УДК 517.96

С. А. Плакса, Р. П. Пухтаевич (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КОНСТРУКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ТРЕХМЕРНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЕ С ОДНОМЕРНЫМ РАДИКАЛОМ

We present a constructive description of monogenic functions that take values in a three-dimensional commutative harmonic algebra with one-dimensional radical by using analytic functions of a complex variable. It is proved that monogenic functions have the Gâteaux derivatives of all orders.

Наведено конструктивний опис моногенних функцій, що набувають значень у тривимірній комутативній гармонічній алгебрі з одновимірним радикалом, за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної. Доведено, що моногенні функції мають похідні Гато усіх порядків.

Эффективность применения методов теории аналитических функций комплексной переменной к исследованию плоских потенциальных полей побуждает математиков к развитию аналогичных методов для пространственных полей.

В работах [1 – 7] рассмотрены некоторые коммутативные ассоциативные алгебры, в которых существуют тройки линейно независимых элементов, удовлетворяющие условиям

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=0, \qquad e_k^2\neq 0 \quad \text{при} \quad k=1,2,3\,. \tag{1}$$

Такие алгебры называют *гармоническими* (см. [1, 4, 6]).

В работе [1] показано, что каждая функция $\Phi(\zeta)$, представимая в виде ряда по степеням переменной $\zeta:=xe_1+ye_2+ze_3$ с действительными x,y,z, вследствие равенства (1) удовлетворяет равенствам

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi(\zeta)=\Phi''(\zeta)\,(e_1^2+e_2^2+e_3^2)=0 \tag{2}$$

(здесь $\Phi''(\zeta)$ — результат формального двойного дифференцирования упомянутого ряда), а следовательно, и трехмерному уравнению Лапласа.

В работе [2] развит метод формального конструирования решений трехмерного уравнения Лапласа с использованием степенных рядов в любой гармонической алгебре над полем комплексных чисел.

В работе [3] показано, что для каждой дважды дифференцируемой по Гато функции $\Phi(\zeta)$ выполняются равенства (2), в которых $\Phi''(\zeta)$ — производная Гато второго порядка, и доказано, что трехмерные гармонические алгебры с единицей существуют только над полем комплексных чисел. В работе [4] найдены все трехмерные гармонические алгебры с единицей, а в монографии [6] описаны все *гармонические* базисы $\{e_1,e_2,e_3\}$ в них, удовлетворяющие условиям (1).

В работе [7] рассмотрены моногенные (т. е. непрерывные и дифференцируемые по Гато функции) в одной из гармонических алгебр, а именно: в трехмерной гармонической алгебре $\mathbb{A}_3$ с двумерным радикалом. При этом, опираясь на разложение алгебры моногенных функций в прямую сумму алгебры главных продолжений аналитических функций комплексной переменной и алгебры моногенных функций, принимающих значения в максимальном идеале алгебры

$\mathbb{A}_3$ (см. также [8, 9]), получено конструктивное описание всех моногенных функций с помощью аналитических функций комплексной переменной и, как следствие, доказана бесконечная дифференцируемость по Гато всех моногенных функций.

Ниже рассматриваются моногенные функции в трехмерной гармонической алгебре $\mathbb{A}_2$ с одномерным радикалом, устанавливается их конструктивное описание с помощью аналитических функций комплексной переменной и бесконечная дифференцируемость по Гато. Отметим, что в отличие от случаев, изученных в работах [7 – 9], главные продолжения аналитических функций комплексной переменной, вообще говоря, не определены в той области, где рассматриваются заданные моногенные функции.

1. Предварительные сведения. Рассмотрим коммутативную ассоциативную алгебру $\mathbb{A}_2$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с базисом $\{I_1, I_2, \rho\}$, для элементов которого выполняются правила умножения:

$$I_1{}^2 = I_1, \quad I_2{}^2 = I_2, \quad I_1 I_2 = \rho^2 = I_1\rho = 0, \quad I_2\rho = \rho, \tag{3}$$

при этом единица алгебры представляется в виде $1 = I_1 + I_2$.

В теореме 1.8 из [6] показано, что в алгебре $\mathbb{A}_2$ гармоническими являются базисы $\{e_1, e_2, e_3\}$, разложения которых по базису $\{I_1, I_2, \rho\}$ имеют вид

$$\begin{aligned} e_1 &= I_1 + I_2, \\ e_2 &= n_1 I_1 + n_2 I_2 + n_3\rho, \\ e_3 &= m_1 I_1 + m_2 I_2 + m_3\rho, \end{aligned} \tag{4}$$

где n_k, m_k при $k = 1, 2, 3$ — комплексные числа, удовлетворяющие системе

$$\begin{aligned} &1 + n_1^2 + m_1^2 = 0, \\ &1 + n_2^2 + m_2^2 = 0, \\ &n_2 n_3 + m_2 m_3 = 0, \\ &m_3(n_2 - n_1) + n_3(m_1 - m_2) \neq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

и хотя бы одно из чисел в каждой из пар (n_1, n_2), (m_1, m_2) отлично от нуля. При этом умножением элементов гармонических базисов вида (4) на произвольные обратимые элементы алгебры могут быть получены все гармонические базисы в алгебре $\mathbb{A}_2$ (см. [6, с. 35]).

Алгебра $\mathbb{A}_2$ содержит два максимальных идеала $\mathfrak{I}_1 := \{\alpha_1 I_2 + \alpha_2\rho\colon \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{C}\}$, $\mathfrak{I}_2 :=$ $:= \{\beta_1 I_1 + \beta_2\rho\colon \beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{C}\}$, пересечением которых является одномерный радикал $\{\gamma\rho\colon \gamma \in$ $\in \mathbb{C}\}$.

Определим два линейных функционала $f_1\colon\ \mathbb{A}_2 \to \mathbb{C}$ и $f_2\colon\ \mathbb{A}_2 \to \mathbb{C}$, положив

$$f_1(I_1) = 1, \qquad f_1(I_2) = f_1(\rho) = 0 \tag{6}$$

и

$$f_2(I_2) = 1, \qquad f_2(I_1) = f_2(\rho) = 0. \tag{7}$$

Ядрами функционалов f_1 и f_2 являются соответственно максимальные идеалы $\mathfrak{I}_1$ и $\mathfrak{I}_2$, поэтому указанные функционалы являются непрерывными и мультипликативными (см. [10, с. 147]).

Выделим в алгебре $\mathbb{A}_2$ линейную оболочку $E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \colon x, y, z \in \mathbb{R}\}$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, порожденную векторами гармонического базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$. Области Ω трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ поставим в соответствие конгруэнтную область $\Omega_\zeta :=$ $:= \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \colon (x, y, z) \in \Omega\}$ в E_3. Всюду в дальнейшем $\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3$ и x, y, $z \in \mathbb{R}$.

Непрерывная функция $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ называется *моногенной* в области $\Omega_\zeta \subset E_3$, если Φ дифференцируема по Гато в каждой точке этой области, т. е. если для каждого $\zeta \in \Omega_\zeta$ существует элемент $\Phi'(\zeta)$ алгебры $\mathbb{A}_2$ такой, что выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\right) \varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \qquad \forall h \in E_3. \tag{8}$$

$\Phi'(\zeta)$ называется *производной Гато* функции Φ в точке ζ.

Рассмотрим разложение функции $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y, z)e_1 + U_2(x, y, z)e_2 + U_3(x, y, z)e_3\,. \tag{9}$$

В предположении, что функции $U_k \colon \Omega \to \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3$, являются дифференцируемыми в области Ω, т. е. во всех точках $(x, y, z) \in \Omega$ выполняются соотношения

$$U_k(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U_k(x, y, z) = \frac{\partial U_k(x, y, z)}{\partial x}\,\Delta x +$$

$$+\frac{\partial U_k(x, y, z)}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial U_k(x, y, z)}{\partial z}\,\Delta z + \, o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\,\right),$$

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \to 0,$$

в теореме 1.3 из [6] установлены необходимые и достаточные условия моногенности функции Φ (аналоги условий Коши – Римана), которые всюду в области Ω_ζ в свернутом виде выражаются равенствами

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,e_2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,e_3. \tag{10}$$

Ниже будет показано, что из моногенности функции $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ следует бесконечная дифференцируемость компонент U_1, U_2, U_3 разложения (9) в области Ω.

Из разложения резольвенты

$$(t - \zeta)^{-1} = \frac{1}{t - x - n_1 y - m_1 z}\,I_1 + \frac{1}{(t - x - n_2 y - m_2 z)}\,I_2 + \frac{y}{(t - x - n_2 y - m_2 z)^2}\,\rho, \tag{11}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{C} \colon t \neq x + n_1 y + m_1 z, \qquad t \neq x + n_2 y + m_2 z,$$

следует, что точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, соответствующие необратимым элементам $\zeta \in \mathbb{A}_2$, лежат на прямых

$$L_1 : x + y \operatorname{Re} n_1 + z \operatorname{Re} m_1 = 0, \qquad y \operatorname{Im} n_1 + z \operatorname{Im} m_1 = 0, \tag{12}$$

$$L_2 : x + y \operatorname{Re} n_2 + z \operatorname{Re} m_2 = 0, \qquad y \operatorname{Im} n_2 + z \operatorname{Im} m_2 = 0 \tag{13}$$

в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Прямые L_1 и L_2 имеют, по крайней мере, одну общую точку $(0,0,0)$, но могут и совпадать. Например, для гармонического базиса

$$e_1 = 1,$$

$$e_2 = i\sqrt{2}I_1 - i\sqrt{2}I_2 - i\rho,$$

$$e_3 = I_1 + I_2 + \sqrt{2}\rho$$

имеет место равенство $L_1 = L_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + z = 0, y = 0\}$.

2. Вспомогательные утверждения. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ называют *выпуклой в направлении прямой* L, если она содержит каждый отрезок, соединяющий две ее точки и параллельный прямой L.

Лемма 1. *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ является выпуклой в направлениях прямых L_1 и L_2, а функция $\Phi \colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ моногенна в области Ω_ζ. Если точки ζ_1, $\zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такие, что $\zeta_1 - \zeta_2 \in$ $\in \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \colon (x,y,z) \in L_1\}$, то*

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathfrak{I}_1. \tag{14}$$

Если же точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такие, что $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \colon (x,y,z) \in L_2\}$, то

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathfrak{I}_2. \tag{15}$$

Соотношение (14) доказывается по схеме доказательства леммы 1 работы [7], в котором вместо прямой L надо взять прямую L_1, а вместо функционала f нужно использовать функционал f_1. Аналогично доказывается соотношение (15) с заменой L_1 и f_1 соответственно на L_2 и f_2.

Пусть область Ω является выпуклой в направлениях прямых L_1 и L_2. Обозначим через D_1 и D_2 области в $\mathbb{C}$, на которые область Ω_ζ отображается соответственно функционалами f_1 и f_2.

Введем в рассмотрение линейный оператор A_1, который каждой моногенной функции $\Phi \colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ ставит в соответствие аналитическую функцию $F_1 \colon D_1 \to \mathbb{C}$ по формуле

$$F_1(\xi_1) := f_1(\Phi(\zeta)), \tag{16}$$

где $\xi_1 := f_1(\zeta) = x + n_1 y + m_1 z$ и $\zeta \in \Omega_\zeta$. Из леммы 1 следует, что значение $F_1(\xi_1)$ не зависит от выбора точки ζ, для которой $f_1(\zeta) = \xi_1$.

Введем также в рассмотрение линейный оператор A_2, который каждой моногенной функции $\Phi \colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ ставит в соответствие аналитическую функцию $F_2 \colon D_2 \to \mathbb{C}$ по формуле

$$F_2(\xi_2) := f_2(\Phi(\zeta)), \tag{17}$$

где $\xi_2 := f_2(\zeta) = x + n_2 y + m_2 z$ и $\zeta \in \Omega_\zeta$. Из леммы 1 следует также, что значения $F_2(\xi_2)$ не зависят от выбора точки ζ, для которой $f_2(\zeta) = \xi_2$.

В работах [7 – 9] в некоторых конкретных коммутативных алгебрах построены в явном виде подобно равенствам (16) и (17) операторы A, отображающие моногенные функции Φ со значениями в этих алгебрах на аналитические функции комплексной переменной. Далее, в указанных работах использованы главные продолжения аналитических функций комплексной переменной как *обобщенно обратные* к A операторы $A^{(-1)}$, удовлетворяющие равенству $AA^{(-1)}A = A$. При этом было установлено, что для каждой моногенной функции Φ значения моногенной функции $\Phi - A^{(-1)}A\Phi$ принадлежат некоторому максимальному идеалу $\mathfrak{I}$ заданной алгебры. Наконец, после описания всех моногенных функций со значениями в идеале $\mathfrak{I}$ в работах [7, 9] получены конструктивные описания всех моногенных функций Φ с помощью аналитических функций комплексной переменной.

Отметим, что главные продолжения аналитических функций комплексной переменной в определенную область линейной оболочки $E_3 \subset \mathbb{A}_2$ построены в явном виде в теореме 1.9 из [6]. Однако, операторы, обобщенно обратные к операторам A_1 и A_2, не могут быть заданы с помощью главных продолжений аналитических функций комплексной переменной, поскольку эти продолжения, вообще говоря, не определены в области Ω_ζ, где рассматриваются заданные моногенные функции $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$.

Перейдем к построению операторов, обобщенно обратных к операторам A_1 и A_2.

Введем в рассмотрение оператор B_1, который каждой аналитической функции $F_1\colon D_1 \to \mathbb{C}$ ставит в соответствие функцию $\Phi_1\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ по формуле

$$\Phi_1(\zeta) := F_1(\xi_1)I_1 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \qquad \xi_1 = f_1(\zeta), \tag{18}$$

и оператор B_2, который каждой аналитической функции $F_2\colon D_2 \to \mathbb{C}$ ставит в соответствие функцию $\Phi_2\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ вида

$$\Phi_2(\zeta) := F_2(\xi_2)I_2 + (n_3 y + m_3 z)F_2'(\xi_2)\rho \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \qquad \xi_2 = f_2(\zeta). \tag{19}$$

Лемма 2. *Пусть область Ω является выпуклой в направлениях прямых L_1 и L_2, а $F_1\colon D_1 \to \mathbb{C}$ и $F_2\colon D_2 \to \mathbb{C}$ — аналитические функции, заданные соответственно в областях D_1 и D_2. Тогда* (18) *и* (19) *— моногенные функции в области Ω_ζ.*

Доказательство. Покажем, что для функции (18) в области Ω_ζ выполняются условия (10), которые при $\Phi = \Phi_1$ с учетом соотношений (3), (4) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(\xi_1)}{\partial y} I_1 &= n_1 \frac{\partial F_1(\xi_1)}{\partial x} I_1\,, \\ \frac{\partial F_1(\xi_1)}{\partial z} I_1 &= m_1 \frac{\partial F_1(\xi_1)}{\partial x} I_1\,. \end{aligned} \tag{20}$$

С этой целью выделим действительную и мнимую части выражения

$$\xi_1 = (x + y\,\mathrm{Re}\, n_1 + z\,\mathrm{Re}\, m_1) + i(y\,\mathrm{Im}\, n_1 + z\,\mathrm{Im}\, m_1) := \tau_1 + i\eta_1 \tag{21}$$

и запишем систему (20) в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \tau_1}\,\mathrm{Re}\, n_1 + \frac{\partial F_1}{\partial \eta_1}\,\mathrm{Im}\, n_1\right) I_1 &= n_1 \frac{\partial F_1}{\partial \tau_1} I_1\,, \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial \tau_1}\,\mathrm{Re}\, m_1 + \frac{\partial F_1}{\partial \eta_1}\,\mathrm{Im}\, m_1\right) I_1 &= m_1 \frac{\partial F_1}{\partial \tau_1} I_1\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Теперь очевидно, что равенства (22) являются следствием классических условий Коши – Римана для аналитической функции $F_1\colon D_1 \to \mathbb{C}$, которые в свернутом виде выражаются равенством

$$\frac{\partial F_1}{\partial \eta_1} = i\frac{\partial F_1}{\partial \tau_1}\,.$$

Следовательно, функция (18) является моногенной в области Ω_ζ.

Покажем также, что для функции (19) в области Ω_ζ выполняются условия (10), которые при $\Phi = \Phi_2$ с учетом соотношений (3), (4) принимают вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial F_2(\xi_2)}{\partial y} I_2 + \left(n_3 F_2'(\xi_2) + (n_3 y + m_3 z)\frac{\partial F_2'(\xi_2)}{\partial y}\right)\rho = \\
= n_2 \frac{\partial F_2(\xi_2)}{\partial x} I_2 + \left(n_3 \frac{\partial F_2(\xi_2)}{\partial x} + n_2(n_3 y + m_3 z)\frac{\partial F_2'(\xi_2)}{\partial x}\right)\rho\,, \\
\frac{\partial F_2(\xi_2)}{\partial z} I_2 + \left(m_3 F_2'(\xi_2) + (n_3 y + m_3 z)\frac{\partial F_2'(\xi_2)}{\partial z}\right)\rho = \\
= m_2 \frac{\partial F_2(\xi_2)}{\partial x} I_2 + \left(m_3 \frac{\partial F_2(\xi_2)}{\partial x} + m_2(n_3 y + m_3 z)\frac{\partial F_2'(\xi_2)}{\partial x}\right)\rho\,.
\end{gathered} \tag{23}$$

Выделим действительную и мнимую части выражения

$$\xi_2 = (x + y\,\mathrm{Re}\,n_2 + z\,\mathrm{Re}\,m_2) + i(y\,\mathrm{Im}\,n_2 + z\,\mathrm{Im}\,m_2) := \tau_2 + i\eta_2 \tag{24}$$

и аналогично равенствам (20) установим, что следствием классических условий Коши – Римана

$$\frac{\partial F_2}{\partial \eta_2} = i\frac{\partial F_2}{\partial \tau_2}$$

для аналитической функции $F_2\colon D_2 \to \mathbb{C}$ являются равенства

$$\frac{\partial F_2(\xi_2)}{\partial y} = n_2\frac{\partial F_2(\xi_2)}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial F_2(\xi_2)}{\partial z} = m_2\frac{\partial F_2(\xi_2)}{\partial x}\,, \tag{25}$$

а также равенства

$$\frac{\partial F_2'(\xi_2)}{\partial y} = n_2\frac{\partial F_2'(\xi_2)}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial F_2'(\xi_2)}{\partial z} = m_2\frac{\partial F_2'(\xi_2)}{\partial x}\,. \tag{26}$$

Кроме того, справедливо тождество

$$F_2'(\xi_2) \equiv \frac{\partial F_2(\xi_2)}{\partial x}\,. \tag{27}$$

Теперь очевидным следствием соотношений (25) – (27) являются равенства (23). Таким образом, функция (19) является моногенной в области Ω_ζ.

Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что обобщенно обратные операторы к операторам A_1 и A_2 задаются соответственно равенствами $A_1^{(-1)} = B_1$ и $A_2^{(-1)} = B_2$.

Заметим, что главное продолжение функции $F\colon D \to \mathbb{C}$, аналитической в жордановой области $D \subset \mathbb{C}$, определено в области $\{\zeta \in E_3\colon f_1(\zeta) \in D, f_2(\zeta) \in D\}$ и представляется суммой (ср. с [6, с. 37]):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} F(t)\,(t-\zeta)^{-1}\,dt = (B_1F)(\zeta) + (B_2F)(\zeta)\,,$$

где замкнутая жорданова спрямляемая кривая Γ_ζ лежит в области D и охватывает точки $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$.

3. Конструктивное описание моногенных функций в алгебре $\mathbb{A}_2$. Справедлив следующий аналог теоремы 1 из [7] (см. также теорему 2.4 из [6]) для моногенных функций $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$.

Теорема 1. *Пусть область Ω является выпуклой в направлениях прямых L_1 и L_2. Тогда каждая моногенная в области Ω_ζ функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ представляется в виде*

$$\Phi(\zeta) = (B_1A_1\Phi)(\zeta) + \Phi_{10}(\zeta) = (B_2A_2\Phi)(\zeta) + \Phi_{20}(\zeta)\,,$$

где $\Phi_{10}\colon \Omega_\zeta \to \mathfrak{I}_1$ и $\Phi_{20}\colon \Omega_\zeta \to \mathfrak{I}_2$ — некоторые моногенные в области Ω_ζ функции, принимающие значения соответственно в идеалах $\mathfrak{I}_1$ и $\mathfrak{I}_2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi_{10} := \Phi - B_1A_1\Phi$, которая в силу леммы 2 является моногенной в области Ω_ζ. Учитывая равенства (16), (18) и (6), получаем

$$f_1(\Phi_{10}(\zeta)) = f_1(\Phi(\zeta)) - f_1(B_1A_1\Phi(\zeta)) = F_1(\xi) - F_1(\xi) = 0,$$

т. е. $\Phi_{10}(\zeta) \in \mathfrak{I}_1$.

Аналогично устанавливается, что функция $\Phi_{20} := \Phi - B_2A_2\Phi$ является моногенной в области Ω_ζ и $\Phi_{20}(\zeta) \in \mathfrak{I}_2$.

Теорема доказана.

В следующей теореме описаны все моногенные функции, принимающие значения в идеале $\mathfrak{I}_1$ алгебры $\mathbb{A}_2$, с помощью аналитических функций соответствующей комплексной переменной.

Теорема 2. *Пусть область Ω является выпуклой в направлении прямой L_2. Тогда каждая моногенная функция $\Phi_{10}\colon \Omega_\zeta \to \mathfrak{I}_1$ со значениями в идеале $\mathfrak{I}_1$ представляется в виде*

$$\Phi_{10}(\zeta) = F_{11}(\xi_2)\,I_2 + \big(F_{12}(\xi_2) + (n_3y + m_3z)F'_{11}(\xi_2)\big)\,\rho \tag{28}$$

$$\forall\,\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta,$$

где $F_{11}\colon D_2 \to \mathbb{C}$, $F_{12}\colon D_2 \to \mathbb{C}$ — некоторые аналитические в области D_2 функции и $\xi_2 := := x + n_2y + m_2z$.

Доказательство. Поскольку Φ_{10} принимает значения в идеале $\mathfrak{I}_1$, справедливо равенство

$$\Phi_{10}(\zeta) = V_1(x,y,z)\,I_2 + V_2(x,y,z)\,\rho\,, \tag{29}$$

где $V_k\colon \Omega \to \mathbb{C}$ при $k = 1, 2$.

Из моногенности функции Φ_{10} в области Ω_ζ следует существование частных производных $\dfrac{\partial \Phi_{10}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \Phi_{10}}{\partial y}$, $\dfrac{\partial \Phi_{10}}{\partial z}$, удовлетворяющих условиям (10) при $\Phi = \Phi_{10}$. Подставляя в них выражения (4), (29), а также учитывая однозначность разложения элементов алгебры $\mathbb{A}_2$ по базису $\{I_1, I_2, \rho\}$, получаем систему уравнений для нахождения функций V_1, V_2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial y} &= n_2 \frac{\partial V_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial V_2}{\partial y} &= n_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + n_3 \frac{\partial V_1}{\partial x}\,, \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} &= m_2 \frac{\partial V_1}{\partial x}\,, \\ \frac{\partial V_2}{\partial z} &= m_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + m_3 \frac{\partial V_1}{\partial x}\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Используя соотношение (24) и тот факт, что $\operatorname{Im} n_2$ и $\operatorname{Im} m_2$ одновременно не могут быть равными нулю для гармонического базиса (4), из первого и третьего уравнений системы (30) получаем равенство

$$\frac{\partial V_1}{\partial \eta_2} = i \frac{\partial V_2}{\partial \tau_2}. \tag{31}$$

Теперь так же, как и при доказательстве теоремы 2 из [7], с использованием теоремы 6 из [11] доказывается равенство $V_1(x_1, y_1, z_1) = V_1(x_2, y_2, z_2)$ для точек (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in \Omega$ таких, что отрезок, соединяющий эти точки, параллелен прямой L_2. Из указанного равенства и равенства (31) следует, что функция $V_1(x, y, z) := F_{11}(\xi_2)$, где F_{11} — произвольная аналитическая в области D_2 функция, является общим решением системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial y} - n_2 \frac{\partial V_1}{\partial x} &= 0\,, \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - m_2 \frac{\partial V_1}{\partial x} &= 0\,, \end{aligned} \tag{32}$$

состоящей из первого и третьего уравнений системы (30).

Далее, из второго и четвертого уравнений системы (30) для нахождения функции $V_2(x, y, z)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial y} - n_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} &= n_3 \frac{\partial F_{11}}{\partial x}\,, \\ \frac{\partial V_2}{\partial z} - m_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} &= m_3 \frac{\partial F_{11}}{\partial x}\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Ее частным решением является функция

$$v_2(x, y, z) := (n_3 y + m_3 z) F'_{11}(\xi_2)\,.$$

Следовательно, общее решение системы (33) представляется как сумма ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы, аналогичной системе (32), в виде

$$V_2(x,y,z) = F_{12}(\xi_2) + (n_3 y + m_3 z)F'_{11}(\xi_2),$$

где F_{12} — произвольная аналитическая в области D_2 функция.

Теорема доказана.

В следующей теореме описаны все моногенные функции, принимающие значения в идеале $\mathfrak{I}_2$ алгебры $\mathbb{A}_2$, с помощью аналитических функций соответствующей комплексной переменной.

Теорема 3. *Пусть область Ω является выпуклой в направлении прямых L_1 и L_2. Тогда каждая моногенная функция $\Phi_{20}\colon \Omega_\zeta \to \mathfrak{I}_2$ со значениями в идеале $\mathfrak{I}_2$ представляется в виде*

$$\Phi_{20}(\zeta) = F_{21}(\xi_1)\, I_1 + F_{22}(\xi_2)\rho \qquad \forall\, \zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta, \tag{34}$$

где $F_{21}\colon D_1 \to \mathbb{C}$, $F_{22}\colon D_2 \to \mathbb{C}$ — некоторые функции, аналитические соответственно в областях D_1, D_2, и $\xi_1 := x + n_1 y + m_1 z$, $\xi_2 := x + n_2 y + m_2 z$.

Доказательство. Функция Φ_{20}, принимающая значения в идеале $\mathfrak{I}_2$, представляется в виде

$$\Phi_{20}(\zeta) = W_1(x,y,z)\, I_1 + W_2(x,y,z)\, \rho\,, \tag{35}$$

где $W_k\colon \Omega \to \mathbb{C}$ при $k = 1, 2$.

Из моногенности функции Φ_{20} в области Ω_ζ следует существование частных производных $\dfrac{\partial \Phi_{20}}{\partial x}, \dfrac{\partial \Phi_{20}}{\partial y}, \dfrac{\partial \Phi_{20}}{\partial z}$, удовлетворяющих условиям (10) при $\Phi = \Phi_{20}$. Подставляя в них выражения (4), (35), а также учитывая однозначность разложения элементов алгебры $\mathbb{A}_2$ по базису $\{I_1, I_2, \rho\}$, получаем систему уравнений для нахождения функций W_1, W_2 :

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} = n_1 \frac{\partial W_1}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial W_2}{\partial y} = n_2 \frac{\partial W_2}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} = m_1 \frac{\partial W_1}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial W_2}{\partial z} = m_2 \frac{\partial W_2}{\partial x}\,.$$

Таким же способом, как при доказательстве теоремы 2 найдена функция V_1, получаем $W_2(x,y,z) := F_{22}(\xi_2)$, где F_{22} — произвольная аналитическая в области D_2 функция. Аналогично устанавливаем, что $W_1(x,y,z) := F_{21}(\xi_1)$, где F_{21} — произвольная аналитическая в области D_1 функция.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 и равенств (18), (19), (28), (34) следует, что в случае, когда область Ω является выпуклой в направлении прямых L_1 и L_2, каждая моногенная функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ представляется равенствами

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1) I_1 + F_{11}(\xi_2)\, I_2 + \Big(F_{12}(\xi_2) + (n_3 y + m_3 z) F'_{11}(\xi_2)\Big)\rho\,, \tag{36}$$

$$\Phi(\zeta) = F_{21}(\xi_1)\, I_1 + F_2(\xi_2) I_2 + \Big((n_3 y + m_3 z) F'_2(\xi_2) + F_{22}(\xi_2)\Big)\rho\,. \tag{37}$$

Из равенств (36), (37) и единственности разложения элементов алгебры $\mathbb{A}_2$ по базису $\{I_1, I_2, \rho\}$ следуют равенства

$$F_1(\xi_1) = F_{21}(\xi_1)\,,$$

$$F_2(\xi_2) = F_{11}(\xi_2)\,,$$

$$F_{12}(\xi_2) = F_{22}(\xi_2)\,.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть область Ω является выпуклой в направлении прямых L_1 и L_2. Тогда каждая моногенная функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ представляется в виде*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)\,I_1 + F_2(\xi_2)I_2 + \Big((n_3y + m_3z)F_2'(\xi_2) + F_0(\xi_2)\Big)\rho \tag{38}$$

$$\forall\,\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta\,,$$

где F_1 — некоторая аналитическая в области D_1 функция, F_0 и F_2 — некоторые аналитические в области D_2 функции, $\xi_1 := x + n_1y + m_1z$ и $\xi_2 := x + n_2y + m_2z$.

Отметим, что равенство (38) указывает способ явного построения любой из моногенных функций $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ с помощью трех соответствующих аналитических функций комплексной переменной.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из равенства (38), правая часть которого является моногенной функцией в области $\mathrm{X}_\zeta := \{\zeta \in E_3\colon f_1(\zeta) \in D_1,\;\; f_2(\zeta) \in D_2\}$.

Теорема 5. *Пусть область Ω является выпуклой в направлении прямых L_1 и L_2, а функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ моногенна в области Ω_ζ. Тогда Φ продолжается до функции, моногенной в области X_ζ.*

Принципиальным следствием равенства (38) является также следующее утверждение, справедливое для произвольной области Ω_ζ.

Теорема 6. *Пусть функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_2$ моногенна в области Ω_ζ. Тогда производные Гато всех порядков функции Φ являются моногенными функциями в области Ω_ζ.*

Доказательство. Поскольку шар Θ с центром в произвольной точке $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, целиком содержащийся в области Ω, является выпуклой областью, в окрестности $\Theta_\zeta :=$ $:= \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3\colon (x, y, z) \in \Theta\}$ точки $\zeta_0 = x_0e_1 + y_0e_2 + z_0e_3$ справедливо разложение (38), компоненты которого — бесконечно дифференцируемые функции в области Θ. Поэтому и компоненты U_1, U_2, U_3 разложения (9), являющиеся линейными комбинациями указанных компонент разложения (38), также являются бесконечно дифференцируемыми функциями в области Θ. Следовательно, производная Гато Φ', удовлетворяющая в Θ_ζ условиям вида (10), является моногенной функцией и производные Гато всех порядков функции Φ также являются моногенными функциями в Θ_ζ.

Теорема доказана.

В силу теоремы 6 и соотношений (1) выполняются равенства (2), т. е. произвольная моногенная в области Ω_ζ функция $\Phi(\zeta)$ удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа, а вещественные и мнимые части компонент U_1, U_2, U_3 разложения (9) образуют шестерку пространственных гармонических функций в области Ω.

1. *Ketchum P. W.* Analytic functions of hypercomplex variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – **30**, № 4. – P. 641 – 667.

2. *Kunz K. S.* Application of an algebraic technique to the solution of Laplace's equation in three dimensions // SIAM J. Appl. Math. – 1971. – **21**, № 3. – P. 425 – 441.
3. *Мельниченко И. П.* О представлении моногенными функциями гармонических отображений // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 5. – С. 606 – 613.
4. *Мельниченко И. П.* Алгебры функционально-инвариантных решений трехмерного уравнения Лапласа // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1284 – 1290.
5. *Плакса С. А.* Условия Коши – Римана для пространственных гармонических функций // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – С. 396 – 403.
6. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.
7. *Плакса С. А., Шпаковский В. С.* Конструктивное описание моногенных функций в гармонической алгебре третьего ранга // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 8. – С. 1078 – 1091.
8. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. III // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 228 – 243.
9. *Грищук С. В., Плакса С. А.* Моногенные функции в бигармонической алгебре // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 12. – С. 1587 – 1596.
10. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
11. *Толстов Г. П.* О криволинейном и повторном интеграле // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1950. – **35**. – С. 3 – 101.

Получено 28.03.12