

УДК 517.518.4

Н. М. Задерей (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ),

П. В. Задерей (Київ. нац. ун-т технологій та дизайну)

ПРО НЕРІВНІСТЬ ЛЕБЕГА НА КЛАСАХ $\bar{\psi}$ -ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

We consider deviations of Fourier sums of spaces $C^{\bar{\psi}}$ and estimates of these deviations are expressed by the best approximation $\bar{\psi}$ -derivative functions in the understanding of A. I. Stepanets are obtained. The sequence $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ are quasiconvex.

Рассматривается уклонение сумм Фурье на пространствах $C^{\bar{\psi}}$, причем полученные оценки таких уклонений выражены через наилучшие приближения $\bar{\psi}$ -производных функций в понимании А. И. Степанца. Последовательности $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ являются квазивыпуклыми.

Нехай L — простір 2π -періодичних інтегровних за Лебегом функцій $f(\cdot)$ з нормою $\|f\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$, а C — простір, який складається з неперервних функцій $f(\cdot)$ з нормою $\|f\|_C = \max_x |f(x)|$.

Введемо деякі позначення. Для $f \in L$ її ряд Фур’є має вигляд

$$S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x), \tag{1}$$

$S_n(f; x)$ — частинна сума порядку n ряду (1); $\rho_n(f; x) = f(x) - S_n(f; x)$;

$$E_n(f)_X = \inf_{t_n \in T_n} \|f(x) - t_n(x)\|_X \tag{2}$$

— найкраще наближення функції f тригонометричними поліномами $t_n(\cdot)$ з T_n , де T_n — множина тригонометричних поліномів порядку n , а X означає або простір L , або C .

А. Лебег [1] довів, що

$$\|\rho_n(f; x)\|_C \leq (L_n + 1)E_n(f)_C, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3}$$

де L_n — сталі Лебега, тобто норми оператора $S_n(f; x)$, що діє з простору C в C .

Оскільки, як відомо [2, с 112],

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \ln n + r_n \quad \forall n \in N, \quad |r_n| \leq 3,$$

то співвідношення (3) можна записати у вигляді (див. [1, 2])

$$\|\rho_n(f; x)\|_C \leq \left(\frac{4}{\pi^2} \ln n + R_n \right) E_n(f)_C, \quad |R_n| \leq 4. \tag{4}$$

Нерівність (4) є асимптотично точною (з константою $\frac{4}{\pi^2}$) на всьому просторі неперервних функцій C , але вона не є точною, навіть за порядком, на деяких підмножинах множини C .

К. І. Осколков [3] уточнив нерівність (4), показавши, що для будь-якої $f \in C$

$$\|\rho_n(f; x)\|_C \leq K \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} E_{n+k}(f)_C. \quad (5)$$

Тут і далі через K позначено абсолютні додатні сталі, можливо неоднакові в різних формулах. Крім того, в [3] встановлено наступне твердження.

Якщо $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}$, $k \in N$, — послідовність невід’ємних чисел, що монотонно прямує до нуля, і $C_\varepsilon := \{f \in C : E_n(f)_C \leq \varepsilon_n \forall n \in N\}$, то існують дві абсолютні сталі K_1 і K_2 такі, що

$$K_1 \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon_{n+k}}{k+1} \leq \sup_{f \in C_\varepsilon} \|\rho_n(f; x)\|_C \leq K_2 \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon_{n+k}}{k+1}. \quad (6)$$

Співвідношення (5) і (6) уточнюють за порядком нерівність (4).

О. І. Степанець (див. [4, 5], а також [6], розділ III, § 11) увів поняття $\bar{\psi}$ -похідних і на основі цього поняття визначив класи $C^{\bar{\psi}}C^0$ таким чином.

Нехай $f \in L$, а її ряд Фур’є має вигляд (1), $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, що задовольняє умову

$$\bar{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0 \quad \forall k \in N.$$

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} A_k(f; x) - \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \tilde{A}_k(f; x) \right),$$

де $\tilde{A}_k(f; x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$, є рядом Фур’є деякої функції $\varphi \in L$, то φ назвемо $\bar{\psi}$ -похідною функції f і будемо писати $\varphi(\cdot) = f^{\bar{\psi}}(\cdot)$. Підмножину неперервних функцій $f \in C$, які мають $\bar{\psi}$ -похідні, позначатимемо через $C^{\bar{\psi}}$.

Якщо $f \in C^{\bar{\psi}}$ і при цьому $f^{\bar{\psi}} \in C^0 = \left\{ \varphi \in C : \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = 0 \right\}$, то множину таких функцій позначимо через $C^{\bar{\psi}}C^0$.

Нагадаємо ще деякі позначення (див. [6]), які будуть необхідні у подальшому.

\mathfrak{M} означає множину опуклих донизу при $v \geq 1$ функцій $\psi(v)$, для яких $\lim_{v \rightarrow \infty} \psi(v) = 0$;

\mathfrak{M}_0 — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, що задовольняють умову $0 < \mu(\psi; t) := \frac{t}{\eta(t) - t} \leq K < \infty$, $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1} \left(\frac{1}{2} \psi(t) \right)$;

\mathfrak{M}' — підмножина функцій $\psi(\cdot) \in \mathfrak{M}$ таких, що

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt \leq K < \infty;$$

\mathfrak{L} — множина пар $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ така, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi_1(k) \cos kx + \psi_2(k) \sin kx)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\Psi(x)$.

О. І. Степанець (див. [7], а також [6], розділ V) встановив такий аналог нерівності Лебега (4).

Якщо $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, то для будь-якої функції $f \in C^{\bar{\psi}}C^0$ при довільному $n \in N$

$$\|\rho_n(f; x)\|_C \leq \left(\frac{4}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n + \frac{2}{\pi} \int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + O(1) \bar{\psi}(n) \right) E_n(f^{\bar{\psi}})_C,$$

де $O(1)$ – величина, рівномірно обмежена по $n \in N$ і по $f \in C^{\bar{\psi}}C^0$, $\bar{\psi}(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$.

Позначимо через $C^{\bar{\psi}}C^0_\varepsilon$ множину неперервних функцій $f(\cdot)$, $\bar{\psi}$ -похідні яких належать до $C^0_\varepsilon = C_\varepsilon \cap C^0$.

У даній роботі ми замінимо множину \mathfrak{M} більш широкою множиною, а саме, замість опуклості послідовностей ψ_i , $i = 1, 2$, будемо вимагати квазіопуклість. Слід зауважити, що подібний результат одержав Р. М. Тригуб у [12], де, зокрема, знайдено порядок спадання величини $\|\rho_n(f; x)\|_C$ на класах, що визначаються обмеженнями на (ψ, β) -похідні $\left(\psi_1(\cdot) = \psi(\cdot) \cos \beta \frac{\pi}{2}, \psi_2(\cdot) = \psi(\cdot) \sin \beta \frac{\pi}{2} \right)$, причому на функцію $\psi(\cdot)$ накладено умови значно слабші, ніж квазіопуклість.

Теорема 1. *Нехай*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_1(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_2(k) = 0, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \left(|\Delta^2 \psi_1(k-1)| + |\Delta^2 \psi_2(k-1)| \right) < \infty, \quad (8)$$

де $\Delta^2 \psi_i(k-1) = \psi_i(k-1) - 2\psi_i(k) + \psi_i(k+1)$, $i = 1, 2$. Тоді для будь-якої функції $f \in C^{\bar{\psi}}C^0$ при $n \in N$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} & \|\rho_n(f; x)\|_C \leq \\ & \leq \left(\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sqrt{\psi_1^2(n+k) + \psi_2^2(n+k)} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + \right. \\ & \left. + O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k (|\Delta^2 \psi_1(n+k-1)| + |\Delta^2 \psi_2(n+k-1)|) \right) E_n(f^{\bar{\psi}})_C, \end{aligned} \quad (9)$$

крім того,

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in C^{\bar{\psi}}C^0_\varepsilon} \|\rho_n(f; x)\|_C = \\ & = \left(\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sqrt{\psi_1^2(n+k) + \psi_2^2(n+k)} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + \right. \end{aligned}$$

$$+O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k \left(|\Delta^2 \psi_1(n+k-1)| + |\Delta^2 \psi_2(n+k-1)| \right) \varepsilon_n. \quad (10)$$

Доведення. Як відомо (див. [9, 10], [6], розділ I, § 8) з умов (7) і (8) випливає, що $\bar{\psi} \in \mathfrak{L}$. Тому для $f^{\bar{\psi}} \in C_0$ у кожній точці x виконується рівність (див. [6], розділ IV, § 1)

$$\rho_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}}(u) F_n(\bar{\psi}; x-u) du,$$

де $F_n(\bar{\psi}; t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\psi_1(k) \cos kx + \psi_2(k) \sin kx)$.

Крім того, для тригонометричного полінома $t_n^* \in T_n$ найкращого наближення функції $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$ справджується співвідношення

$$\rho_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^{\bar{\psi}}(u) - t_n^*) F_n(\bar{\psi}; x-u) du,$$

а отже,

$$\|\rho_n(f; x)\|_C \leq E_n(f^{\bar{\psi}})_C \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_n(\bar{\psi}; t)| dt.$$

Поклавши $a_k = b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, $a_k = \psi_1(k)$, $b_k = \psi_2(k)$, $k = n+1, n+2, \dots$, і використавши асимптотичну формулу, одержану С. О. Теляковським (див. [11], формула (3.76)), в якій покладено $m = n$, знайдемо

$$\begin{aligned} \|\rho_n(f; x)\|_C &\leq E_n(f^{\bar{\psi}})_C \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_n(\bar{\psi}; t)| dt = \\ &= E_n(f^{\bar{\psi}})_C \left(\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{k} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} + O(1)R_n \right), \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$|R_n| \leq K \sum_{k=1}^{\infty} k \left(|\Delta^2 \psi_1(n+k-1)| + |\Delta^2 \psi_2(n+k-1)| \right),$$

$$\xi_k = \xi(b_k, \sqrt{(a_{n-k} - a_{n+k})^2 + (b_{n-k} - b_{n+k})^2}),$$

а функція $\xi(t, u)$ визначається рівністю

$$\xi(t, u) = \begin{cases} \frac{\pi|t|}{2}, & |u| \leq |t|, \\ |t| \arcsin\left(\frac{|t|}{|u|}\right) + \sqrt{u^2 - t^2}, & |t| < |u|, \end{cases}$$

зокрема $\xi(0, u) = |u|$.

Оскільки $b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, то формулу (11) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \|\rho_n(f; x)\|_C \leq E_n(f^{\bar{\psi}})_C & \left(\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sqrt{\psi_1^2(n+k) + \psi_2^2(n+k)} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k \left(|\Delta^2 \psi_1(n+k-1)| + |\Delta^2 \psi_2(n+k-1)| \right) \right), \end{aligned}$$

що й доводить співвідношення (9).

Оцінка зверху в (10) випливає з (9). Побудуємо функцію $\Phi_n(x) \in C^{\bar{\psi}} C_\varepsilon^0$, на якій досягається рівність у співвідношенні (10). Для цього покладемо

$$g_n(-x) = \text{sign} F_n(\bar{\psi}; x), \quad |x| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Далі, згладимо функцію $g_n(-x)$, замінивши її в околі точок розриву лінійною. Одержану неперервну функцію позначимо через $\tilde{g}_n(-x)$, $|x| \leq \frac{\pi}{2}$. При $\frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi$ визначимо функцію $\tilde{g}_n(-x)$ так, щоб $\tilde{g}_n(-x)$ була неперервною на $[-\pi; \pi]$, $\tilde{g}_n(-\pi) = \tilde{g}_n(\pi)$, $|\tilde{g}_n(-x)| \leq 1$. Крім того, щоб існувало на $[-\pi; \pi]$ не менше $2n$ точок c_i , в яких $|\tilde{g}_n(-c_i)| = 1$, в цих точках функція $\tilde{g}_n(-x)$ почергово змінює знак, щоб при цьому виконувалась рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}_n(-x) dx = 0.$$

Позначимо $\tilde{\varphi}(n; -x) = \varepsilon_n \tilde{g}_n(-x)$, а через $\Phi_n(-x)$ $\bar{\psi}$ -інтеграл функції $\tilde{\varphi}(n, -x)$. Таким чином, $(\Phi_n(-x))^{\bar{\psi}} = \tilde{\varphi}(n, -x)$ і найкраще рівномірне наближення функції $\tilde{\varphi}(n, -x)$ буде здійснювати поліном, тотожно рівний нулю.

Оскільки

$$E_n(\tilde{\varphi})_C = \varepsilon_n E_n(\tilde{g}_n) \leq \varepsilon_n,$$

то $\tilde{\varphi} \in C_\varepsilon^0$ і

$$\begin{aligned} \sup_{f \in C^{\bar{\psi}} C_\varepsilon^0} \|\rho_n(f; x)\|_C & \geq \|\rho_n(\Phi_n; x)\|_C \geq |\rho_n(\Phi_n; 0)| = \\ & = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\varphi}(n; -u) F_n(\bar{\psi}; u) du \right| \geq \\ & \geq \frac{\varepsilon_n}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |F_n(\bar{\psi}; u)| du - \frac{\varepsilon_n}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2} \leq |u| \leq \pi} |F_n(\bar{\psi}; u)| du. \end{aligned} \quad (12)$$

З огляду на те, що (див. (11))

$$\sup_{f \in C^{\bar{\psi}} C_\varepsilon^0} \|\rho_n(f; x)\|_C \leq \frac{\varepsilon_n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_n(\bar{\psi}; u)| du, \quad (13)$$

на підставі нерівностей (12) і (13) робимо висновок, що

$$\sup_{f \in C^{\bar{\psi}} C_{\varepsilon}^0} \|\rho_n(f; x)\|_C = \frac{\varepsilon_n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_n(\bar{\psi}; u)| du + \\ + O \left(\varepsilon_n \int_{\frac{\pi}{2} \leq |u| \leq \pi} |F_n(\bar{\psi}; u)| du \right). \quad (14)$$

З (14) і оцінки

$$\int_{\frac{\pi}{2} \leq |u| \leq \pi} |F_n(\bar{\psi}; u)| du \leq K \sum_{k=1}^{\infty} k \left(|\Delta^2 \psi_1(n+k-1)| + |\Delta^2 \psi_2(n+k-1)| \right)$$

випливає співвідношення (10), що й доводить теорему.

1. *Lebesgue H.* Sur la représentation trigonometrique approchée des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. Soc. Math. France. – 1910. – **38**. – P. 184–210.
2. *Дзядик В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
3. *Осколков К. И.* К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 4. – С. 515–526.
4. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$ -интегралов периодических функций суммами Фурье. – Киев, 1996. – 70 с. – (Препринт/ НАН Украины. Ин-т математики; 96.11).
5. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$ -интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069–1113.
6. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – **I**. – 427 с.
7. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$ -интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С. 274–291.
8. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$ -интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). II // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 3. – С. 388–400.
9. *Kolmogoroff A.* Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la serie de Fourier-Lebesgue // Bull. Acad. pol. Sér. sci. math. – 1923. – P. 83–86.
10. *Теляковский С. А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. – 1964. – **63(105)**, № 3. – С. 426–444.
11. *Теляковский С. А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – **109**. – С. 65–97.
12. *Тригуб Р. М.* Приближение непрерывных периодических функций с ограниченной производной полиномами // Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 185–195.

Одержано 09.12.11,
після доопрацювання – 30.11.12