довільне таке відображення індукує відображення з $\ker D_1$ в $\ker D_2$.

Спочатку знайдемо переставне відображення для першого диференціювання Кравчука. Нехай ψ_{DK_1} — деяке $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_{\mathcal{K}_1})$-переставне відображення. Будемо шукати його у вигляді

$$\psi_{DK_1}(x_0) = x_0, \qquad \psi_{DK_1}(x_n) = \sum_{i=1}^{n} T(n,i) x_i.$$

Після нескладних обчислень, задовольняючи умову $\psi_{DK_1}\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}\psi_{DK_1}$, знаходимо

$$\psi_{DK_1}(x_0) = x_0, \qquad \psi_{DK_1}(x_1) = x_1, \qquad \psi_{DK_1}(x_2) = 2x_2,$$

$$\psi_{DK_1}(x_3) = -2\,x_1 + 6\,x_3, \qquad \psi_{DK_1}(x_4) = -16\,x_2 + 24\,x_4,$$

$$\psi_{DK_1}(x_5) = 16\,x_1 - 120\,x_3 + 120\,x_5, \qquad \psi_{DK_1}(x_6) = 272\,x_2 - 960\,x_4 + 720\,x_6.$$

Отже, $T(0,0) = 1$, $T(1,1) = 0$, $T(2,1) = 0$, $T(2,2) = 2$.

Доведемо наступне твердження.

Теорема 4. *Числа $T(n,i)$ мають такий явний вигляд*:

$$T(n,i) = \sum_{j=i}^{n} (-1)^{j-i} 2^{n-j} j! S(n,j) \binom{j-1}{i-1},$$

де $S(n,j)$ — числа Стірлінга другого роду.

Доведення. Безпосередніми обчисленнями знаходимо $T(0,0) = 1$, $T(1,1) = 0$, $T(2,1) = 0$, $T(2,2) = 2$, тобто початкові умови виконуються. Легко перевірити, що справджується наступна загальна формула підсумовування:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{i} b_j c_{i-j} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \sum_{j=i+1}^{n} a_j b_{j-i}.$$

Застосувавши її, отримаємо

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}\big(\psi_{DK_1}(x_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} T(n,i)\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} T(n,i) \sum_{j=1}^{i} \frac{1-(-1)^j}{2j}\, x_{i-j} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} x_i \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1-(-1)^{j-i}}{2(j-i)} T(n,j).$$

З іншого боку,

$$D_{\mathcal{K}_1}\big(\psi_{DK_1}(x_n)\big) = \psi_{DK_1}\big(\mathcal{D}(x_n)\big) = n\psi_{DK_1}(x_{n-1}) = n\sum_{i=1}^{n-1} T(n-1,i)x_i.$$

Прирівнявши відповідні коефіцієнти, одержимо рекурентні співвідношення для чисел $T(n,i)$:

$$\sum_{j=i+1}^{n} \frac{1-(-1)^{j-i}}{2(j-i)} T(n,j) = nT(n-1,i), \quad i = 0,1,\ldots,n-1.$$

Для того щоб довести теорему, нам буде потрібна наступна важлива лема, яка має і самостійний комбінаторний інтерес.

Лема 1. *Припустимо, що числові послідовності a_n та $A(n,k)$, де $A(n,k) = 0$ при $k > n$, мають породжуючі функції*

$$\sum_{n=k}^{\infty} A(n,k)\frac{z^n}{n!} = \big(f(z)\big)^k, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^k = g(z),$$

причому виконується $g\big(f(z)\big) = z$.

Тоді

$$\sum_{j=i+1}^{n} a_{j-i}A(n,j) = \sum_{k=1}^{n-i} a_n A(n,k+i) = nA(n-1,i), \quad i = 0,1,\ldots,n-1.$$

Доведення. Домножимо ліву частину цієї рівності на $\dfrac{z^n}{n!}$ і підсумуємо по n від i до ∞ :

$$\sum_{n=i}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{n} a_{j-i}A(n,j)\frac{z^n}{n!} = \sum_{j=i+1}^{\infty} a_{j-i} \sum_{n=i}^{\infty} A(n,j)z^n = \sum_{j=i+1}^{\infty} a_{j-i}\big(f(z)\big)^j =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\big(f(z)\big)^{i+k} = \big(f(z)\big)^i \sum_{k=1} a_k\big(f(z)\big)^k = \big(f(z)\big)^i g\big(f(z)\big) =$$

$$= z\big(f(z)\big)^i = z\sum_{n=0}^{\infty} A(n,i)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} nA(n-1,i)\frac{z^n}{n!}.$$

Оскільки

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{n} a_{j-i}A(n,j)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{j-i}A(n,j)\right)\frac{z^n}{n!},$$

то, прирівнявши відповідні коефіцієнти, отримаємо тотожності

$$\sum_{j=i+1}^{n} a_{j-i} A(n,j) = \sum_{k=1}^{n-i} a_n A(n,k+i) = nA(n-1,i), \quad i = 0,1,\ldots,n-1,$$

що і завершує доведення.

Щоб скористатися доведеною лемою, потрібно знайти експоненціальну породжуючу функцію для чисел

$$T(n,i) = \sum_{j=i}^{n} (-1)^{j-i} 2^{n-j} j! S(n,j) \binom{j-1}{i-1}.$$

Домножимо ліву і праву частини на $\dfrac{z^n}{n!}$ і підсумуємо по n від i до ∞. Врахувавши, що

$$\sum_{n=i}^{\infty} S(n,j) \frac{(z)^n}{n!} = \frac{(e^z-1)^j}{j!},$$

будемо мати

$$\sum_{n=i}^{\infty} T(n,i) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=i}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} (-1)^{j-i} 2^{n-j} j! \binom{j-1}{i-1} S(n,j) \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(-1)^{j-i}}{2^j} j! \binom{j-1}{i-1} \sum_{n=i}^{\infty} S(n,j) \frac{(2z)^n}{n!} = \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(-1)^{j-i}}{2^j} \binom{j-1}{i-1} (e^{2z}-1)^j.$$

Використавши розклад

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{(-1)^{j-i}}{2^j} \binom{j-1}{i-1} z^j = \left(\frac{z}{z+2} \right)^i,$$

знайдемо

$$\sum_{n=i}^{\infty} T(n,i) \frac{z^n}{n!} = \left(\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} \right)^i.$$

Розглянемо послідовність

$$a_n = \frac{1-(-1)^n}{2n}.$$

Як неважко переконатися, звичайна породжуюча функція для цієї послідовності має вигляд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^k = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right).$$

Покладемо $f(z) = \dfrac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$. Легко бачити, що тоді $g\big(f(z)\big) = z$. Отже, згідно з лемою 1, числа $T(n,i)$ є розв'язками системи рекурентних рівнянь

$$\sum_{j=i+1}^{n} \frac{1-(-1)^{j-i}}{2(j-i)} T(n,j) = nT(n-1,i), \quad i=0,1,\ldots,n-1,$$

що і слід було довести.

Матриця відображення ψ_{DK_1}, очевидно, є верхньо-трикутною матрицею, на головній діагоналі якої знаходяться відмінні від нуля елементи $T(n,n)$. Тому ця матриця є невиродженою. Із комутаційного співвідношення $D_{\mathcal{K}_1}\psi_{DK_1} = \psi_{DK_1}\mathcal{D}$ випливає, що ψ_{DK_1} є ізоморфізмом алгебр $\ker \mathcal{D}$ та $\ker \mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}$.

Розглянемо тепер друге диференціювання Кравчука $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}$. Нехай ψ_{DK_2} є $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_{\mathcal{K}_2})$-переставним відображенням, яке будемо шукати у вигляді

$$\psi_{DK_2}(x_0) = x_0, \qquad \psi_{DK_2}(x_n) = \sum_{i=1}^{n} B(n,i)x_i, \quad n>0.$$

Безпосередніми обчисленнями знаходимо

$$\psi_{DK_2}(x_0) = x_0, \qquad \psi_{DK_2}(x_1) = x_1, \qquad \psi_{DK_2}(x_2) = x_1 + 2\,x_2,$$

$$\psi_{DK_2}(x_3) = x_1 + 6\,x_2 + 6\,x_3, \qquad \psi_{DK_2}(x_4) = x_1 + 14\,x_2 + 36\,x_3 + 24\,x_4,$$

$$\psi_{DK_2}(x_5) = x_1 + 30\,x_2 + 150\,x_3 + 240\,x_4 + 120\,x_5,$$

$$\psi_{DK_2}(x_6) = x_1 + 62\,x_2 + 540\,x_3 + 1560\,x_4 + 1800\,x_5 + 720\,x_6.$$

Отже, $B(1,1)=0$, $B(2,1)=1$, $B(2,2)=2$.

Доведемо наступне твердження.

Лема 2. *Числа $B(n,k)$ мають явний вигляд*

$$B(n,k) = k!\,S(n,k).$$

Доведення. Безпосередніми обчисленнями перевіряємо виконання початкових умов: $B(0,0) = 1$, $B(1,1)=0$, $B(2,1)=1$, $B(2,2)=2$. Використавши формулу підсумовування

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} b_{i,j}c_j = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \sum_{j=i+1}^{n} a_j b_{j,i},$$

отримаємо

$$D_{\mathcal{K}_2}\big(\psi_{DK_2}(x_n)\big) = D_{\mathcal{K}_2}\left(\sum_{i=1}^{n} B(n,i)x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} B(n,i) \sum_{i=0}^{i-1} \frac{(-1)^{i+1-j}}{i-j} x_j =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} x_i \sum_{j=i+1}^{n} \frac{(-1)^{j+1-i}}{j-i} B(n,j).$$

З іншого боку,

$$D_{\mathcal{K}_2}\big(\psi_{DK_2}(x_n)\big) = \psi_{DK_2}\big(\mathcal{D}(x_n)\big) = n\psi_{DK_2}(x_{n-1}) = n\sum_{i=1}^{n-1} B(n-1,i)x_i.$$

Прирівнявши відповідні коефіцієнти, переконаємося, що числа $B(n,k)$ задовольняють систему рекурентних рівнянь

$$\sum_{j=i+1}^{n} \frac{(-1)^{j+1-i}}{j-i} B(n,j) = nB(n-1,i), \quad i = 0,1,\ldots,n-1.$$

Для того щоб довести, що числа $B(n,k) = k!S(n,k)$ є розв'язками цієї системи, скористаємося лемою 1. У позначеннях цієї леми покладемо

$$a_i = \frac{(-1)^{i+1}}{i}, \qquad A(n,i) = B(n,i).$$

Тоді

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} z^n = \ln(1+z).$$

Також використаємо відому експоненціальну породжуючу функцію для чисел Стірлінга другого роду

$$\sum_{n=1}^{\infty} j!S(n,j)\frac{x^n}{n!} = (e^x - 1)^j.$$

Звідси випливає, що можна покласти $f(z) = e^x - 1$. Оскільки, як легко перевірити, виконується співвідношення $g\big(f(z)\big) = z$, то всі умови леми 1 виконано. Тому числа $B(n,i)$ є розв'язками системи рекурентних рівнянь

$$\sum_{j=i+1}^{n} \frac{(-1)^{j+1-i}}{j-i} B(n,j) = nB(n-1,i), \quad i = 0,1,\ldots,n-1.$$

Лему 2 доведено.

Аналогічно доводиться, що ψ_{DK_2} є ізоморфізмом алгебр $\ker\mathcal{D}$ та $\ker\mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}$.

Маючи явний вигляд переставних відображень, можемо співставити кожному елементу з ядра базисного диференціювання Вейтценбека $\mathcal{D}$ деяку тотожність для многочленів Кравчука. Список таких елементів ядра невеликих степенів наведено в роботі [4]. Наприклад, відомо, що визначник матриці Ганкеля

$$H_n := \det(x_{i+j-2}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1} & x_n & x_{n-1} & \cdots & x_{2n-1} \\ x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n} \end{vmatrix}$$

належить ядру диференціювання $\mathcal{D}$. Тоді визначники $\psi_{DK_1}(H_n)$ та $\psi_{DK_2}(H_n)$ належать ядрам диференціювань $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_1}$ та $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_2}$. Згідно з теоремою 2, застосувавши підстановочний гомоморфізм

$\varphi_{\mathcal{K}}(x_i) = K_i(x, a)$, отримаємо дві поліноміальні тотожності:

$$\varphi_{\mathcal{K}}\big(\psi_{DK_1}(H_n)\big) = \varphi_1(a), \qquad \varphi_{\mathcal{K}}\big(\psi_{DK_2}(H_n)\big) = \varphi_1(x).$$

Для функцій $\varphi_1(a), \varphi_2(x)$ ми формулюємо наступну гіпотезу щодо їхнього явного вигляду.

Гіпотеза 3.

$$\varphi_1(a) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=0}^{n-1} i! \prod_{i=0}^{n-2} (a+i)^{n-1-i},$$

$$\varphi_2(x) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=0}^{n} 2^i i! \prod_{i=0}^{n-2} (x-i)^{n-1-i}.$$

1. *Krawtchouk M.* Sur une generalisation des polynomes d'Hermite // C. r. Acad. sci. – 1929. – **189**, № 17. – P. 620 – 622.
2. *Nikiforov A. F., Suslov S. K., Uvarov V. B.* Classical orthogonal polynomials of a discrete variable. — Berlin: Springer-Verlag, 1991. – 374 p.
3. *Pryzva G. Y.* Kravchuk orthogonal polynomials // Ukr. Math. J. – 1992. – **44**, № 7. – P. 792 – 800.
4. *Bedratyuk L.* Semi-invariants of binary forms and identities for Bernoulli, Euler and Hermite polynomials // Acta arithm. – 2012. – **151**. – P. 361 – 376.
5. *Bedratyuk L.* Derivations and identities for Fibonacci and Lucas polynomials // Fibonacci Quart. – 2013. – **51**, № 4. – P. 351 – 366.
6. *Krasikov I., Litsyn S.* On integral zeros of Krawtchouk polynomials // J. Combin. Theory. Ser. A. – 1996. – **74**, № 1. – P. 71 – 99.
7. *Koepf W.* Identities for families of orthogonal polynomials and special functions // Integral Transform. Spec. Funct. – 1997. – **5**, № 1-2. – P. 69 – 102.
8. *Glenn O.* Treatise on theory of invariants. – Boston, 1915. – 312 p.
9. *Nowicki A.* Polynomial derivation and their ring of constants. – Torun: UMK, 1994. – 170 p.

Одержано 24.11.12