УДК 517.5

Ю. Ю. Трохимчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРЕМА О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ

We propose a new approach to the classic mean-value theorem in which we use two mean values instead of a single value. This approach is of especial importance for complex functions because there are no available theorems of this kind for these functions.

Запропоновано новий підхід до класичної теореми про середнє, в якому замість одного середнього значення використано два. Цей підхід має особливе значення для комплексних функцій, оскільки для них не існує подібних теорем.

1. Действительные функции. Классическая теорема о среднем значении для действительной функции $f(x)$, $x \in [a,b]$, утверждает, что если функция f дифференцируема на интервале (a,b), то на нем найдется точка c, $a < c < b$, для которой справедливо равенство
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Для произвольной же непрерывной функции f в [1] доказано следующее предложение.

Теорема о среднем значении. *Пусть $f(x)$, $x \in [a,b]$, — непрерывная функция. Тогда имеют место следующие три (вообще, совместимые) варианта*:

1) *найдется точка c, $a < c < b$, для которой справедливо равенство*
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \delta(c),$$
где $\delta(c)$ — некоторое правое производное число функции f;

2) *множество $E(x\colon f'(x)=\infty)$ непусто и его образ $f(E)$ имеет положительную меру*: $\operatorname{mes} f(E) > 0$;

3) *f является ACG-функцией на $[a,b]$ и*
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f'_{as}(t)dt,$$
где справа содержится в общем случае интеграл Данжуа в широком смысле.

Напомним, что число A называется производным числом функции f в точке $x_0 \in [a,b]$, если существует последовательность $h_h \to 0$ такая, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = A;$$
при этом если все $h_n > 0$, то A называется правым производным числом, если же $h_n < 0$, то — левым.

Мы приведем другую формулировку теоремы о среднем, в которой не упоминаются бесконечные производные, зато говорится о паре средних значений.

Докажем следующую теорему

Теорема 1. *Пусть $f(x)$, $x \in [a,b]$, — произвольная конечная функция. Если в каждой точке $\underline{x}$, за исключением не более чем счетного множества, правые производные числа могут быть равны только бесконечности или нулю, то на $[a,b]$ существует плотное множество интервалов постоянства функции f.*

Доказательство. Введем множества

$$A_n^+ = \left\{ x : \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 1 \quad \text{при } 0 < h \leq \frac{1}{n} \right\},$$

$$A_n^- = \left\{ x : \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq -1 \quad \text{при } 0 < h \leq \frac{1}{n} \right\},$$

$$B_n = \left\{ x : \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 1 \quad \text{при } 0 < h \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Возьмем произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. По условию теоремы имеем

$$[\alpha, \beta] = A \cup B,$$

где

$$A = E\{x\colon f'(x) = \infty\}, \quad B = \{x\colon f'(x) = 0\} \quad \text{и} \quad A = \left(\underset{n}{\cup} A_n^+\right) \cup \left(\underset{n}{\cup} A_n^-\right), \quad B = \underset{n}{\cup} B_n.$$

Если множество A не первой категории, то одно из множеств $A_n^\pm$ будет плотно на отрезке $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$, длина которого может быть меньше $1/h$. Из определения $A_n^\pm$ легко следует, что тогда f будет строго монотонной всюду на нем и с производными числами по модулю больше $+1$. Но такая функция дифференцируема почти всюду на $[\alpha', \beta']$ с производными, отличными от $\underline{\infty}$ и $\underline{0}$.

Поэтому на $[\alpha, \beta]$ всюду множество B должно быть второй категории и на частичном отрезке $[\alpha', \beta']$ функция f будет липшицевой, бесконечных производных у нее не будет, а значит, по условию будут лишь нулевые производные числа, что означает постоянство функции f на $[\alpha', \beta']$.

Вследствие произвольности отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ отсюда следует утверждение теоремы.

Можно доказать, что в условиях теоремы 1 дополнение к найденной системе интервалов постоянства является счетным нигде не плотным множеством на $[a, b]$, но это нам не потребуется.

Для строго монотонной функции f на $[a, b]$ это утверждение означает существование плотного на $[a, b]$ множества точек, в которых существуют конечные правые производные числа, отличные от нуля[1].

Обозначим через $\mathfrak{m}(x; f) = \mathfrak{m}(x)$ множество всех правых производных чисел функции f в точке $x \in [a, b]$. Легко видеть, что все численные значения $\mathfrak{m}(x_0)$ возникают следующим образом: проектируем правую окрестность графика $B(f)$ из точки $(x_0, f(x_0))$ на вертикальную числовую ось $R: \ x = x_0 + 1$, считая нулевой точкой на ней точку $y = f(x_0)$; для непрерывной функции $f(x)$ проекция оказывается связной. Стягивая эту окрестность в точку x_0, в пределе получаем на $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ (замкнутое) множество $\mathfrak{m}(x)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$, $x \geq 0$, строго монотонна и непрерывна в точке $x = 0$, причем $f(0) = 0$. Тогда $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ принимает все промежуточные значения, т. е. множество $\mathfrak{m}(0)$ связно.*

[1]Утверждение нетривиально: ведь строго монотонная функция может иметь нулевые производные числа и почти всюду, и на множестве второй категории, бесконечные производные — также на множестве второй категории и т. д.

Отметим, что из одной непрерывности в точке это не следует:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n-1}\right], \\ x & \text{при} \quad x \in \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \left[\dfrac{1}{2n-1}, \dfrac{1}{2n}\right], \end{cases} \qquad h(0) = 0. \tag{1}$$

Доказательство. Если $f(x)$ имеет точки разрыва (а только в этом случае теорема нетривиальна), то замыкаем график $B(f)$ вертикальными отрезками на местах скачков до непрерывной дуги, которая будет дугой, взаимно однозначно проектирующейся на ось Oy. Рассматривая ее как график обратной (и непрерывной) функции $\varphi(y)$, получаем связность $\mathfrak{m}(0;\varphi)$ и равенство $\mathfrak{m}(0;f) = \dfrac{1}{\mathfrak{m}(0;\varphi)}$. В противном случае был бы „пустой” угол с вершиной $x = 0$, не содержащий точек $B(f)$, а лишь дополняющие его вертикальные отрезки (образцом является приведенный пример (1)), что, как легко видеть, несовместимо с монотонностью $f(x)$.

Теорема доказана. Она означает, что, за исключением счетного множества точек разрыва, $\mathfrak{m}(x,f)$ связно, и если, например, $\underline{f}$ возрастает, то $\mathfrak{m}(x,f) \geq 0$.

Напомним сначала понятия множеств первой и второй категории.

Назовем множество A первой категории в $R \equiv (-\infty, +\infty)$, если оно является объединением счетной совокупности нигде не плотных в $\mathbb{R}$ множеств:

$$A = \bigcup_n A_n.$$

Например, множество рациональных точек $\mathbb{R}$ — множество первой категории.

Далее, множество $B \subset \mathbb{R}$ назовем резидуальным (или всюду второй категории), если его дополнение является множеством первой категории. Основная теорема здесь утверждает, что $\mathbb{R}$ (как и любое полное метрическое пространство) является множеством всюду второй категории и не может быть представлено в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.

Назовем функцию $f(x)$ нигде не постоянной, если у нее нет интервалов постоянства.

Теорема 3. *Если $f(x)$, $x \in [a,b]$, — конечная и нигде не постоянная функция, то на $[a,b]$ найдется плотное множество, в каждой точке которого она имеет правые конечные производные числа, отличные от нуля.*

Доказательство. Сначала докажем теорему для случая монотонной (а значит, и строго монотонной) функции f. Заметим, что график произвольной непрерывной монотонной функции $f(x)$, $x \in [a,b]$, является одновременно и графиком липшицевой функции $k(\xi)$ с константой Липшица, равной 1, если повернуть оси первоначальной прямоугольной системы координат xOy на угол $+\dfrac{\pi}{4}$ для неубывающих f и $-\dfrac{\pi}{4}$ для невозрастающих. Дополним график $B(f)$, как и ранее, вертикальными отрезками до непрерывной дуги L. Если в этом случае на сегменте $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ указанных в лемме точек на L нет, то это означает, что на нем производная y измененной функции $f(x)$ принимает лишь значение $\pm\infty$ и 0, а соответствующая липшицева функция $k(\xi)$ на сегменте длины $(\beta-\alpha)\sqrt{2}$ — только производные ± 1 без промежуточных значений, что невозможно в силу связности $\mathfrak{m}$.

Для общего случая рассмотрим множества $A_n^{\pm}$ и B_n. Опять-таки, если на каком-либо сегменте $[\alpha,\beta]$ нет указанных в теореме точек, то

$$[\alpha, \beta] = A \cup B,$$

где

$$A = E(x : f'(x) = \infty), \qquad B = E(x : f'(x) = 0)$$

и

$$A = \left(\bigcup_n A_n^+\right) \cup \left(\bigcup_n A_n^-\right), \qquad B = \bigcup_n B_n.$$

Если A — множество не первой категории, то одно из $A_n^{\pm}$ будет плотно на отрезке $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$, длина которого может быть меньше $1/n$. Из определения $A_n^{\pm}$ легко следует, что тогда f будет строго монотонной всюду на нем и, согласно доказанному, существует на нем же множество нужных по теореме точек, что противоречит нашему предположению.

Если же B — множество не первой категории, то на таком же отрезке $[\alpha', \beta']$ функция f будет липшицевой, бесконечных производных у нее не будет, а значит, по условию, будут лишь нулевые производные числа, что означает постоянство функции f по $[\alpha', \beta']$. А это опять-таки невозможно.

Полученные противоречия и доказывают теорему 3.

Выше мы ввели множества $\mathfrak{m}(x; f) = \mathfrak{m}(x)$ правых производных чисел функции f для $x \in [a, b])$.

В [1] доказано следующее свойство „непрерывности” семейства $\{\mathfrak{m}(x),\ x \in [a, b)\}$ этих множеств: на $[a, b]$ существует подмножество ε всюду второй категории, для каждой точки x_0 которого и для произвольной последовательности $x_n \to x_0,\ \ x_n \in [a, b)$, имеем включение $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \mathfrak{m}(x_n) \subset \mathfrak{m}(x)$; грубо говоря, $\mathfrak{m}(x)$ „поглощает” все близкие $\mathfrak{m}(x)$.

Это утверждение можно рассматривать как аналог знаменитой теоремы Бэра о функциях первого класса.

Далее нам потребуется ряд предложений, касающихся дальнейших дифференциальных свойств строго монотонных функций.

Итак, пусть $f(x)$, $x \in [a, b]$ — строго возрастающая функция. Введем множества:

$$A = \{x : f'(x) = +\infty\},\ B = \{x : f'(x) = 0\}\ \text{ и }\ C = \{x : \text{существует}\ \delta(x; f) : 0 < \delta(x) < +\infty\}.$$

Отметим, что в случае, когда A или B плотны на отрезке, они на нем всюду второй категории. В самом деле, (для B) имеем

$$B = \{f' = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{x} \left\{x : \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \frac{1}{n}\ \text{ при }\ 0 < h < \frac{1}{n}\right\},$$

каждое слагаемое (x) содержит некоторый интервал $(x, x+\varepsilon(x))$, $\varepsilon(x) < 1/n$, и их объединение является открытым множеством G_n, плотным на $[a, b]$; тем самым B содержит плотное G_δ, а потому оно второй категории всюду на этом отрезке.

Рассуждения для множества A аналогичны.

Рассмотрим различные варианты для функции f.

1. A плотно на $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Тогда оно является множеством второй категории и можем считать, что все $\mathfrak{m}(x),\ \ x \in [\alpha, \beta]$, содержатся в узких углах с вертикальной стороной: то-

чек множества B нет, все остальные точки принадлежат C, которое полной меры (но первой категории).

2. B плотно на $[\alpha, \beta]$. Тогда оно также является множеством второй категории. Из доказательства следует, что на $[\alpha, \beta]$ имеется открытое плотное множество, в каждом интервале которого f липшицева. Поскольку f строго возрастает, то множество C в каждом интервале на $[\alpha, \beta]$ является множеством положительной меры первой категории.

3. A, B нигде не плотны на $[\alpha, \beta]$. Тогда C содержит плотное открытое его подмножество.

Нам нужна следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть f, g — строго возрастающие функции на $[a, b]$. Найдется плотное на $[a, b]$ множество, в каждой точке которого обе функции имеют правые конечные производные числа, отличные от нуля.*

Доказательство. Наряду с f рассмотрим соответствующие введенным выше множества и для g: $A_1 = \{x\colon g'(x) = \infty\}$, $B_1 = \{x : g'(x) = 0\}$, $C_1 = \{x\colon$ существует $\delta(x; g)\colon 0 < < \delta(x) < \infty\}$.

Нам нужно доказать, что пересечение $C \cap C_1$ плотно на $[a, b]$.

Пусть $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ не содержит точек $C \cap C_1$, т. е. $C_1 \subset A \bigcup B$ и $C_1 \subset A_1 \bigcup B_1$; другими словами, $C_1 \subset B$ и $C \subset B_1$.

Из плотности C_1 следует плотность B и $f \in \mathrm{Lip}$ на $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$, т. е. C_1 — множество всюду положительной меры (и первой категории). Аналогично, на $[\alpha', \beta']$ найдем отрезок $[\alpha'', \beta'']$, на котором C — множество всюду положительной меры (и первой категории).

Рассмотрим на плоскости xOy множество точек („кривую”) с параметрическим представлением $\xi = f(t)$, $\eta = g(t)$, $t \in [a, b]$. Из наших условий следует, что эта кривая представляет собой график строго возрастающий функции $\eta = (\xi)$, по определению, вообще говоря, на несвязном множестве, а именно, на множестве $f([a, b])$, которое может оказаться, например, размерности нуль.

Из нашего построения следует, что, тем не менее, отрезку $[\alpha'', \beta'']$ соответствует одномерная дуга строго возрастающей функции $\eta = \eta(\xi)$, порожденной липшицевыми функциями f, g на этом отрезке. Но тогда на нем найдется всюду плотное множество точек с положительной производной, что противоречит предположению об отсутствии таких точек.

Теорема доказана.

Аналогично доказываются все варианты следующего утверждения: если f, g — произвольные строго монотонные функции на отрезке $[a, b]$, то на нем существует плотное множество, в каждой точке которого существуют конечные и отличные от нуля производные числа, причем для одной функции — правые, а для другой — левые.

Докажем теперь основную в этом пункте теорему.

Теорема 5. *Для произвольной непрерывной на $[a, b]$ функции f найдутся $c_1, c_2 \in (a, b)$ и число $\lambda, 0 < \lambda < 1$, для которых выполняется равенство*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lambda\delta(c_1) + (1 - \lambda)\delta(c_2) = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1},$$

где $\delta(c_2)$, $\delta(c_2)$ — некоторые правые конечные производные числа функции f.

Доказательтво известной подстановкой $f_1(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ сводится к случаю, когда значения функции на концах отрезка совпадают.

Итак, пусть $f(b) = f(a)$ и нам нужно найти соответствующую тройку (c_1, c_2, λ) с условием

$$\lambda\delta(c_1) + (1 - \lambda)\delta(c_2) = 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{\lambda} - 1 = -\frac{\delta(c_2)}{\delta(c_1)}. \tag{2}$$

Поскольку левая часть при $0 < \lambda < 1$ принимает все положительные значения $(0, +\infty)$ и только их, нам достаточно найти произвольные две точки c_1, c_2 с конечными (и отличными от нуля) различных знаков правыми производными числами функции $f = u$ с нужным значением $\dfrac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1}$.

Пусть $x = c$ — экстремальная точка функции на $[a, b]$. Если $f(c) = f(a)$, то $f = \mathrm{const}$ на $[a, b]$ и теорема тривиальна. Пусть $f(c) > f(a)$. Рассмотрим уровни функции f для значений $y \in [f(a), f(c)]$. Крайние значения абсцисс $\overline{x}$ уровня $f(x) = y$ обозначим через $\varphi(y), \psi(y)$: $\varphi(y) < \psi(y)$. Из непрерывности f следует, что обе эти функции полунепрерывны и строго монотонны: φ возрастает; ψ убывает; производные числа φ неотрицательны, а ψ неположительны.

Из теоремы 2 следует, что для плотных подмножеств отрезка $[f(a), f(c)]$ найдутся значения этих чисел, отличные от нуля. А любые такие значения дают решение уравнения (2).

Теорема доказана.

Отметим лишь, что в этой теореме λ может быть равно и 0, и 1, т. е. в ней может оказаться и единственная средняя точка, но зато всегда существует бесконечное множество пар средних точек, с которыми можно „работать” так же, как и с одной средней в классическом случае.

2. Комплексные функции. Что касается теоремы о среднем значении, переход от действительных функций к комплексным (и аналитическим!) резко меняет картину: она, в общем случае, не имеет места... Стремление к полной аналогии с классическим случаем приводило к необходимости накладывать дополнительные геометрические и аналитические ограничения [2–4].

Однако отметим, что локально теорема о среднем для аналитической функции $f(z), z \in D \subset \mathbb{C}$ все же справедлива, т. е. для каждой точки $z_0 \in D$ и для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta \leq \varepsilon$, что для любой пары точек a, b из δ-окрестности $U_\delta(z_0)$ будет справедливо равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

где точка $\underline{c}$ принадлежит ε-окрестности точки z_0.

Но результат, полученный нами выше для действительных функций, подсказывает, что подобный может оказаться верным и для комплексных. Убедимся, что он полностью переносится на этот случай.

Пусть в области $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ заданы аналитическая функция $f(z)$ и прямолинейный отрезок l с концами a, b. Формула

$$\tau = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \int\limits_0^1 f'(a+t(b-a))dt$$

с точки зрения механики дает центр тяжести f'-образа $L = f'(l)$, рассматриваемого как однородная гладкая кривая, который, как известно, принадлежит выпуклой оболочке этой кривой.

Из той же формулы легко следует, например, что если Im $f'(z) \neq 0$ в некоторых точках l, то этот центр тяжести не принадлежит действительной оси; но конечно, если Im $f' = 0$ всюду на l, то этот центр принадлежит прямолинейному отрезку L.

Отсюда непосредственно следует, что в общем случае, когда Im $f' \not\equiv 0$ на l, τ оказывается внутренней точкой выпуклой оболочки $O(L)$ кривой L.

Докажем, что найдется прямая S, проходящая через точку τ, которая своими обоими лучами пересекает кривую L в точках ζ_1, ζ_2 так, что отрезки $\tau\zeta_1, \tau\zeta_2$ не содержат других точек пересечения с L.

Проведем все прямолинейные лучи $\tau\zeta$ до первых точек их пересечения с кривой L. Если сама кривая L проходит через точку τ, то зафиксируем то значение на отрезке l, в котором $f'(\zeta) = \tau$. Если же крайние лучи $\tau\zeta$ при нашем построении образуют угол, меньший π, то τ не будет даже граничной точкой оболочки $O(L)$. Отсюда и следует наше утверждение о существовании нужной прямой. Обозначив точки отрезка l, соответствующие точкам ζ_1, ζ_2, через c_1 и c_2, мы можем сформулировать доказанное в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть в области $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ заданы аналитическая функция $f(z)$ и прямолинейный отрезок l с концами a, b. Тогда найдутся число $\lambda \in [0,1]$ и на этом отрезке точки c_1, c_2, для которых выполняется равенство*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lambda f'(c_1) + (1-\lambda) f'(c_2) = \frac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1}.$$

Заметим, что λ может быть равно 0 (или 1, что одно и то же) и можно получить вместо двух средних точек отрезка l одну. И все же, вспоминая наше доказательство и учитывая открытость отображения $w = f'(z)$, можно отметить, что на l найдутся два интервала, в которых все точки играют роль c_1, c_2; т. е. выбрав в одном из них c_1, мы найдем в другом такое c_2, что при подходящем λ будет сохранено прежнее равенство — при одной и той же левой части!

Как и в случае действительных функций, из этой теоремы мы получаем формулировку теоремы о среднем уже для произвольной голоморфной функции в области $D \subset \mathbb{C}^n$:

$$f(b)-f(a) = \Delta f = df + \frac{d^2 f}{2!} + \ldots + \frac{d^{n-1} f}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\left(\lambda d^n f\big|_{c_1} + (1-\lambda) d^n f\big|_{c_2}\right),$$

где c_1, c_2 — точки отрезка $\overline{ab} \subset D$; эти точки заполняют некоторые интервалы этого отрезка.

1. *Трохимчук Ю. Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 538 с.
2. *Ievirtz J.* On the wean value theorem for analytic functions // Mich. Math. J. – 1986. – **33**. – P. 365–375.
3. *Радзиевская Е. И., Радзиевский Г. В.* Для голоморфной в области функции остаточный член в формуле Тейлора допускает запись в формуле Лагранжа // Сиб. мат. журн. – 2003. – **44**, № 2. – С. 402–414.
4. *Гомилко А. М., Радзиевская Е. И., Радзиевский Г. В.* Локальная теорема о среднем для разделенных разностей голоморфных функций // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 1. – С. 82–95.

Получено 10.10.12