УДК 517.95

Н. М. Гузик (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

НЕЛОКАЛЬНА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

We establish conditions for the existence and uniqueness of a classical solution of the inverse problem of determination of the time-dependent coefficient of the higher-order derivative in a parabolic equation with degeneration in the coefficient of the time derivative. Boundary conditions of the second kind and a nonlocal overdetermination condition are given. The case of weak degeneration is investigated.

Установлены условия существования и единственности классического решения обратной задачи определения зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении с вырождением при производной по времени. Заданы краевые условия Неймана и нелокальное условие переопределения. Исследован случай слабого вырождения.

Вступ. Коефіцієнтні обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта у параболічному рівнянні почали розвиватись відносно недавно — на початку 70-х років минулого століття. Одним з основних питань при формулюванні таких задач є вибір так званих умов перевизначення, які забезпечують можливість однозначного визначення невідомих параметрів у процесі теплопровідності. Ці умови можна задавати у вигляді додаткових крайових умов, проте більш вдалим виявився пошук умов перевизначення серед нелокальних умов.

Вважається, що однією з перших робіт, присвячених оберненій задачі з невідомим коефіцієнтом, що залежить від часу, є праця B. F. Jones [1]. У ній досліджується обернена задача визначення коефіцієнта температуропровідності у напівобмеженому стержні із заданими однорідною початковою умовою, крайовою умовою Діріхле та значенням теплового потоку в якості умови перевизначення. На сьогодні обернені задачі визначення залежного від часу старшого коефіцієнта у параболічних рівняннях з різними наборами крайових умов та умов перевизначення вивчені достатньо повно (див., наприклад, [2 – 6] та наведену в них бібліографію). Дослідження коефіцієнтних обернених задач для параболічних задач з нелокальними умовами перевизначення проведено у [7].

Обернені задачі для параболічних рівнянь з виродженням досліджені мало. Серед відомих роботи [8, 9], у яких розглядались обернені задачі визначення залежного від часу старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні з довільним виродженням. У цих працях залежна від часу функція, яка спричинює виродження рівняння, міститься при другій похідній за просторовою змінною невідомої функції параболічного рівняння. Досліджено випадки слабкого та сильного виродження.

У даній роботі вивчається обернена задача визначення залежного від часу старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні з виродженням. На відміну від [8, 9] виродження рівняння спричинює монотонно зростаюча, залежна від часу функція, що міститься при похідній за часом. У роботі задано крайові умови Неймана та нелокальну умову перевизначення. Дослідження проведено у випадку слабкого виродження, означення якого взято з [10]. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв’язку вказаної задачі.

1. Формулювання задачі. В області $Q_T = \{(x,t)\colon 0 < x < h, 0 < t < T\}$ будемо розглядати обернену задачу визначення коефіцієнта $a = a(t),\ a(t) > 0,\ t \in [0,T]$ у рівнянні

$$\psi(t)u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами Неймана

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та нелокальною умовою перевизначення

$$\gamma_1(t)u(0,t) + \gamma_2(t)u(h,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Відомо, що $\psi = \psi(t)$ — монотонно зростаюча функція така, що $\psi(t) > 0$, $t \in (0,T]$, та $\psi(0) = 0$.

Означення . *Під розв'язком задачі* (1) – (4) *будемо розуміти пару функцій* (a,u) *з класу* $C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{2,0}(\overline{Q}_T)$, $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$, *що задовольняють рівняння* (1) *та умови* (2) – (4).

Досліджується випадок слабкого виродження, коли $\lim_{t\to+0} \int_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0$. Зауважимо, що умова $\lim_{t\to+0} \int_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0$ виконується тоді і лише тоді, коли функція $\frac{1}{\psi(t)}$ є інтегровною на $(0,T)$.

2. Існування розв'язку. Умови існування розв'язку задачі (1) – (4) містяться у такій теоремі.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\varphi \in C^3[0,h]$, $\mu_i, \gamma_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2$, $\mu_3 \in C^1(0,T] \cap C[0,T]$, $b,c,f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$;

2) $\varphi'(x) > 0$, $\varphi''(x) > 0$, $x \in [0,h]$, $\gamma_i(t) \geq 0$, $i = 1,2$, $\gamma_1(t) + \gamma_2(t) > 0$, $t \in [0,T]$, *існує скінченна додатна границя* $\lim_{t\to 0} \mu_3'(t)\psi(t) \equiv M_0 > 0$,

$$\mu_3'(t)\psi(t) - \frac{\mu_3(t)}{\gamma_1(t)+\gamma_2(t)} \big(\psi(t)(\gamma_1'(t)+\gamma_2'(t)) + \gamma_1(t)c(0,t) + \gamma_2(t)c(h,t)\big) -$$

$$-\gamma_1(t)\left(b(0,t)\mu_1(t) + f(0,t)\right) - \gamma_2(t)\left(b(h,t)\mu_2(t) + f(h,t)\right) > 0,$$

$$\psi(t)\left(\gamma_1'(t)\gamma_2(t) + \gamma_2'(t)\gamma_1(t)\right) + \gamma_1(t)\gamma_2(t)\left(c(0,t)+c(h,t)\right) \geq 0, \qquad t \in [0,T];$$

3) $\psi \in C[0,T]$ — *монотонно зростаюча функція,* $\psi(t) > 0$, $t \in (0,T]$, $\psi(0) = 0$,

$$\lim_{t\to+0} \int_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0;$$

4) $\mu_1(0) = \varphi'(0)$, $\mu_2(0) = \varphi'(h)$, $\gamma_1(0)\varphi(0) + \gamma_2(0)\varphi(h) = \mu_3(0)$.

Тоді можна вказати число T_0, $0 < T_0 \leq T$, *яке визначається вихідними даними, таке, що існує розв'язок задачі* (1) – (4) *при* $x \in [0,h]$, $t \in [0,T_0]$.

Доведення. Зведемо задачу (1) – (4) до системи рівнянь. Припустимо тимчасово, що функція $a = a(t)$ є відомою.

У задачі (1) – (4) виконаємо заміну змінних

$$u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + \varphi(x) + x(\mu_1(t) - \mu_1(0)) + \frac{x^2}{2h}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\right). \tag{5}$$

В результаті відносно функції $\widetilde{u} = \widetilde{u}(x,t)$ отримаємо рівняння

$$\psi(t)\widetilde{u}_t = a(t)\widetilde{u}_{xx} + b(x,t)\widetilde{u}_x + c(x,t)\widetilde{u} + f(x,t) - \psi(t)\left(x\mu_1'(t) + \frac{x^2}{2h}(\mu_2'(t) - \mu_1'(t))\right) +$$

$$+a(t)\left(\varphi''(x) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0))\right) + b(x,t)\left(\varphi'(x) + \mu_1(t) - \mu_1(0) +\right.$$

$$\left. +\frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0))\right) + c(x,t)\left(\varphi(x) + x(\mu_1(t) - \mu_1(0)) +\right.$$

$$\left. +\frac{x^2}{2h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0))\right) \tag{6}$$

та однорідні початкову і крайові умови

$$\widetilde{u}(x,0) = 0, \qquad x \in [0,h], \tag{7}$$

$$\widetilde{u}_x(0,t) = \widetilde{u}_x(h,t) = 0, \qquad t \in [0,T]. \tag{8}$$

Позначимо через $G_k = G_k(x,t,\xi,\tau)$, $k = 1,2$, функції Гріна першої $(k = 1)$ та другої $(k = 2)$ крайових задач для рівняння теплопровідності

$$u_t = \frac{a(t)}{\psi(t)} u_{xx}.$$

Вони визначається формулою

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t) - \theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))}\right) +\right.$$

$$\left. +(-1)^k \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))}\right)\right),\ k = 1,2, \tag{9}$$

де $\displaystyle \theta(t) = \int_0^t \frac{a(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau.$

За допомогою функції Гріна $G_2 = G_2(x,t,\xi,\tau)$ задачу (6) – (8) замінимо еквівалентним інтегро-диференціальним рівнянням

$$\widetilde{u}(x,t) = \int_0^t \int_0^h \frac{G_2(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \left(b(\xi,\tau)\widetilde{u}_\xi + c(\xi,\tau)\widetilde{u} + f(\xi,\tau) - \psi(\tau)\left(\xi\mu_1'(\tau) +\right.\right.$$

$$+\frac{\xi^2}{2h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))\Bigg)+a(\tau)\Bigg(\varphi''(\xi)+\frac{1}{h}(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0))\Bigg)+$$

$$+b(\xi,\tau)\Bigg(\varphi'(\xi)+\mu_1(\tau)-\mu_1(0)+\frac{\xi}{h}(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0))\Bigg)+$$

$$+c(\xi,\tau))\Bigg(\varphi(\xi)+\xi(\mu_1(\tau)-\mu_1(0))+\frac{\xi^2}{2h}(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0))\Bigg)\Bigg)\,d\xi\,d\tau. \qquad (10)$$

Позначимо $v(x,t)\equiv u_x(x,t), w(x,t)\equiv u_{xx}(x,t)$. Використовуючи (5), (10), для функції $u=u(x,t)$ отримуємо рівняння

$$u(x,t)=\varphi(x)+x(\mu_1(t)-\mu_1(0))+\frac{x^2}{2h}\left(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)\right)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{G_2(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\Bigg(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f(\xi,\tau)-\psi(\tau)\Bigg(\xi\mu_1'(\tau)+$$

$$+\frac{\xi^2}{2h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))\Bigg)+a(\tau)\Bigg(\varphi''(\xi)+\frac{1}{h}(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0))\Bigg)\Bigg)\,d\xi\,d\tau. \qquad (11)$$

Враховуючи відомі властивості функцій Гріна $G_{2x}=-G_{1\xi},\ G_1\Big|_{x=0}=G_1\Big|_{x=h}=0$, шляхом диференціювання (11) за просторовою змінною приходимо до рівнянь відносно функцій $v=v(x,t)$, $w=w(x,t):$

$$v(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{G_1(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\Bigg(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+(b_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)+$$

$$+c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f_\xi(\xi,\tau)-\psi(\tau)\Bigg(\mu_1'(\tau)+\frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))\Bigg)+a(\tau)\varphi'''(\xi)\Bigg)\,d\xi\,d\tau+$$

$$+\varphi'(x)+\mu_1(t)-\mu_1(0)+\frac{x}{h}(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)),\qquad (x,t)\in\overline{Q}_T, \qquad (12)$$

$$w(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{G_{1x}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\Bigg(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+(b_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)+$$

$$+c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f_\xi(\xi,\tau)-\psi(\tau)\Bigg(\mu_1'(\tau)+\frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))\Bigg)+a(\tau)\varphi'''(\xi)\Bigg)\,d\xi\,d\tau+$$

$$+\varphi''(x)+\frac{1}{h}(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)),\qquad (x,t)\in\overline{Q}_T. \qquad (13)$$

Здиференціюємо рівність (4) для $t\in(0,T]$. Домножаючи отриману рівність на $\psi(t)$, знаходимо

$$\gamma_1(t)\psi(t)u_t(0,t)+\gamma_2(t)\psi(t)u_t(h,t)=$$

$$=\mu_3'(t)\psi(t)-\psi(t)(\gamma_1'(t)u(0,t)+\gamma_2'(t)u(h,t)), \qquad t\in(0,T]. \tag{14}$$

Згідно з умовами теореми 1 існує границя правої частини рівності (14) при $t\to 0$:

$$\lim_{t\to 0}\big(\mu_3'(t)\psi(t)-\psi(t)(\gamma_1'(t)u(0,t)+\gamma_2'(t)u(h,t))\big)=M_0>0.$$

Це означає, що існує границя

$$\lim_{t\to 0}(\gamma_1(t)\psi(t)u_t(0,t)+\gamma_2(t)\psi(t)u_t(h,t))=M_0>0. \tag{15}$$

Підставимо в (14) замість $u_t(0,t), u_t(h,t)$ відповідні значення, отримані з рівняння (1). Враховуючи (15), (3), (4) та введені позначення, приходимо до рівняння відносно функції $a=a(t)$:

$$a(t)=\frac{1}{\gamma_1(t)w(0,t)+\gamma_2(t)w(h,t)}\big(\psi(t)(\mu_3'(t)-\gamma_1'(t)u(0,t)-\gamma_2'(t)u(h,t))-$$

$$-\gamma_1(t)(b(0,t)\mu_1(t)+c(0,t)u(0,t)+f(0,t))-$$

$$-\gamma_2(t)(b(h,t)\mu_2(t)+c(h,t)u(h,t)+f(h,t))\big), \qquad t\in[0,T]. \tag{16}$$

Таким чином, обернену задачу (1) – (4) зведено до еквівалентної системи рівнянь (11) – (13), (16). Еквівалентність розуміємо в такому сенсі: якщо пара функцій (a,u) є розв'язком задачі (1) – (4), то (a,u,v,w), $v(x,t)\equiv u_x(x,t)$, $w(x,t)\equiv u_{xx}(x,t)$ є неперервним розв'язком системи (11) – (13), (16) і, навпаки, якщо $(a,u,v,w)\in C[0,T]\times(C(\overline{Q}_T))^3$ є розв'язком системи рівнянь (11) – (13), (16), то (a,u) є розв'язком задачі (1) – (4) у сенсі наведеного вище означення. Перша частина твердження випливає зі способу отримання системи рівнянь (11) – (13), (16). Для того щоб довести зворотне твердження, потрібно показати, що функції (a,u) належать до класу $C[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{2,0}(\overline{Q}_T)$ і задовольняють умови (1) – (4).

Нехай (a,u,v,w) — неперервний розв'язок системи (11) – (13), (16). Припущення теореми 1 дозволяють здиференціювати (12) по x. В результаті отримаємо

$$v_x(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{G_{1x}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\Bigg(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+(b_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)+$$

$$+c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f_\xi(\xi,\tau)-\psi(\tau)\bigg(\mu_1'(\tau)+\frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))\bigg)+a(\tau)\varphi'''(\xi)\Bigg)d\xi\,d\tau+$$

$$+\varphi''(x)+\frac{1}{h}(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)), \qquad (x,t)\in\overline{Q}_T.$$

Праві частини цієї рівності та (13) збігаються, тому $w(x,t)\equiv v_x(x,t)$. Далі здиференціюємо (11) за просторовою змінною:

$$u_x(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{G_1(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\Big(b(\xi,\tau)v_\xi(\xi,\tau)+b_\xi(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u_\xi(\xi,\tau)+$$

$$+c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f_\xi(\xi,\tau)-\psi(\tau)\left(\mu_1'(\tau)+\frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))\right)+a(\tau)\varphi'''(\xi)\Bigg)d\xi\,d\tau+$$

$$+\varphi'(x)+\mu_1(t)-\mu_1(0)+\frac{x}{h}(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)),\qquad (x,t)\in\overline{Q}_T. \tag{17}$$

Віднімемо відповідно праві та ліві частини рівностей (12) та (17). Враховуючи, що $w(x,t)\equiv$ $\equiv v_x(x,t)$, знаходимо

$$v(x,t)-u_x(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{G_1(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)}c(\xi,\tau)(v(\xi,\tau)-u_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{18}$$

Оскільки

$$G_1(x,t,\xi,\tau)\le G_2(x,t,\xi,\tau),\qquad \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi\le 1, \tag{19}$$

то, беручи до уваги означення слабкого виродження, робимо висновок про те, що ядро однорідного інтегрального рівняння (18) має інтегровну особливість. Це означає, що це рівняння має лише тривіальний розв'язок, і, отже, $v(x,t)\equiv u_x(x,t)$. Враховуючи це в (11), одержуємо, що $u=u(x,t)$ має потрібну гладкість та задовольняє рівняння (1) і умови (2), (3) для довільної неперервної на $[0,T]$ функції $a=a(t)$.

Підставимо в (16) замість $w(x,t)$ функцію $u_{xx}(x,t)$ та, використавши (3), запишемо її у вигляді

$$\gamma_1(t)\big(a(t)u_{xx}(0,t)+b(0,t)u_x(0,t)+c(0,t)u(0,t)+f(0,t)\big)+\gamma_2(t)\big(a(t)u_{xx}(h,t)+$$

$$+b(h,t)u_x(h,t)+c(h,t)u(h,t)+f(h,t)\big)=\psi(t)(\mu_3'(t)-\gamma_1'(t)u(0,t)-\gamma_2'(t)u(h,t)).$$

З огляду на рівняння (1) отримуємо рівність

$$\big(\gamma_1(t)u(0,t)+\gamma_2(t)u(h,t)\big)'=\big(\mu_3(t)\big)'.$$

Інтегруючи цю рівність та використовуючи умови теореми 1, приходимо до (4), що й завершує доведення еквівалентності задачі (1)–(4) та системи рівнянь (11)–(13), (16).

Оскільки

$$u(x,t)=u(0,t)+\int\limits_0^x v(\eta,t)d\eta,$$

$$u(x,t)=u(h,t)-\int\limits_x^h v(\eta,t)d\eta,$$

то, враховуючи умову (4), знаходимо

$$u(x,t)=\frac{1}{\gamma_1(t)+\gamma_2(t)}\left(\mu_3(t)+\gamma_1(t)\int\limits_0^x v(\eta,t)d\eta-\gamma_2(t)\int\limits_x^h v(\eta,t)d\eta\right). \tag{20}$$

Рівність (20) використаємо у (12), (13), (16). В результаті отримаємо систему рівнянь відносно невідомих $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$, $a = a(t)$:

$$v(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h \frac{G_1(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \Bigg(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + (b_\xi(\xi,\tau) + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau) +$$

$$+ \frac{c_\xi(\xi,\tau)}{\gamma_1(\tau)+\gamma_2(\tau)} \Bigg(\mu_3(\tau) + \gamma_1(\tau) \int\limits_0^\xi v(\eta,\tau)d\eta - \gamma_2(\tau) \int\limits_\xi^h v(\eta,\tau)d\eta \Bigg) + f_\xi(\xi,\tau) -$$

$$- \psi(\tau) \Bigg(\mu_1'(\tau) + \frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) \Bigg) + a(\tau)\varphi'''(\xi) \Bigg) d\xi\, d\tau + \varphi'(x) +$$

$$+ \mu_1(t) - \mu_1(0) + \frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{21}$$

$$w(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h \frac{G_{1x}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \Bigg(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + (b_\xi(\xi,\tau) + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau) +$$

$$+ \frac{c_\xi(\xi,\tau)}{\gamma_1(\tau)+\gamma_2(\tau)} \Bigg(\mu_3(\tau) + \gamma_1(\tau) \int\limits_0^\xi v(\eta,\tau)d\eta - \gamma_2(\tau) \int\limits_\xi^h v(\eta,\tau)d\eta \Bigg) + f_\xi(\xi,\tau) -$$

$$- \psi(\tau) \Bigg(\mu_1'(\tau) + \frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) \Bigg) + a(\tau)\varphi'''(\xi) \Bigg) d\xi\, d\tau + \varphi''(x) +$$

$$+ \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{22}$$

$$a(t) = \frac{1}{\gamma_1(t)w(0,t) + \gamma_2(t)w(h,t)} \Bigg(\mu_3'(t)\psi(t) - \frac{\mu_3(t)}{\gamma_1(t)+\gamma_2(t)} \Bigg(\psi(t)(\gamma_1'(t) + \gamma_2'(t)) +$$

$$+ \gamma_1(t)c(0,t) + \gamma_2(t)c(h,t) \Bigg) + \frac{1}{\gamma_1(t)+\gamma_2(t)} \Bigg(\psi(t)(\gamma_1'(t)\gamma_2(t) + \gamma_2'(t)\gamma_1(t)) +$$

$$+ \gamma_1(t)\gamma_2(t)(c(0,t) + c(h,t)) \Bigg) \int\limits_0^h v(\eta,t)d\eta - \gamma_1(t)(b(0,t)\mu_1(t) + f(0,t)) -$$

$$- \gamma_2(t)(b(h,t)\mu_2(t) + f(h,t)) \Bigg), \qquad t \in [0,T]. \tag{23}$$

Встановимо апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (21) – (23). Для того щоб оцінити функцію $w = w(x,t)$ знизу, дослідимо поведінку при $t \to 0$ інтегралів, що входять до правої частини рівності (22). Використовуючи оцінку

$$\int\limits_0^h |G_{1x}(x,t,\xi,\tau)|\, d\xi \le \frac{C_1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \tag{24}$$

робимо висновок, що інтеграл у правій частині формули (22) має таку ж поведінку при $t \to 0$, як і вираз

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \equiv J_1 + J_2.$$

Оскільки

$$J_1 = \int\limits_0^t \frac{\psi(\tau)d\theta(\tau)}{a(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \le C_2\psi(t)\left(\int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\psi(\sigma)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

$$J_2 \le C_3 \int\limits_0^t \frac{d\theta(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \le C_4\left(\int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\psi(\sigma)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{26}$$

то, враховуючи означення слабкого виродження, стверджуємо, що інтеграли J_1, J_2 прямують до нуля при $t \to 0$. Тоді, згідно з умовами теореми, у правій частині формули (22) при $t = 0$ відмінним від нуля є лише другий доданок. Сума двох інших прямує до нуля при $t \to 0$. Таким чином, можна вказати таке число $t_1,\ 0 < t_1 \le T$, що буде виконуватися нерівність

$$\frac{1}{2}\varphi''(x) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)) + \int\limits_0^t\int\limits_0^h \frac{G_{1x}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\Bigg(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) +$$

$$+(b_\xi(\xi,\tau) + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau) + \frac{c_\xi(\xi,\tau)}{\gamma_1(\tau)+\gamma_2(\tau)}\Bigg(\mu_3(\tau) + \gamma_1(\tau)\int\limits_0^\xi v(\eta,\tau)d\eta -$$

$$-\gamma_2(\tau)\int\limits_\xi^h v(\eta,\tau)d\eta\Bigg) + f_\xi(\xi,\tau) - \psi(\tau)\Bigg(\mu_1'(\tau) + \frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau))\Bigg) +$$

$$+a(\tau)\varphi'''(\xi)\Bigg)\, d\xi\, d\tau \ge 0, \qquad (x,t) \in [0,h]\times[0,t_1]. \tag{27}$$

Тоді з (22) отримаємо оцінку для $w = w(x,t)$ знизу

$$w(x,t) \ge \frac{1}{2}\min_{[0,h]}\varphi''(x) \equiv M_1 > 0, \quad (x,t) \in [0,h]\times[0,t_1]. \tag{28}$$

Аналогічно, враховуючи (19) та означення слабкого виродження, стверджуємо, що

$$v(x,t) \ge \frac{1}{2}\min_{[0,h]}\varphi'(x) \equiv M_2 > 0, \quad (x,t) \in [0,h]\times[0,t_2]. \tag{29}$$

Число $t_2,\ 0 < t_2 \leq T$, визначається з нерівності

$$\frac{1}{2}\varphi'(x) + \mu_1(t) - \mu_1(0) + \frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)) + \mu_1(t) - \mu_1(0) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^h \frac{G_1(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \Bigg(b(\xi,\tau) w(\xi,\tau) + (b_\xi(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)) v(\xi,\tau) + \frac{c_\xi(\xi,\tau)}{\gamma_1(\tau)+\gamma_2(\tau)} \times$$

$$\times \Bigg(\mu_3(\tau) + \gamma_1(\tau) \int_0^\xi v(\eta,\tau) d\eta - \gamma_2(\tau) \int_\xi^h v(\eta,\tau) d\eta \Bigg) - \psi(\tau) \Bigg(\mu_1'(\tau) + \frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) \Bigg) +$$

$$+ f_\xi(\xi,\tau) + a(\tau)\varphi'''(\xi) \Bigg) d\xi \, d\tau \geq 0, \qquad (x,t) \in [0,h] \times [0,t_2].$$

Оцінки (28), (29) та умови теореми 1 забезпечують додатність функції $a = a(t)$ на відрізку $[0,t_3]$, де $t_3 = \min\{t_1,t_2\}$.

Позначимо $V(t) = \max_{x\in[0,h]} v(x,t),\ W(t) = \max_{x\in[0,h]} w(x,t)$. З рівняння (21) випливає, що $v(0,t) = \mu_1(t)$. Тоді для функцій $v = v(x,t),\ w = w(x,t)$ правильним є співвідношення

$$v(x,t) = \mu_1(t) + \int_0^x w(\eta,t) d\eta, \tag{30}$$

а тому

$$V(t) \leq C_5 + C_6 W(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{31}$$

З (23), враховуючи (28), (31), одержуємо

$$a(t) \leq C_7 + C_8 W(t), \qquad t \in [0,t_1]. \tag{32}$$

Далі оцінимо функцію $w(x,t)$ зверху. Виходячи з рівняння (22) та використовуючи оцінки (24), (31), (32), для функції $W = W(t)$ отримуємо нерівність

$$W(t) \leq C_9 \int_0^t \frac{W(\tau) d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_{10} \int_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} +$$

$$+ C_{11} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_{12}, \qquad t \in [0,t_1]. \tag{33}$$

Позначивши $W_1(t) \equiv W(t) + 1$, останню нерівність зведемо до вигляду

$$W_1(t) \leq C_{13} + C_{14} \int_0^t \frac{W_1(\tau) d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \qquad t \in [0,t_1]. \tag{34}$$

Введемо позначення $a_{\min}(t) = \min_{0\le\tau\le t} a(\tau),\quad \theta_0(t) = \int_0^t \dfrac{d\tau}{\psi(\tau)}$. З рівняння (23), враховуючи оцінку (29), знаходимо

$$a_{\min}(t) \ge \frac{C_{15}}{W_1(t)}, \qquad t\in[0,t_2]. \tag{35}$$

Тоді нерівність (34) можна записати у вигляді

$$W_1(t) \le C_{13} + C_{14}\int\limits_0^t \frac{W_1(\tau)d\tau}{\sqrt{a_{min}(\tau)}\psi(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} \le$$

$$\le C_{13} + C_{16}\int\limits_0^t \frac{W_1^2(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}, \qquad t\in[0,t_3]. \tag{36}$$

Піднесемо обидві частини нерівності (36) до квадрату і використаємо нерівність Коші:

$$W_1^2(t) \le 2C_{13}^2 + 2C_{16}^2\left(\int\limits_0^t \frac{W_1^2(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\right)^2. \tag{37}$$

До інтеграла у правій частині нерівності (37) застосуємо нерівність Коші – Буняковського:

$$\left(\int\limits_0^t \frac{W_1^2(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\right)^2 \le \int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}.$$

Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} = \int\limits_0^t \frac{d\theta_0(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} = 2\left(\int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\psi(\sigma)}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_{17}.$$

Враховуючи отриманий результат у нерівності (37), одержуємо

$$W_1^2(t) \le C_{18} + C_{19}\int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}, \qquad t\in[0,t_3]. \tag{38}$$

У нерівності (38) замінимо t на σ, домножимо її на $\dfrac{1}{\psi(\sigma)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}}$ та зінтегруємо по σ від 0 до t :

$$\int\limits_0^t \frac{W_1^2(\sigma)d\tau}{\psi(\sigma)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}} \le C_{20} + C_{19}\int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\psi(\sigma)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}}\int\limits_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta_0(\sigma)-\theta_0(\tau)}}.$$

Змінюючи межі інтегрування та використовуючи рівність

$$\int\limits_\tau^t \frac{d\sigma}{\psi(\sigma)\sqrt{(\theta_0(t)-\theta_0(\sigma))(\theta_0(\sigma)-\theta_0(\tau))}} = \pi,$$

приходимо до нерівності

$$\int\limits_0^t \frac{W_1^2(\sigma)d\tau}{\psi(\sigma)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}} \le C_{20} + C_{21}\int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\psi(\tau)}. \tag{39}$$

Використовуючи нерівність (39), нерівність (36) зводимо до вигляду

$$W_1(t) \le C_{22} + C_{23}\int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\psi(\tau)}. \tag{40}$$

Розв'язуючи (40), як в [11], отримуємо

$$W_1(t) \le \frac{C_{22}}{\sqrt[3]{1-3C_{22}^3C_{23}\int_0^{t_4}\dfrac{d\tau}{\psi(\tau)}}} \equiv M_3, \qquad t\in[0,t_4],$$

де число $t_4,\ 0<t_4\le t_3$, визначається з нерівності

$$1-3C_{22}^3C_{23}\int\limits_0^{t_4}\frac{d\tau}{\psi(\tau)} > 0.$$

Повертаючись до введених позначень, одержуємо

$$|w(x,t)| \le M_3, \quad (x,t)\in[0,h]\times[0,t_4]. \tag{41}$$

Оцінка (41) дозволяє оцінити функції $v=v(x,t), a=a(t)$. Для цього використаємо (31), (32) та (35):

$$|v(x,t)| \le M_4, \qquad (x,t)\in[0,h]\times[0,t_4], \tag{42}$$

$$0<A_1\le a(t)\le A_2<+\infty, \qquad t\in[0,t_4]. \tag{43}$$

Таким чином, апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (21) – (23) встановлено.

Розглянемо систему рівнянь (21) – (23) як операторне рівняння

$$W=PW,$$

де $W=(v,w,a)$, а оператор P визначається правими частинами рівностей (21) – (23) відповідно.

Апріорні оцінки (41) – (43) розв'язків системи рівнянь (21) – (23) використаємо для побудови множини N такої, щоб виконувались умови теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього виберемо число $T_0, 0<T_0\le t_4$, так, щоб виконувалась система нерівностей

$$C_{12}+\frac{C_{24}}{\sqrt{A_1}}(1+A_2+M_3+M_4)\left(\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\psi(\tau)}\right)^{\frac12} \le M_3, \qquad t\in[0,T_0], \tag{44}$$

$$\mu_1(t) + \varphi'(x) - \mu_1(0) + (\mu_2(t) - \mu_1(0) - \mu_2(0) + \mu_1(0)) +$$

$$+C_{25}(1 + A_2 + M_3 + M_4) \int_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)} \leq M_4, \qquad (x,t) \in [0,h] \times [0,T_0]. \tag{45}$$

Зауважимо, що нерівності (44), (45) отримано шляхом оцінювання правих частин рівностей (22), (21) відповідно з урахуванням (41) – (43). Те, що стала $C_{12} < M_3$, випливає з (33). Покладаючи в рівності (30) $t = 0$, знаходимо

$$\varphi'(x) - \mu_1(0) = \int_0^x \varphi''(\eta) d\eta, \ x \in [0,h].$$

Тоді нерівність

$$\max_{(x,t)\in[0,h]\times[0,T_0]} (\mu_1(t) + \varphi'(x) - \mu_1(0)) < M_4$$

випливає з означення сталих M_3, M_4.

У банаховому просторі $\mathbb{B} = (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times C[0,T_0]$ виберемо множину $N = \{(v,w,a) \in \mathbb{B}\colon M_2 \leq v(x,t) \leq M_4, M_1 \leq w(x,t) \leq M_3, \ (x,t) \in [0,h] \times [0,T_0], \ A_1 \leq \leq a(t) \leq A_2, \ t \in [0,T_0]\}$. З побудови множини N робимо висновок, що вона замкнена й опукла, а оператор P переводить її в себе. Щоб показати, що оператор P є цілком неперервним, достатньо довести компактність таких інтегральних операторів:

$$P_1 : \quad \omega(x,t) \to \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\omega(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau,$$

$$P_2 : \quad \omega(x,t) \to \int_0^t \int_0^h \frac{G_{1x}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\omega(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau.$$

Доведення цього факту у випадку слабкого виродження проводиться за тією ж схемою, що й у невиродженому випадку [7, с. 24]. Таким чином, всі умови теореми Шаудера виконуються, а це означає, що існує розв'язок (v,w,a) системи рівнянь (21) – (23) при $x \in [0,h]$, $t \in [0,T_0]$. Після цього функцію $u = u(x,t)$ знаходимо, виходячи з рівняння (20). Враховуючи еквівалентність задачі (1) – (4) та системи (11) – (13), (16), отримуємо існування розв'язку задачі (1) – (4) на звуженому часовому проміжку.

Теорему 1 доведено.

4. Єдиність розв'язку. Встановимо умови, при виконанні яких розв'язок задачі (1) – (4) буде єдиним.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови*

$$\varphi''(x) > 0, \quad x \in [0,h], \quad \gamma_i(t) \geq 0, \quad i = 1,2, \quad \gamma_1(t) + \gamma_2(t) > 0, \quad t \in [0,T],$$

то розв'язок задачі (1) – (4) *єдиний при* $(x,t) \in [0,h] \times [0,t_1]$, *де число* t_1 *визначається з нерівності* (27).

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки (a_i, u_i), $i = 1, 2$, задачі (1) – (4). Різниці цих розв'язків позначимо через $a(t) = a_1(t) - a_2(t)$, $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Вони задовольняють рівняння

$$\psi(t)u_t = a_1(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + a(t)u_{2xx}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{46}$$

та умови

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in [0,h], \tag{47}$$

$$u_x(0,t) = u_x(h,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{48}$$

$$\gamma_1(t)u(0,t) + \gamma_2(t)u(h,t) = 0, \qquad t \in [0,T]. \tag{49}$$

За допомогою функції Гріна $G_2^*(x,t,\xi,\tau)$ другої крайової задачі для рівняння

$$\psi(t)u_t = a_1(t)u_{xx} + b(x,t)u_x \tag{50}$$

задачу (46) – (48) замінимо еквівалентним інтегральним рівнянням

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_2^*(x,t,\xi,\tau)\left(c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + a(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\right) d\xi\, d\tau. \tag{51}$$

Як і при доведенні існування розв'язку, для другої похідної за просторовою змінною функції $u_2 = u_2(x,t)$ відповідної задачі (1) – (4) отримуємо рівняння

$$u_{2xx}(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h \frac{G_{1x}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \Bigg(b(\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + (b_\xi(\xi,\tau) + c(\xi,\tau))u_{2\xi}(\xi,\tau) +$$

$$+ c_\xi(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau) + f_\xi(\xi,\tau) - \psi(\tau)\Bigg(\mu_1'(\tau) - \frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau))\Bigg) + a_2(\tau)\varphi'''(\xi)\Bigg) d\xi\, d\tau +$$

$$+ \varphi''(x) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{52}$$

де через $G_1^{(2)} = G_1^{(2)}(x,t,\xi,\tau)$ позначено функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння

$$u_t = \frac{a_2(t)}{\psi(t)} u_{xx}.$$

Тоді існує число $t_1, 0 < t_1 \leq T$, яке визначається з нерівності, аналогічної до (27), таке, що для функції $u_{2xx} = u_{2xx}(x,t)$ правильною залишатиметься оцінка (28).

Здиференціюємо умову (49). Враховуючи (46) – (48), приходимо до рівняння

$$a(t) = -\frac{1}{\gamma_1(t)u_{2xx}(0,t) + \gamma_2(t)u_{2xx}(h,t)} \big((\gamma_1'(t)\psi(t) + \gamma_1(t)c(0,t))u(0,t) +$$

$$+ (\gamma_2'(t)\psi(t) + \gamma_2(t)c(h,t))u(h,t) \big), \qquad t \in [0,t_1]. \tag{53}$$

Використовуючи рівняння (53) у (51), отримуємо

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2^*(x,t,\xi,\tau)\Bigg(c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)-\frac{u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)}{\gamma_1(\tau)u_{2\xi\xi}(0,\tau)+\gamma_2(\tau)u_{2\xi\xi}(h,\tau)}\times$$

$$\times\big((\gamma_1'(\tau)\psi(\tau)+\gamma_1(\tau)c(0,\tau))u(0,\tau)+(\gamma_2'(\tau)\psi(\tau)+\gamma_2(\tau)c(h,\tau))u(h,\tau)\big)\Bigg)\,d\xi\,d\tau,$$

$$(x,t)\in[0,h]\times[0,t_1]. \tag{54}$$

До рівняння (54) приєднаємо ще два рівняння відносно $u(0,t), u(h,t)$:

$$u(0,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2^*(0,t,\xi,\tau)\Bigg(c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)-\frac{u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)}{\gamma_1(\tau)u_{2\xi\xi}(0,\tau)+\gamma_2(\tau)u_{2\xi\xi}(h,\tau)}\times$$

$$\times\big((\gamma_1'(\tau)\psi(\tau)+\gamma_1(\tau)c(0,\tau))u(0,\tau)+(\gamma_2'(\tau)\psi(\tau)+\gamma_2(\tau)c(h,\tau))u(h,\tau)\big)\Bigg)\,d\xi\,d\tau,$$

$$t\in[0,t_1], \tag{55}$$

$$u(h,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2^*(h,t,\xi,\tau)\Bigg(c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)-\frac{u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)}{\gamma_1(\tau)u_{2\xi\xi}(0,\tau)+\gamma_2(\tau)u_{2\xi\xi}(h,\tau)}\times$$

$$\times\big((\gamma_1'(\tau)\psi(\tau)+\gamma_1(\tau)c(0,\tau))u(0,\tau)+(\gamma_2'(\tau)\psi(\tau)+\gamma_2(\tau)c(h,\tau))u(h,\tau)\big)\Bigg)\,d\xi\,d\tau,$$

$$t\in[0,t_1]. \tag{56}$$

В результаті одержуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно функцій $u(x,t)$, $u(0,t)$, $u(h,t)$.

Щоб дослідити інтегровність ядер цієї системи, розглянемо пряму задачу для рівняння (50) з початковою умовою

$$u(x,0)=1,\qquad x\in[0,h], \tag{57}$$

та крайовими умовами (48). Використовуючи функцію Гріна $G_2^*(x,t,\xi,\tau)$, розв'язок цієї задачі подамо у вигляді

$$u(x,t)=\int\limits_0^h G_2^*(x,t,\xi,0)d\xi.$$

З іншого боку, безпосередньою перевіркою легко переконатись, що розв'язком цієї задачі є функція

$$u(x,t)=1.$$

Звідси робимо висновок, що

$$\int\limits_0^h G_2^*(x,t,\xi,0)d\xi = 1.$$

На підставі останньої рівності можемо стверджувати, що ядра системи рівнянь (54) – (55) мають інтегровні особливості. Це означає, що ця система має лише тривіальний розв'язок

$$u(x,t) \equiv 0, \qquad (x,t) \in [0,h] \times [0,t_1], \qquad u(0,t) \equiv 0, \qquad u(h,t) \equiv 0, \qquad t \in [0,t_1].$$

Підставляючи його в рівняння (53), знаходимо

$$a(t) \equiv 0, \qquad t \in [0,t_1].$$

Теорему 2 доведено.

1. *Jones B. F.* The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. I. Existence and uniqueness // J. Math. and Mech. – 1962. – **11**, № 5. – P. 907 – 918.
2. *Cannon J. R., Rundell W.* Recovering a time-dependent coefficient in a parabolic differential equation // J. Math. Anal. and Appl. – 1991. – **160**. – P. 572 – 582.
3. *Azari H., Li C., Nie Y., Shang S.* Determination of an unknown coefficient in a parabolic inverse problem // Dynamics of Continuos, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Math. Analysis. – 2004. – **11**. – P. 665 – 674.
4. *Березницька І. Б., Дребот А. Й., Іванчов М. І., Макар Ю. М.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з інтегральним перевизначенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 48. – С. 71 – 79.
5. *Иванчов Н. И.* Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 8. – С. 1066 – 1071.
6. *Hong-Ming Yin.* Recent and new results on detetmination of unknown coefficients in parabolic patial differential equations with over-spesified conditions // Inverse Problems in Diffusion Processes. – 1995. – P. 181 – 198.
7. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003.
8. *Салдіна Н. В.* Сильно вироджена обернена параболічна задача з загальною поведінкою коефіцієнтів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 186 – 202.
9. *Saldina N.* An inverse problem for a generally degenerate heat equation // Вісн. нац. ун-ту „Львів. політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 566. – С. 59 – 67.
10. *Калашников А. С.* О растущих решениях линейных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Мат. заметки. – 1968. – **3**, № 2. – С. 171 – 178.
11. *Ivanchov M., Hryntsiv N.* Inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation in a domain with free boundary // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, № 1. – P. 16 – 29.

Одержано 22.05.12,
після доопрацювання — 04.03.13