УДК 510.22 + 51-71

Я. І. Грушка (Ін-т математики НАН України, Київ)

БАЗОВІ МІНЛИВІ МНОЖИНИ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЇ СИСТЕМ

We introduce the notion of basic variable sets and study the principal properties of these sets. The basic variable sets are required for the construction of the general theory variable sets. The problem studied in the paper is closely connected with the famous sixth Hilbert problem.

Вводится понятие базового изменчивого множества и исследуются основные свойства таких множеств. Базовые изменчивые множества технически необходимы для построения общей теории изменчивых множеств. Тематика работы тесно связана с известной шестой проблемой Гильберта.

Вступ. Досягнення сучасної теоретичної фізики широко відомі, але проблема математично строгого обґрунтування її основ, тобто шоста проблема Гільберта, залишається відкритою і сьогодні [1 – 3]. Окремі напрямки формалізації певних фізичних теорій було запропоновано в роботах [4 – 9]. Зауважимо, що в зазначених роботах не було сформульовано єдиного абстрактного підходу. Тому математичний апарат цих робіт виглядає штучним і недостатньо гнучким. Взагалі, головною особливістю існуючих математично строгих моделей теоретичної фізики є їхня складність і громіздкість, в той час як математично строге визначення і формулювання найбільш елементарних (базових) фізичних понять та постулатів, отриманих на основі дослідів, життєвого досвіду або ж здорового глузду (які і привели до появи цих математичних моделей) залишаються нерозв'язаною задачею. В роботах [10, 11] висловлюється думка, що загальне розв'язання цієї задачі в рамках існуючих на даний час математичних теорій є неможливим, і ставиться проблема побудови теорії „динамічних множин" — нових абстрактних математичних структур, у рамках яких можна було б строго математично моделювати різноманітні процеси в фізичних, біологічних та інших складних системах.

У даній роботі досліджуються *базові мінливі множини*, які можна інтерпретувати як математичну абстракцію моделей фізичних та інших процесів макросвіту в певній фіксованій системі відліку. В цій роботі описано з абстрактної математично строгої точки зору таке базове поняття фізики, як еволюція систем. Базові мінливі множини є технічно необхідними для побудови більш загальної теорії *мінливих множин* — сукупностей об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати у процесі постійних трансформацій, а також змінювати свої властивості залежно від способу спостереження (тобто, фактично, системи відліку). Теорію мінливих множин можна вважати відповіддю на проблему, поставлену в [10, 11]. Зауважимо, що основні положення теорії мінливих множин було анонсовано в [16].

Опишемо коротко структуру статті.

Теорія базових мінливих множин будується на математичних об'єктах „нижчого рівня ієрархії" — примітивних мінливих множинах [17, 18]. Тому для зручності подальшого викладу у першому пункті наведено основні тези робіт [17, 18].

У другому пункті введено поняття елементарно-часового стану і на конкретному прикладі показано, що напрямного відношення змін, заданого на множині елементарних станів довільної примітивної мінливої множини, недостатньо для адекватного і водночас зручного опису еволюції елементарно-часових станів. У зв'язку з цим введено поняття бази елементарних процесів (певного бінарного відношення на множині елементарно-часових станів, яке „в проекції” на множину елементарних станів дає напрямне відношення змін) і наведено означення базової мінливої множини (як примітивної мінливої множини разом з певною базою елементарних процесів, визначеною на ній). Також у цьому пункті наведено приклади базових мінливих множин і доведено, що довільна система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ генерує деяку базову мінливу множину $\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)$.

У третьому пункті дано означення лінії долі довільної базової мінливої множини і доведено, що множина всіх ліній долі є системою абстрактних траєкторій, яка генерує вихідну базову мінливу множину. Це, зокрема, означає, що довільну базову мінливу множину завжди можна породити з допомогою певної системи абстрактних траєкторій. Також у цьому пункті обговорюється проблема відновлення вихідних траєкторій базової мінливої множини вигляду $\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)$ за допомогою її ліній долі. На конкретному прикладі доведено, що в загальній ситуації розв'язання зазначеної проблеми негативне, і наведено найпростіший клас частинних випадків, коли дана проблема має позитивне розв'язання.

В четвертому пункті введено поняття мінливої системи і процесу базової мінливої множини і побудовано природну взаємно однозначну відповідність між мінливими системами і процесами довільної базової мінливої множини. З точки зору механіки ці поняття можна інтерпретувати як абстрактний аналог поняття фізичного тіла зі змінним складом, а з теоретико-множинної точки зору поняття мінливої системи є аналогом поняття „підмножини” в класичній („статичній”) теорії множин. Також на основі поняття лінії долі введено поняття елементарного процесу і обґрунтовано, що елементарні процеси можуть служити аналогом елементів у класичній теорії множин.

1. Примітивні мінливі множини та їх основні властивості. ***1.1. Мотивація. Орієнтовані множини.*** Коли спробувати подивитися з найбільш абстрактної точки зору на будь-яку картину реальної дійсності (область реальності), то можна лише сказати, що така картина в кожну мить свого існування складається з певних предметів (об'єктів). У процесі наукового дослідження заданої області реальності предмети, з яких вона складається, розбивають на дрібніші, елементарні, об'єкти, які ми будемо називати елементарними станами. Спосіб розбиття заданої області реальності на елементарні стани залежить від рівня наших знань про цю область, від необхідного для практики рівня деталізації досліджень або ж від рівня фізико-математичної ідеалізації досліджуваної системи. В залежності від зазначених факторів елементарними станами можуть бути, наприклад, положення матеріальної точки чи елементарної частинки в заданий момент часу, значення скалярного, векторного чи тензорного поля в заданій точці простору-часу, стан особини того чи іншого біологічного виду в заданий момент часу (в математичних моделях біології) та ін. І якщо б картина реальної дійсності не змінювалася з часом, то для опису такої картини реальної дійсності (в найбільш абстрактній формі) цілком би вистачило класичної теорії множин, коли елементарні стани ототожнюються з елементами певної множини. Проте реальна дійсність мінлива. Елементарні стани в процесі еволюції можуть змінювати свої властивості (а отже, втрачати свою формально-математичну самототожність), зникати або народжуватись, розпадатися на декілька елементарних станів або ж, навпаки, декілька елементарних можуть зливатись в один. Але здоровий глузд підказує, що завжди, коли є можливість прослідкувати „лінії еволюції” досліджуваної системи, можна чітко відповісти на питання: чи є елементарний стан „y" результатом трансформацій (тобто „трансформаційним нащадком") елементарного стану „x"? Отже, найпримітивнішу (стартову) модель сукупності мінливих об'єктів можна описати з допомогою наступного означення.

Означення 1.1. *Нехай M — довільна непорожня множина ($M \neq \varnothing$). Довільне рефлексивне бінарне відношення $\Lleftarrow$ на M (тобто таке, що $\forall x \in M$ $x \Lleftarrow x$) будемо називати **орієнтацією**, а пару $\mathcal{M} = (M, \Lleftarrow)$ — **орієнтованою множиною**. При цьому множину M будемо називати **базовою**, або множиною всіх **елементарних станів** орієнтованої множини $\mathcal{M}$ і позначатимемо її через $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, а відношення $\Lleftarrow$ будемо називати **напрямним відношенням змін (трансформацій)** $\mathcal{M}$ і позначатимемо його через $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$.*

Якщо відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ йде мова, в позначенні $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ символом $\mathcal{M}$ будемо нехтувати, використовуючи позначення $\leftarrow$. Для елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ запис $y \leftarrow x$ слід розуміти як „елементарний стан y є результатом трансформацій, або трансформаційним нащадком елементарного стану x".

***Зауваження* 1.1.** Певні спроби побудови абстрактних математичних структур для моделювання фізичних систем зроблено в роботах [8, 9], де в якості базової абстрактної моделі запропоновано розглядати пару вигляду

$$(M, \prec), \tag{1.1}$$

M — деяка множина, $\prec$ — бінарне відношення на M, що задовольняє наступні умови:

(Pm_1) не існує елементів $x, y \in M$ таких, що $x \prec y$ і $y \prec x$;

(Pm_2) для довільного $p \in M$ відношення $\prec$ є транзитивним на множинах

$$p_+ = \{x \in M \mid p \prec x\}, \quad p_- = \{x \in M \mid x \prec p\}, \tag{1.2}$$

а також додаткові аксіоми $\mathrm{TK}_1 - \mathrm{TK}_3$ [9]. Головним недоліком даного підходу є те, що автор відштовхувався не від абстрактно-філософських міркувань, а від конкретного прикладу відношення порядку, породженого „світловим конусом" у просторі часу Мінковського [9, с. 15], що в свою чергу породило накладання додаткових штучних аксіом і зробило запропоновану модель недостатньо гнучкою. Зокрема, завдяки топологічним аксіомам $\mathrm{TK}_1 - \mathrm{TK}_3$ [9] дана модель непридатна для опису дискретних процесів, а завдяки аксіомі (Pm_2) (ослабленому варіанту транзитивності) недостатньо зручна для розгляду на абстрактному рівні складних гіллястих процесів, у яких різні „гілки" процесу можуть „перетинатись" або „зливатись" під час трансформацій. Крім того, побудова математичної моделі спеціальної теорії відносності на основі відношення порядку „світлового конуса" робить неможливим математично строге дослідження тахіонів у рамках цієї моделі, тоді як побудова формальної теорії тахіонів є одним із актуальних напрямків сучасної теоретичної і математичної фізики [12, 13].

Зазначимо, що моделі робіт [8, 9] можна розглядати як частинні випадки орієнтованих множин, визначених в означенні 1.1. Справді, спочатку відкинемо аксіоми топологічного характеру $\mathrm{TK}_1 - \mathrm{TK}_3$, оскільки вони лише зменшують загальність даних моделей, і розглянемо пару вигляду (1.1), де відношення $\prec$ задовольняє умови (Pm_1), (Pm_2). Враховуючи умову (Pm_1), без обмеження загальності замість відношення $\prec$ можна розглядати відношення

$$\preceq = \prec \cup \{(x, x) \mid x \in M\}, \tag{1.3}$$

тобто таке відношення, що для довільних $x, y \in M$ умова $x \preceq y$ має місце тоді і тільки тоді, коли $x \prec y$ або $x = y$. Справді, з умови (Pm_1) випливає, що об'єднання у правій частині (1.3) є диз'юнктним, тобто відношення $\prec$ однозначно відновлюється за відношенням $\preceq$ ($\prec = \preceq \setminus \{(x,x) \mid x \in M\}$). (Зауважимо, що, згідно з теорією відношень, довільне бінарне відношення на множині M є підмножиною її декартового квадрата $M \times M$, тому застосування теоретико-множинних операцій до бінарних відношень є коректним.) Отже, модель (1.1) еквівалентна моделі $(M, \preceq)$, в якій відношення $\preceq$ вже є рефлексивним, але ще й, додатково, асиметричним і транзитивним на множинах вигляду (1.2) (нагадаємо, що асиметричність відношення $\preceq$ означає, що для довільних $x, y \in M$ з умов $x \preceq y$ і $y \preceq x$ випливає, що $x = y$). Таким чином, у роботах [8, 9] відношення $\preceq$ крім рефлексивності повинно задовольняти ще й додаткові обтяжуючі умови асиметричності і транзитивності на множинах вигляду (1.2), в той час як в означенні 1.1 напрямне відношення змін є лише рефлексивним. Неважко навести безліч прикладів рефлексивних, але не асиметричних і тим більше не транзитивних на множинах вигляду (1.2) бінарних відношень.

Зазначимо, що крім більшої загальності моделі, запропонованої в цій роботі, в порівнянні з моделями Піменова [8, 9], між зазначеними моделями існує ще й певна „ідеологічна" відмінність у способі трактування. Справа в тому, що напрямне відношення змін в означенні 1.1 на відміну від відношення $\prec$ в роботах [8, 9] відображає лише **реальні** трансформації елементарних станів модельованої системи, а не всі „потенційно можливі", „дозволені" (як, наприклад, порядок „світлового конусу" в просторі Мінковського). Отже, розглядаючи певну примітивну (або базову) мінливу множину, ми завжди уявляємо конкретну еволюцію якоїсь конкретної системи, а не всі потенційно можливі напрямки еволюції певної групи систем, що задовольняють певні умови.

Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.

Означення 1.2. *Непорожня підмножина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **транзитивною** в $\mathcal{M}$, якщо для довільних $x, y, z \in N$ з умов $z \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$ випливає умова $z \leftarrow x$.*

*Транзитивна множина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **максимально транзитивною** в $\mathcal{M}$, якщо не існує транзитивної множини $N_1 \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такої, що $N \subset N_1$ (тут знак $\subset$ означає строге включення, тобто $N \neq N_1$).*

*Транзитивна підмножина $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **ланцюгом** в $\mathcal{M}$, якщо для довільних $x, y \in L$ має місце хоча б одне із співвідношень $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$. Ланцюг $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **максимальним ланцюгом** в $\mathcal{M}$, якщо не існує ланцюга $L_1 \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такого, що $L \subset L_1$.*

Твердження 1.1. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.*

1. *Довільна непорожня підмножина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, яка містить не більше двох елементів, є транзитивною.*

2. *Не більш ніж двохелементна непорожня підмножина $L = \{x, y\} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ є ланцюгом тоді і тільки тоді, коли $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$. Зокрема, одноелементна підмножина $L = \{x\} \subseteq \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ завжди є ланцюгом.*

Доведення твердження 1.1 зводиться до тривіальної перевірки.

Твердження 1.2 [17, 18]**.** 1. *Для довільної транзитивної множини N в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимально транзитивна множина $N_{\max}$ така, що $N \subseteq N_{\max}$.*

2. *Для довільного ланцюга L в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимальний ланцюг $L_{\max}$ такий, що $L \subseteq L_{\max}$.*

Зауважимо, що другий пункт твердження 1.2 можна вважати узагальненням принципу максимальності Хаусдорфа в рамках даної теорії.

З тверджень 1.2 та 1.1 випливає наступний наслідок.

***Наслідок* 1.1.** 1. *Для довільних двох елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимально-транзитивна множина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ така, що $x, y \in N$.*

2. *Для довільних двох елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ таких, що $y \leftarrow x$, в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимальний ланцюг $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такий, що $x, y \in L$.*

Покладаючи $x = y$ (враховуючи, що, за означенням, множина $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ непорожня), приходимо до висновку, що в довільній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ завжди існують максимально-транзитивні множини і максимальні ланцюги.

1.2. Означення часу. Примітивні мінливі множини. В теоретичній фізиці звикли вважати моменти часу дійсними числами. Проте абстрактна математика може мати справу з об'єктами довільної потужності. Тому в даній абстрактній теорії ми не будемо обмежуватись дійсно-числовими моментами часу. В наступному означенні в якості моментів часу можуть використовуватись елементи довільної лінійно впорядкованої множини (в сенсі [14, с. 12]). Таке розуміння часу близьке до філософського уявлення про час як певний „хронологічний порядок”, узгоджений з процесами змін.

Означення 1.3. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно впорядкована множина. Відображення $\psi\colon \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ називається **часом** на $\mathcal{M}$, якщо виконуються такі умови*:

1) *для довільного елементарного стану $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ існує елемент $t \in \mathbf{T}$ такий, що $x \in \psi(t)$;*

2) *якщо $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$, то існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$ (тобто має місце часова відокремленість послідовних неоднакових елементарних станів).*

*При цьому елементи $t \in \mathbf{T}$ будемо називати **моментами часу**, пару $\mathcal{H} = (\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ — **хронологізацією** $\mathcal{M}$, а трійку*

$$\mathcal{P} = (\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$$

*— **примітивною мінливою множиною**.*

***Зауваження* 1.2.** Легко бачити, що умови 1, 2 означення 1.3 є логічно незалежними. Справді, розглянемо довільну орієнтовану множину $\mathcal{M}$, що задовольняє умову

$$\text{існують} \quad x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \quad \text{такі, що} \quad y \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x \quad \text{і} \quad x \neq y. \tag{1.4}$$

Зрозуміло, що існує безліч орієнтованих множин (тобто реляційних систем з одним рефлексивним бінарним відношенням), що задовольняють умову (1.4). Також розглянемо довільну лінійно впорядковану множину $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ і зафіксуємо довільний елемент $t_0 \in \mathbf{T}$. Побудуємо відображення $\psi\colon \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ за формулою

$$\psi(t) := \begin{cases} \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}), & t = t_0, \\ \varnothing, & t \neq t_0. \end{cases}$$

Таке відображення ψ задовольняє першу умову означення 1.3, але не задовольняє другу.

З іншого боку, розглянемо орієнтовану множину $\mathcal{M} = \left(\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}), \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}\right)$, в якій множина $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ складається з трьох елементів:

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) := \{x_1, x_2, x_3\},$$

а напрямне відношення змін задається множиною пар

$$\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} = \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_2, x_1)\}.$$

Розглянемо також лінійно впорядковану множину $\mathbb{T} = (\mathbb{N}, \leq)$, де $\leq$ — стандартне відношення порядку на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$. Покладемо

$$\psi(t) := \begin{cases} \{x_1\}, & t = 1, \\ \{x_2\}, & t = 2, \\ \varnothing, & t \notin \{1, 2\}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{N}.$$

Таке відображення $\psi\colon \mathbb{N} \mapsto 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ задовольняє другу умову означення 1.3, але не задовольняє першу.

***Зауваження* 1.3.** Використання лінійно впорядкованих множин в якості „часових шкал” зустрічається також в роботах [8, 9], проте означення часу, запропоноване в цих роботах, істотно відрізняється від означення 1.3 і, в цілому, є менш загальним (оскільки, як було зазначено вище, менш загальною є сама модель, запропонована у [8, 9]).

Будемо говорити, що орієнтовану множину $\mathcal{M}$ ***можна хронологізувати***, якщо існує хоча б одна хронологізація $\mathcal{M}$. Виявляється, що будь-яку орієнтовану множину завжди можна хронологізувати. Найпримітивніший спосіб це зробити — взяти лінійно впорядковану множину $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, що містить не менше двох елементів, і покласти $\psi(t) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}),\ t \in \mathbf{T}$. Більш нетривіальні способи хронологізації орієнтованих множин розглянуто в роботах [17, 18]. Зокрема, там доведено теореми про існування часу та існування і єдиність внутрішнього („найбільш природного”) часу на орієнтованій множині із заданою синхронізацією.

***Зауваження* 1.4.** Далі примітивні мінливі множини будемо позначати каліграфічними великими буквами. Нехай $\mathcal{P} = (\mathcal{M}, \mathbb{T}, \phi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \trianglelefteq), \phi)$ — примітивна мінлива множина. Введемо наступні позначення:

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}); \quad \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}; \quad \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) := \mathbf{T}; \quad \leq_{\mathcal{P}} := \trianglelefteq; \quad \psi_{\mathcal{P}} := \phi.$$

Також будемо використовувати позначення $\geq_{\mathcal{P}}$, $<_{\mathcal{P}}$, $>_{\mathcal{P}}$ для оберненого, строгого та строгого оберненого порядку, породженого нестрогим порядком $\leq_{\mathcal{P}}$. Множину $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ будемо називати *базовою множиною*, або множиною *всіх елементарних станів* примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$. Елементи множини $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ будемо називати *елементарними станами* $\mathcal{P}$, а відношення $\underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}$ — *напрямним відношенням змін* $\mathcal{P}$. Множину $\mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ будемо називати *множиною моментів часу* $\mathcal{P}$. Відношення $\leq_{\mathcal{P}}$, $<_{\mathcal{P}}$, $\geq_{\mathcal{P}}$, $>_{\mathcal{P}}$ будемо називати відповідно відношеннями нестрогого, строгого, нестрогого оберненого і строгого оберненого *часового порядку* на $\mathcal{P}$. Відображення $\psi_{\mathcal{P}}\colon \mathbf{Tm}(\mathcal{P})\colon \mapsto 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})}$ будемо називати часом на $\mathcal{P}$. У випадку, коли зрозуміло, про яку примітивну мінливу множину $\mathcal{P}$ йде мова, в позначеннях $\underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}$, $\leq_{\mathcal{P}}$, $<_{\mathcal{P}}$, $\geq_{\mathcal{P}}$, $>_{\mathcal{P}}$, $\psi_{\mathcal{P}}$ символом $\mathcal{P}$ будемо нехтувати, використовуючи замість них позначення $\leftarrow$, $\leq$, $<$, $\geq$, $>$, ψ відповідно.

1.3. Системи абстрактних траєкторій і примітивні мінливі множини, породжені ними.

Означення 1.4. *Нехай M — довільна непорожня множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна лінійно впорядкована множина.*

1. *Відображення $r \colon \mathfrak{D}(r) \mapsto M$ $(\mathfrak{D}(r) \neq \varnothing)$ будемо називати **абстрактною траєкторією** з $\mathbb{T}$ в M, якщо $\mathfrak{D}(r) \subseteq \mathbf{T}$ (де $\mathfrak{D}(r)$ — область визначення траєкторії r).*

2. ***Системою абстрактних траєкторій** з $\mathbb{T}$ в M будемо називати довільну множину $\mathcal{R}$, елементами якої є абстрактні траєкторії з $\mathbb{T}$ в M, таку, що*

$$\bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathfrak{R}(r) = M$$

(де $\mathfrak{R}(r)$ — область значень абстрактної траєкторії r).

Теорема 1.1 [17, 18]. *Для довільної системи $\mathcal{R}$ абстрактних траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M існує, причому єдина, примітивна мінлива множина $\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ така, що:*

1. $\mathfrak{Bs}(\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R})) = M$, $\mathbf{Tm}(\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R})) = \mathbf{T}$, $\leq_{\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R})} = \leq$.

2. *Для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R})\right) = M$ умова $y \leftarrow x$ має місце тоді і тільки тоді, коли існують абстрактна траєкторія $r = r_{x,y} \in \mathcal{R}$ та елементи $t, \tau \in \mathfrak{D}(r)$ такі, що $x = r(t)$, $y = r(\tau)$ і $t \leq \tau$.*

3. *Для довільних $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R})\right) = M$ і $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R})) = \mathbf{T}$ умова $x \in \psi(t)$ має місце тоді і тільки тоді, коли існує абстрактна траєкторія $r = r_x \in \mathcal{R}$ така, що $t \in \mathfrak{D}(r)$ і $x = r(t)$.*

У випадку, коли це не викликає непорозумінь, замість позначення $\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ часто будемо використовувати позначення $\mathcal{A}tp(\mathcal{R})$.

2. Елементарно-часові стани та базові мінливі множини. ***2.1. Елементарно-часові стани примітивних мінливих множин та їхні властивості.***

Означення 2.1. *Нехай $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина. Пару (t, x) $(x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P}))$ будемо називати **елементарно-часовим станом**, якщо $x \in \psi(t)$.*

Множину всіх елементарно-часових станів $\mathcal{P}$ будемо позначати через $\mathbb{Bs}(\mathcal{P})$:

$$\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) := \left\{\omega \mid \omega = (t, x)\,, \text{ де } \ t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P}),\ x \in \psi(t)\right\}.$$

Для елементарно-часового стану $\omega = (t, x) \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ введемо позначення

$$\mathsf{bs}\,(\omega) := x, \quad \mathsf{tm}\,(\omega) := t.$$

***Зауваження* 2.1.** З означень 1.1 та 1.3 випливає, що $\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) \neq \varnothing$ для довільної примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$.

Означення 2.2. *Будемо вважати, що елементарно-часовий стан $\omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ **формально послідовний** елементарно-часовому стану $\omega_1 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$, і позначатимемо*

$$\omega_2 \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} (\mathrm{f})\, \omega_1,$$

якщо $\omega_1 = \omega_2$ або $\mathsf{bs}\,(\omega_2) \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} \mathsf{bs}\,(\omega_1)$ і $\mathsf{tm}\,(\omega_1) <_{\mathcal{P}} \mathsf{tm}\,(\omega_2)$.

Якщо це не викликає непорозумінь, замість позначення $\omega_2 \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} (\mathrm{f})\, \omega_1$ будемо використовувати позначення $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$.

Твердження 2.1. 1. *Якщо* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ *і* $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$, *то* $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. *Якщо, додатково,* $\omega_1 \neq \omega_2$, *то* $\mathsf{tm}\,(\omega_1) < \mathsf{tm}\,(\omega_2)$.

2. *Відношення* $\leftarrow (\mathrm{f}) = \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} (\mathrm{f})$ *є асиметричним відношенням на множині* $\mathbb{Bs}(\mathcal{P})$, *тобто якщо* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$, $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$ *і* $\omega_1 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_2$, *то* $\omega_1 = \omega_2$.

Доведення. Перший пункт цього твердження є наслідком означення 2.2, а другий пункт випливає з першого пункту.

Означення 2.3. *Орієнтована множина* $\mathcal{M}$ *називається* ***антициклічною****, якщо для довільних* $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ *з умов* $x \leftarrow y$ *і* $y \leftarrow x$ *випливає* $x = y$.

Твердження 2.2. *Нехай* $\mathcal{P}$ — *примітивна мінлива множина. Тоді*:

1. *Пара* $\mathcal{Q} = \left(\mathbb{Bs}(\mathcal{P}), \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} (\mathrm{f})\right) = (\mathbb{Bs}(\mathcal{P}), \leftarrow (\mathrm{f}))$ *є антициклічною орієнтованою множиною.*

2. *Відображення*

$$\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}_{\mathcal{P}}(t) := \{\omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P}) \mid \mathsf{tm}\,(\omega) = t\} \in 2^{\mathbb{Bs}(\mathcal{P})}, \quad t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P}), \tag{2.1}$$

є часом на $\mathcal{Q}$.

3. *При* $t_1 \neq t_2 \quad \tilde{\psi}\,(t_1) \cap \tilde{\psi}\,(t_2) = \varnothing$.

Доведення. 1. Перший пункт твердження 2.2 випливає з означення 2.2 та другого пункту твердження 2.1.

2.1. Нехай $\omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$. Тоді згідно з (2.1) $\omega \in \tilde{\psi}(t)$, де $t = \mathsf{tm}\,(\omega)$.

2.2. Нехай $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$, $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$ і $\omega_1 \neq \omega_2$. Згідно з (2.1) для $t_1 = \mathsf{tm}\,(\omega_1)$, $t_2 = \mathsf{tm}\,(\omega_2)$ отримуємо

$$\omega_1 \in \tilde{\psi}\,(t_1)\,, \quad \omega_2 \in \tilde{\psi}\,(t_2)\,.$$

Оскільки $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$ і $\omega_2 \neq \omega_1$, то за пунктом 1 твердженням 2.1 $t_1 < t_2$.

З пунктів 2.1, 2.2 випливає, що $\tilde{\psi}$ є часом на $\mathcal{Q}$.

3. Нехай $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$. Припустимо, що $\tilde{\psi}\,(t_1) \cap \tilde{\psi}\,(t_2) \neq \varnothing$. Тоді існує елементарно-часовий стан $\omega \in \tilde{\psi}\,(t_1) \cap \tilde{\psi}\,(t_2)$. Звідси згідно з (2.1) отримуємо $t_1 = \mathsf{tm}\,(\omega) = t_2$.

2.2. База елементарних процесів та базові мінливі множини. Як було доведено у твердженні 2.2, для довільної примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$ пара $(\mathbb{Bs}(\mathcal{P}), \leftarrow (\mathrm{f}))$ є орієнтованою множиною, в якій відношення $\leftarrow (\mathrm{f})$ є напрямним відношенням змін (трансформацій). Проте виявляється, що насправді це відношення може „генерувати" такі „трансформації" елементарно-часових станів, яких реально ніколи не було у фізичній системі. Для ілюстрації цієї думки розглянемо наступний приклад.

***Приклад* 2.1.** Розглянемо систему абстрактних траєкторій, що описує рівномірний прямолінійний рух континуальної системи однакових матеріальних точок, рівномірно розподіленої по прямій, вздовж якої вони рухаються. Однаковість всіх матеріальних точок означає, що всі характеристики цих точок визначаються виключно їхніми координатами у певний момент часу. Тобто точка, яка має певні координати, в певний момент часу повністю математично тотожна тій точці, що мала ці ж самі координати, але в інший момент часу. Таку систему рухомих матеріальних точок можна, наприклад, задати за допомогою наступної системи абстрактних траєкторій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{R} = \{r_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}\,, \tag{2.2}$$

де

$$r_\alpha(t) := t + \alpha, \quad t \in \mathbb{R}, \;\; \alpha \in \mathbb{R} \qquad (\mathfrak{D}\,(r_\alpha) = \mathbb{R}, \;\alpha \in \mathbb{R}).$$

Покладемо

$$\mathcal{P} := \mathcal{A}tp((\mathbb{R}, \leq)\,, \mathcal{R}),$$

де $\leq$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел.

Згідно з умовою 1 теореми 1.1, $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) = \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}$. Доведемо, що для елементів $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}$ умова $x_2 \leftarrow x_1$ рівносильна умові $x_1 \leq x_2$. Справді, якщо $x_1 \leq x_2$, то для $t_1 = x_1$, $t_2 = x_2$ маємо $x_1 = r_0\,(t_1)\,,\, x_2 = r_0\,(t_2)\,,$ де $t_1 \leq t_2$. Отже, згідно з умовою 2 теореми 1.1, $x_2 \leftarrow x_1$. Навпаки, якщо $x_2 \leftarrow x_1$, то за умовою 2 теореми 1.1 існують числа $\alpha, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ такі, що $t_1 \leq t_2$, $x_1 = r_\alpha\,(t_1)\,,\, x_2 = r_\alpha\,(t_2)\,,$ тобто $x_1 = t_1 + \alpha$, $x_2 = t_2 + \alpha$, де $t_1 \leq t_2$. Звідси $x_1 \leq x_2$.

Доведемо, що $\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, де символ $\times$ означає декартовий добуток. Оскільки $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) = \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}$, то $\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Отже, залишилося довести обернене включення. Нехай $\omega = (\tau, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Покладемо $\alpha_\omega := x - \tau$. Тоді $r_{\alpha_\omega}(\tau) = \tau + (x - \tau) = x$. Отже, за умовою 3 теореми 1.1 $x \in \psi_{\mathcal{P}}(\tau)$. А це означає, що $\omega = (\tau, x) \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$. Рівність $\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ доведено.

За означенням 2.2 формально послідовних елементарно-часових станів для $\omega_1 = (t_1, x_1)\,,$ $\omega_2 = (t_2, x_2) \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ умова $\omega_2 \leftarrow\!(\mathrm{f})\,\omega_1$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\omega_1 = \omega_2$ або $t_1 < t_2$ і $x_1 \leq x_2$. Отже, якщо ми виберемо довільні елементарно-часові стани $\omega_1 = (t_1, x_1)\,,$ $\omega_2 = (t_2, x_2) \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ таким чином, щоб виконувались умови $t_1 < t_2$ і $x_1 \leq x_2$, то отримаємо $\omega_2 \leftarrow\!(\mathrm{f})\,\omega_1$. Але якщо при цьому $x_1 - t_1 \neq x_2 - t_2$, то не існує жодної траєкторії $r_\alpha \in \mathcal{R}$ такої, що $\omega_1, \omega_2 \in r_\alpha$. Це означає, що в реальному фізичному процесі при умові $x_1 - t_1 \neq x_2 - t_2$ елементарно-часовий стан ω_2 не є результатом трансформацій елементарно-часового стану ω_1. Таким чином, в даному прикладі, відношення $\leftarrow\!(\mathrm{f})$ породжує безліч „паразитичних трансформаційних зв'язків", які ніколи не існували в реальності.

Існує спосіб виходу із наведеної вище незручної ситуації шляхом введення формальної „ознаки неоднаковості" матеріальних точок, що рухаються по зазначених траєкторіях. Наприклад, замість системи абстрактних траєкторій (2.2) можна було б розглянути систему абстрактних траєкторій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$ вигляду

$$\mathcal{R} = \{r_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,,$$

де

$$r_\alpha(t) := (t + \alpha,\, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Зазначимо, що число α у другій координаті $r_\alpha(t)$ слід розуміти не як просторову координату, а як „номер" траєкторії r_α. Проте такий підхід в абстрактній ситуації є недостатньо зручним, оскільки він може ускладнити опис на абстрактному рівні різноманітних „гіллястих процесів", коли елементарні стани в процесі еволюції „розпадаються" на декілька, або, навпаки, декілька елементарних станів „зливаються" в один.

Інший (більш гнучкий) спосіб виходу із наведеної вище ситуації — задати „напрямне відношення змін" не лише на множині елементарних станів $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$, але й на множині елементарно-часових станів $\mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ примітивної мінливої множини. Справді, якщо в прикладі 2.1 для $\omega_1 = (t_1, x_1)\,,$ $\omega_2 = (t_2, x_2) \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ покласти $\omega_2 \Lleftarrow \omega_1$ тоді і тільки тоді, коли $t_1 \leq t_2$ і існує траєкторія $r_\alpha \in \mathcal{R}$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in r_\alpha$ (тобто така, що $x_1 = r_\alpha\,(t_1)\,,\, x_2 = r_\alpha\,(t_2)$), таке відношення $\Lleftarrow$ буде відображати лише ті трансформації елементарно-часових станів, які мають місце в реальності.

Означення 2.4. *Нехай $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина.*

1. *Відношення* $\Leftarrow$ *на* $\mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ *будемо називати* ***базою елементарних процесів*** *в* $\mathcal{P}$, *якщо*:

а) $\forall\, \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})\ \omega \Leftarrow \omega$;

б) *якщо* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ *і* $\omega_2 \Leftarrow \omega_1$, *то* $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$ (*тобто* $\Leftarrow\ \subseteq\ \leftarrow(\mathrm{f})$);

в) *для довільних* $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ *таких, що* $x_2 \leftarrow x_1$, *існують* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ *такі, що* $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x_1$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_2$ *і* $\omega_2 \Leftarrow \omega_1$.

2. *Якщо* $\mathcal{P}$ — *примітивна мінлива множина і* $\Leftarrow$ — *база елементарних процесів на* $\mathcal{P}$, *то пару*

$$\mathcal{B} = (\mathcal{P}, \Leftarrow)$$

будемо називати ***базовою мінливою множиною***.

Далі базові мінливі множини будемо позначати великими каліграфічними буквами. Нехай $\mathcal{B} = (\mathcal{P}, \Leftarrow)$ — базова мінлива множина. Введемо наступні позначення:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{P}); & \mathbb{Bs}(\mathcal{B}) := \mathbb{Bs}(\mathcal{P}), & \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}, \\ \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}(\mathrm{f}) := \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}(\mathrm{f}), & \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) := \mathbf{Tm}(\mathcal{P}), & \leq_{\mathcal{B}} := \leq_{\mathcal{P}}, \\ <_{\mathcal{B}} := <_{\mathcal{P}}, & \geq_{\mathcal{B}} := \geq_{\mathcal{P}}, & >_{\mathcal{B}} := >_{\mathcal{P}}, \\ \psi_{\mathcal{B}} := \psi_{\mathcal{P}}. & & \end{array}$$

Також у випадку елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ будемо позначати через $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ той факт, що $\omega_2 \Leftarrow \omega_1$.

Коли відомо, про яку базову мінливу множину $\mathcal{B}$ йде мова, в позначеннях $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}$, $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}(\mathrm{f})$, $\leq_{\mathcal{B}}$, $<_{\mathcal{B}}$, $\geq_{\mathcal{B}}$, $>_{\mathcal{B}}$, $\psi_{\mathcal{B}}$ символом $\mathcal{B}$ будемо нехтувати, використовуючи замість них позначення $\leftarrow$, $\leftarrow(\mathrm{f})$, $\leq$, $<$, $\geq$, $>$, ψ відповідно.

З означень 2.4 та 2.1, 2.2 випливають наступні ***властивості базових мінливих множин*** (у властивостях 1 – 5 символ $\mathcal{B}$ позначає довільну базову мінливу множину).

Властивості **2.1.** 1. Пара $\mathcal{B}_0 = (\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ є орієнтованою множиною.

2. $\psi = \psi_{\mathcal{B}}$ є часом на $\mathcal{B}_0 = (\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$.

3. Для довільного елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\quad \omega \leftarrow \omega$.

4. Якщо $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ і $\omega_2 \leftarrow \omega_1$, то $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$, а отже, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) \leftarrow \mathsf{bs}\,(\omega_1)$ і $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$.

5. Для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ умова $x_2 \leftarrow x_1$ має місце тоді і тільки тоді, коли існують елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x_1$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_2$ і $\omega_2 \leftarrow \omega_1$.

6. $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) = \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\}$.

2.3. Приклади базових мінливих множин.

Приклад **2.2.** Нехай $\mathcal{P}$ — довільна примітивна мінлива множина. Тоді відношення $\leftarrow(\mathrm{f}) = \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}(\mathrm{f})$ є базою елементарних процесів на $\mathcal{P}$. Справді, умови а) і б) означення 2.4 для відношення $\leftarrow(\mathrm{f})$ виконуються тривіальним чином. Розглянемо довільні $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ такі, що $x_2 \leftarrow x_1$. У випадку $x_1 = x_2$, за означенням часу, існує момент часу $t_1 \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ такий, що $x_1 \in \psi\,(t_1)$. Отже, для $\omega_1 = \omega_2 = (t_1, x_1) \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ будемо мати $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = \mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_1 = x_2$ і $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$. Тому у випадку $x_1 = x_2$ умова в) означення 2.4 виконується. У випадку $x_1 \neq x_2$, за означенням часу, існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ такі, що $x_1 \in \psi\,(t_1)$, $x_2 \in \psi\,(t_2)$ і

$t_1 < t_2$. Тому для $\omega_1 = (t_1, x_1)$, $\omega_2 = (t_1, x_2) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ будемо мати $\mathsf{bs}(\omega_1) = x_1$, $\mathsf{bs}(\omega_2) = x_2$ і $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$. Отже, і в цьому випадку умова в) означення 2.4 також виконується.

Таким чином, довільну примітивну мінливу множину завжди можна ототожнити з базовою мінливою множиною $\mathcal{P}_{(f)} = (\mathcal{P}, \leftarrow (\mathrm{f}))$, у якій $\leftarrow (\mathrm{f})$ є базою елементарних процесів.

***Приклад* 2.3.** Розглянемо довільну систему абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M. Покладемо

$$\mathcal{P} := \mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R}).$$

За теоремою 1.1 $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) = M$, $\mathbf{Tm}(\mathcal{P}) = \mathbf{T}$. Крім того, згідно з третім пунктом теореми 1.1, для $(t, x) \in M \times \mathbf{T}$ умова $(t, x) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ має місце тоді і тільки тоді, коли існує абстрактна траєкторія $r = r_{t,x} \in \mathcal{R}$ така, що $t \in \mathfrak{D}(r)$ і $x = r(t)$, тобто така, що $\omega = (t, x) \in r$. Отже,

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} r. \tag{2.3}$$

Для $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ покладемо $\omega_2 \Leftarrow [\mathcal{R}]\, \omega_1$ тоді і тільки тоді, коли $\mathsf{tm}(\omega_1) \leq \mathsf{tm}(\omega_2)$ і існує абстрактна траєкторія $r \in \mathcal{R}$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{R}$ (тобто така, що $\mathsf{bs}(\omega_1) = r(\mathsf{tm}(\omega_1))$, $\mathsf{bs}(\omega_2) = r(\mathsf{tm}(\omega_2))$). Доведемо, що відношення $\Leftarrow [\mathcal{R}]$ є базою елементарних процесів.

(а) Нехай $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$. Тоді, згідно з (2.3), існує абстрактна траєкторія $r \in \mathcal{R}$ така, що $\omega \in r$. Отже, за означенням відношення „$\Leftarrow [\mathcal{R}]$" $\omega \Leftarrow [\mathcal{R}]\omega$.

(б) Нехай $\omega_1 = (t_1, x_1), \omega_2 = (t_2, x_2) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ і $\omega_2 \Leftarrow [\mathcal{R}]\omega_1$. Тоді, за означенням відношення „$\Leftarrow [\mathcal{R}]$", $t_1 \leq t_2$ і існує абстрактна траєкторія $r \in \mathcal{R}$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{R}$, тобто така, що $x_1 = r(t_1)$, $x_2 = r(t_2)$. Звідси за пунктом 2 теореми 1.1 $x_2 \underset{\mathcal{A}tp(\mathcal{R})}{\leftarrow} x_1$. У випадку $t_1 = t_2$ отримуємо $x_1 = r(t_1) = r(t_2) = x_2$, тобто $\omega_1 = \omega_2$, а у випадку $t_1 \neq t_2$ маємо $t_1 < t_2$ і $x_2 \leftarrow x_1$. Отже, в обох випадках співвідношення $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$ є істинним.

(в) Нехай $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$, $x_2 \leftarrow x_1$. Тоді за пунктом 2 теореми 1.1 існує абстрактна траєкторія $r \in \mathcal{R}$ така, що $x_1 = r(t_1)$, $x_2 = r(t_2)$ для деяких $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ таких, що $t_1 \leq t_2$. Покладемо

$$\omega_i := (t_i, x_i), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Тоді $\omega_1, \omega_2 \in r \subseteq \bigcup_{\rho \in \mathcal{R}} \rho = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$, $\mathsf{bs}(\omega_i) = x_i$, $i \in \{1, 2\}$, і за означенням відношення $\Leftarrow [\mathcal{R}]$ $\omega_2 \Leftarrow [\mathcal{R}]\omega_1$.

З пунктів (а)–(в) випливає, що відношення $\Leftarrow [\mathcal{R}]$ є базою елементарних процесів на $\mathcal{A}tp(\mathcal{R})$. Отже, пара

$$\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R}) = (\mathcal{A}tp(\mathcal{R}), \Leftarrow [\mathcal{R}]) = (\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R}), \Leftarrow [\mathcal{R}])$$

є базовою мінливою множиною.

З властивостей 2.1 (5, 6) випливає, що, знаючи множини $\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, відношення часового порядку та базу елементарних процесів деякої базової мінливої множини $\mathcal{B}$, можна однозначно відновити множину $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$, напрямне відношення змін $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}$ на $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ та час $\psi_{\mathcal{B}}$ (за формулою $\psi_{\mathcal{B}}(t) = \{x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \mid (t, x) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$), а отже, і всю базову мінливу множину $\mathcal{B}$. Тому з даного прикладу випливає справедливість наступної теореми.

Теорема 2.1. *Для довільної системи абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M існує, причому єдина, базова мінлива множина $\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ така, що:*

1) $\left(\mathbf{Tm}(\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})), \leq_{\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})}\right) = \mathbb{T}$;

2) $\mathbb{Bs}(\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})) = \bigcup_{r\in\mathcal{R}} r$;

3) *для довільних* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R}))$ *умова* $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})}{\leftarrow} \omega_1$ *має місце тоді і тільки тоді, коли* $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$ *і існує траєкторія* $r \in \mathcal{R}$ *така, що* $\omega_1, \omega_2 \in r$.

***Зауваження* 2.2.** 1. Оскільки базова мінлива множина $\mathcal{A}t\,(\mathcal{R})$ будується на основі примітивної мінливої множини $\mathcal{A}tp\,(\mathcal{R})$, то для довільної базової мінливої множини вигляду $\mathcal{A}t\,(\mathcal{R})$ (де $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $(\mathbf{T}, \leq)$ в M) залишаються правильними пункти 1 – 3 теореми 1.1 (з заміною $\mathcal{A}tp\,(\mathbb{T},\mathcal{R})$ на $\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathcal{R})$).

2. Далі, коли лінійно впорядкована множина $\mathbb{T}$ є наперед заданою, замість позначення $\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})$ будемо використовувати позначення $\mathcal{A}t\,(\mathcal{R})$.

3. Лінії долі базових мінливих множин. Використовуючи властивості 2.1, а також твердження 2.2, отримуємо наступне твердження.

Твердження 3.1. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина. Тоді*:

1) *пара* $\mathcal{Q} = \left(\mathbb{Bs}(\mathcal{B}), \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}\right) = (\mathbb{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ *є антициклічною орієнтованою множиною*;

2) *відображення*

$$\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}_{\mathcal{B}}(t) := \{\omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B}) \mid \mathsf{tm}\,(\omega) = t\} \in 2^{\mathbb{Bs}(\mathcal{B})}, \quad t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B}), \tag{3.1}$$

є часом на $\mathcal{Q}$.

***Зауваження* 3.1.** Можна довести, що час $\tilde{\psi}$, визначений у (3.1), є монотонним у сенсі [17, 18], а при умові $\psi(t) \neq \varnothing$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$, — строго монотонним (у сенсі [17, 18]).

Згідно з твердженням 3.1, для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ пара $(\mathbb{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ є (антициклічною) орієнтованою множиною. Як і в довільній орієнтованій множині, в $(\mathbb{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ можна розглядати транзитивні множини і ланцюги. З антициклічності орієнтованої множини $(\mathbb{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ випливає наступне твердження.

Твердження 3.2. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина.*

1. *Довільна транзитивна підмножина $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ орієнтованої множини $(\mathbb{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ є (частково) впорядкованою множиною (відносно відношення $\leftarrow$).*

2. *Довільний ланцюг $\mathcal{L}$ орієнтованої множини $(\mathbb{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ є лінійно впорядкованою множиною (відносно відношення $\leftarrow$).*

Зазначимо, що поняття частково впорядкованої множини слід розуміти в сенсі [14, с. 11].

Означення 3.1. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина.*

1. *Довільний максимальний ланцюг $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ орієнтованої множини $(\mathbb{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ будемо називати **лінією долі** $\mathcal{B}$. При цьому множину всіх ліній долі $\mathcal{B}$ будемо позначати через $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$:*

$$\mathbb{L}d(\mathcal{B}) = \{\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}) \mid \mathcal{L} \text{ є лінією долі } \mathcal{B}\}\,.$$

2. *Довільну лінію долі, що містить елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$, будемо називати **власною** лінією долі елементарно-часового стану ω (в $\mathcal{B}$).*

3. *Лінію долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ будемо називати **власною** лінією долі елементарного стану $x \in \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$, якщо існує елементарно-часовий стан $\omega_x \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ такий, що $\mathsf{bs}\,(\omega_x) = x$ і $\mathcal{L}$ є лінією долі ω_x.*

Зрозуміло, що елементарний (елементарно-часовий) стан може мати, взагалі кажучи, не одну власну лінію долі.

Будемо говорити, що елементарні (елементарно-часові) стани $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$, $\omega_1, \omega_2 \in \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$, ***об'єднані долею***, якщо існує хоча б одна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$, яка є власною лінією долі кожного із станів x_1, x_2 (ω_1, ω_2) одночасно.

Твердження 3.3. 1. *Довільний елементарно-часовий стан має хоча б одну власну лінію долі.*

2. *Для того щоб елементарно-часові стани* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ *були об'єднані долею, необхідно і достатньо, щоб виконувалась хоча б одна з умов*

$$\omega_2 \leftarrow \omega_1 \quad \textit{або} \quad \omega_1 \leftarrow \omega_2. \tag{3.2}$$

Доведення. Перший пункт даного твердження випливає з наслідку 1.1.

2а) Нехай елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ мають спільну лінію долі $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$, $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}$. Згідно з твердженням 3.2 (пункт 2), пара $(\mathcal{L}, \leftarrow)$ є лінійно впорядкованою множиною. Тому хоча б одна з умов (3.2) повинна виконуватись.

2б) Нехай $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ і $\omega_2 \leftarrow \omega_1$. Тоді, згідно з наслідком 1.1, існує максимальний ланцюг (лінія долі) $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ такий, що $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}$.

Твердження 3.4. 1. *Довільний елементарний стан* $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ *має хоча б одну власну лінію долі.*

2. *Для того щоб елементарні стани* $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ *були об'єднані долею, необхідно і достатньо, щоб виконувалась хоча б одна з умов*

$$y \leftarrow x \quad \textit{або} \quad x \leftarrow y. \tag{3.3}$$

Доведення. 1. Нехай $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$. За означенням часу існує момент часу $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ такий, що $x \in \psi(t)$. Згідно з твердженням 3.3, елементарно-часовий стан $\omega_x = (t, x) \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ має власну лінію долі. Ця лінія долі, за означенням 3.1, і буде власною лінією долі для елементарного стану x.

2а) Нехай $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$, $y \leftarrow x$. За властивістю 2.1 (пункт 5) існують елементарно-часові стани ω_1, $\omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathsf{bs}(\omega_1) = x$, $\mathsf{bs}(\omega_2) = y$ і $\omega_2 \leftarrow \omega_1$. Згідно з твердженням 3.3, ці елементарно-часові стани мають спільну лінію долі $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$. Дана лінія долі $\mathcal{L}$, за означенням 3.1, і буде власною лінією долі для кожного з елементарних станів x і y.

2б) Нехай елементарні стани $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ мають спільну лінію долі $\mathcal{L}$. Тоді існують елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathsf{bs}(\omega_1) = x$, $\mathsf{bs}(\omega_2) = y$ і $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}$. Тому, згідно з пунктом 2 твердження 3.3, повинна виконуватись хоча б одна з умов $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ або $\omega_1 \leftarrow \omega_2$. Отже, за властивістю 2.1 (пункт 4), хоча б одна з умов (3.3) повинна мати місце.

Означення 3.2. *Нехай* $\mathcal{R}$ *— система абстрактних траєкторій з* $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ *в* M.

1. *Траєкторію* $r \in \mathcal{R}$ *системи абстрактних траєкторій* $\mathcal{R}$ *будемо називати* ***максимальною*** (*відносно* $\mathcal{R}$), *якщо не існує траєкторії* $\rho \in \mathcal{R}$ $(\rho \neq r)$ *такої, що* $\mathfrak{D}(r) \subset \mathfrak{D}(\rho)$ *і* $r(t) = \rho(t)$, $t \in \mathfrak{D}(r)$, *тобто такої, що* $r \subset \rho$.

2. *Систему абстрактних траєкторій* $\mathcal{R}$ *будемо називати* ***системою максимальних траєкторій***, *якщо кожна траєкторія* $r \in \mathcal{R}$ *є максимальною* (*відносно* $\mathcal{R}$).

Далі для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ будемо використовувати позначення

$$\mathbb{Tm}(\mathcal{B}) := (\mathbf{Tm}(\mathcal{B}), \leq_{\mathcal{B}}).$$

Твердження 3.5. *Нехай* $\mathcal{B}$ *— базова мінлива множина. Тоді*:

1) *довільний ланцюг* $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ *орієнтованої множини* $(\mathbb{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ *є абстрактною траєкторією з* $\mathbb{Tm}(\mathcal{B})$ *в* $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$;

2) *множина* $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$ *всіх ланцюгів орієнтованої множини* $(\mathbb{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ *є системою абстрактних траєкторій з* $\mathbb{Tm}(\mathcal{B})$ *в* $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$;

3) *довільна лінія долі* $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *базової мінливої множини* $\mathcal{B}$ *є максимальною траєкторією* (*відносно* $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$);

4) *множина* $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$ *є системою максимальних траєкторій з* $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ *в* $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

Доведення. 1. Нехай $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ — ланцюг орієнтованої множини $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$. Такий ланцюг складається з елементарно-часових станів, тобто з пар вигляду $\omega = (t, x)$, де $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$, $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, тобто $\mathcal{L}$ є бінарним відношенням з множини $\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ у множину $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Отже, для обґрунтування того, що $\mathcal{L}$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, досить довести, що відношення $\mathcal{L}$ є функцією. Припустимо, що $\mathcal{L}$ не є функцією. Тоді існують елементарно-часові стани вигляду $\omega_1 = (t, x_1)$, $\omega_2 = (t, x_2)$ такі, що $x_1 \neq x_2$ і $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}$. Оскільки $x_1 \neq x_2$, то $\omega_1 \neq \omega_2$. Далі, оскільки $\mathcal{L}$ — ланцюг, то хоча б одна з умов $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ або $\omega_1 \leftarrow \omega_2$ повинна виконуватись. Припустимо, наприклад, що $\omega_2 \leftarrow \omega_1$. Тоді за властивістю 2.1 (пункт 4) $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$. Звідси, враховуючи, що $\omega_2 \neq \omega_1$, за пунктом 1 твердження 2.1 отримаємо $t < t$, що неможливо. Аналогічно приходимо до суперечності, якщо припустити, що $\omega_1 \leftarrow \omega_2$. Тому припущення хибне, а ланцюг $\mathcal{L}$ є функцією (тобто абстрактною траєкторією).

Враховуючи доведене вище, маємо право використовувати позначення $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ для області визначення $\mathcal{L}$ і $x = \mathcal{L}(t)$ (де $t \in \mathfrak{D}(\mathcal{L})$) для позначення того факту, що $(t, x) \in \mathcal{L}$.

2. Нехай $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$ — множина всіх ланцюгів орієнтованої множини $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$. Розглянемо довільний елементарний стан $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. За означенням часу існує момент часу $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ такий, що $x \in \psi(t)$. Тоді множина $\mathcal{L}_x = \{(t, x)\} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ буде (одноелементним) ланцюгом орієнтованої множини $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$. При цьому $\mathfrak{R}(\mathcal{L}_x) = \{x\} \ni x$. Отже, довільний елементарний стан $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ міститься в області значень якоїсь абстрактної траєкторії $\mathcal{L}_x \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$. Тому $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L}) \supseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Враховуючи, що за доведеним вище довільний елемент $\mathcal{L} \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, отримуємо обернене включення, тобто $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Тому $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

3. Третій пункт даного твердження випливає безпосередньо з означень лінії долі та максимального ланцюга.

4. Доведемо, що $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Оскільки $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, то $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L}) \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Отже, залишилось довести обернене включення. Розглянемо довільний елементарний стан $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Згідно з пунктом 1 твердження 3.4, x має власну лінію долі $\mathcal{L}_x \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$. Це за означенням 3.1 означає, що існує елементарно-часовий стан $\omega_x = (t, x) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такий, що $\omega_x \in \mathcal{L}_x$. Оскільки $(t, x) \in \mathcal{L}_x$, то $\mathcal{L}_x(t) = x$. Отже, $x \in \mathfrak{R}(\mathcal{L}_x) \subseteq \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L})$. Тому $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L}) \supseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, тобто $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Отже, $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Оскільки $\mathbb{L}d(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ і, згідно з пунктом 3 даного твердження, довільна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ є максимальною траєкторією відносно $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$, то вона також буде максимальною траєкторією і відносно вужчої системи абстрактних траєкторій $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$.

Наступна теорема показує, що довільна базова мінлива множина може бути породжена деякою системою максимальних траєкторій.

Теорема 3.1. *Для довільної базової мінливої множини* $\mathcal{B}$ *має місце рівність*

$$\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbb{L}d(\mathcal{B})\right) = \mathcal{B}.$$

Доведення. Покладемо $\mathcal{R} := \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ і доведемо, що $\mathcal{A}t(\mathcal{R}) = \mathcal{B}$.

1. Оскільки, згідно з твердженням 3.5, $\mathcal{R} = \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, то, згідно з першим пунктом теореми 2.1,

$$\mathbf{Tm}\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right) = \mathbf{Tm}(\mathcal{B}), \quad \leq_{\mathcal{A}t(\mathcal{R})} = \leq_{\mathcal{B}} .$$

2. Згідно з другим пунктом теореми 2.1

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right) = \bigcup_{r\in\mathcal{R}} r = \bigcup_{\mathcal{L}\in\mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}). \tag{3.4}$$

З іншого боку, оскільки, згідно з твердженням 3.3, довільний елементарно-часовий стан $\omega \in \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ має власну лінію долі $\mathcal{L}_\omega \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ таку, що $\omega \in \mathcal{L}_\omega$, то $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \bigcup_{\mathcal{L}\in\mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathcal{L} = = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right)$, тобто, враховуючи включення (3.4), маємо

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}).$$

3. Розглянемо довільні елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right)$.

3а) Нехай $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$. Тоді, за властивістю 2.1 (пункт 4) $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. Крім того, згідно з пунктом 2 твердження 3.3, існує лінія долі $\mathfrak{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{L}$. Таким чином, згідно з пунктом 3 теореми 2.1, $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathbb{L}d(\mathcal{B}))}{\leftarrow} \omega_1$, тобто $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathcal{R})}{\leftarrow} \omega_1$.

3б) Нехай $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathcal{R})}{\leftarrow} \omega_1$, тобто $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathbb{L}d(\mathcal{B}))}{\leftarrow} \omega_1$. Тоді, згідно з пунктом 3 теореми 2.1, $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$ і існує лінія долі $\mathfrak{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{L}$. Оскільки $\mathfrak{L}$ — лінія долі в $\mathcal{B}$, то хоча б одна з умов $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_1 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_2$ повинна мати місце. Доведемо, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$. Припустимо супротивне, тобто $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\not\leftarrow} \omega_1$. Тоді маємо $\omega_2 \neq \omega_1$ і $\omega_1 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_2$ (оскільки у випадку $\omega_1 = \omega_2$ ми б отримали $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$). Тобто за властивістю 2.1 (пункт 4) $\omega_1 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow (\mathrm{f})} \omega_2$. Оскільки $\omega_1 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow (\mathrm{f})} \omega_2$ і $\omega_2 \neq \omega_1$, то за пунктом 1 твердження 2.1 $\mathsf{tm}\,(\omega_2) < \mathsf{tm}\,(\omega_1)$. Остання нерівність є неможливою, оскільки вона суперечить доведеній вище нерівності $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. Тому $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$.

З пунктів 3а) і 3б) випливає рівність баз елементарних процесів $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} = \underset{\mathcal{A}t(\mathcal{R})}{\leftarrow}$ (на $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right) = = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$).

Отже, базова мінлива множина $\mathcal{B}$ задовольняє умови 1 – 3 теореми 2.1 для системи абстрактних траєкторій $\mathcal{R} = \mathbb{L}d(\mathcal{B})$, і, згідно з цією теоремою, $\mathcal{A}t(\mathcal{R}) = \mathcal{B}$.

Наступний приклад показує, що рівність $\mathbb{L}d(\mathcal{A}t(\mathcal{R})) = \mathcal{R}$ для довільної системи максимальних траєкторій $\mathcal{R}$, взагалі кажучи, не має місця. При цьому, в загальному випадку, не можна, навіть, говорити про включення однієї з цих множин в іншу.

***Приклад* 3.1.** Розглянемо функцію $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ вигляду

$$f(t) := \frac{|t| - t}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Побудуємо систему абстрактних траєкторій $\mathcal{R} = \{r_\alpha |\, \alpha \in [0, \infty)\}$:

$$r_\alpha(t) := f(t+\alpha),\ t \in (-\infty, \alpha] \quad (\mathfrak{D}\,(r_\alpha) = (-\infty, \alpha]), \quad \alpha \in (0, \infty);$$

$$r_0(t) := 0, \quad t \in [0, \infty) \quad (\mathfrak{D}\,(r_0) = [0, \infty)), \quad \alpha = 0.$$

Легко переконатись, що $\mathcal{R}$ є системою максимальних траєкторій з $\mathbb{R}$ в $[0,\infty)$, хоча при цьому абстрактна траєкторія $r_0 \in \mathcal{R}$ не є лінією долі для базової мінливої множини $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$, тобто $r_0 \notin \mathbb{L}d(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$. Отже, $\mathcal{R} \nsubseteq \mathbb{L}d(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$. З іншого боку, розглянемо траєкторію вигляду

$$r_0^{\sim}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\mathfrak{D}\,(r_0^{\sim}) = \mathbb{R}).$$

Легко перевірити, що $r_0^{\sim}$ є лінією долі для базової мінливої множини $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$, хоча при цьому $r_0^{\sim} \notin \mathcal{R}$. Отже, $\mathbb{L}d(\mathcal{A}t(\mathcal{R})) \nsubseteq \mathcal{R}$.

Нижче буде описано найпростіший клас випадків, коли рівність $\mathbb{L}d(\mathcal{A}t(\mathcal{R})) = \mathcal{R}$, все ж таки, має місце.

Означення 3.3. *Систему абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M будемо називати системою **індивідуальних траєкторій**, якщо будь-які дві неоднакові траєкторії $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ попарно не перетинаються $(\forall r_1, r_2 \in \mathcal{R}\ (r_1 \neq r_2 \Longrightarrow r_1 \cap r_2 = \varnothing))$.*

Легко бачити, що система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M є системою індивідуальних траєкторій тоді і тільки тоді, коли для довільних $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ таких, що $r_1 \neq r_2$, має місце одне із співвідношень

$$\mathfrak{D}\,(r_1) \cap \mathfrak{D}\,(r_2) = \varnothing \quad \text{або} \quad r_1(t) \neq r_2(t) \quad (\forall t \in \mathfrak{D}\,(r_1) \cap \mathfrak{D}\,(r_2)).$$

Звідси, зокрема, випливає, що система траєкторій $\mathcal{R}$ у прикладі 2.1 є системою індивідуальних траєкторій.

Теорема 3.2. *Якщо $\mathcal{R}$ є системою індивідуальних траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M, то*

$$\mathbb{L}d(\mathcal{A}t(\mathcal{R})) = \mathcal{R}.$$

Доведення. Скрізь у даному доведенні символ $\leftarrow$ буде означати напрямне відношення змін або базу елементарних процесів у $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$.

1. Нехай $r \in \mathcal{R}$. Згідно з пунктом 2 теореми 2.1, $r \subseteq \bigcup_{\rho \in \mathcal{R}} \rho = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$. З третього пункту теореми 2.1 випливає, що для довільних $\omega_1, \omega_2 \in r$ співвідношення $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. Отже, оскільки $\left(\mathbf{Tm}(\mathcal{A}t(\mathcal{R})), \leq_{\mathcal{A}t(\mathcal{R})}\right) = \mathbb{T}$ — лінійно впорядкована множина, траєкторія $r \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$ є ланцюгом орієнтованої множини $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathcal{R})), \leftarrow)$. Доведемо, що r є лінією долі $\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$ (тобто максимальним ланцюгом $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$). Припустимо супротивне. Тоді існує лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$ така, що $r \subset \mathcal{L}$. Оскільки ми маємо строге включення $r \subset \mathcal{L}$, то існує елементарно-часовий стан $\omega \in \mathcal{L}$ такий, що $\omega \notin r$. З іншого боку, за означенням системи абстрактних траєкторій всі траєкторії системи $\mathcal{R}$ непорожні. Отже, існує елементарно-часовий стан $\omega_0 \in r$. Оскільки $r \subset \mathcal{L}$, то $\omega_0 \in \mathcal{L}$. Отже, елементарно-часові стани ω і ω_0 об'єднані долею. Тому, згідно із твердженням 3.3, повинна виконуватись хоча б одна з умов $\omega \leftarrow \omega_0$ або $\omega_0 \leftarrow \omega$. Але в обох випадках за теоремою 2.1 (пункт 3) повинна існувати траєкторія $r_1 \in \mathcal{R}$ така, що $\omega, \omega_0 \in r_1$. Оскільки $\omega \notin r$ і $\omega \in r_1$, то $r \neq r_1$. Проте, з іншого боку, $\omega_0 \in r \cap r_1$, що суперечить тому факту, що $\mathcal{R}$ є системою індивідуальних траєкторій. Отримана суперечність остаточно доводить, що r є лінією долі $\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$. Таким чином,

$$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}d\,(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))\,. \tag{3.5}$$

2. Нехай $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$. Із зауваження 2.1 та пункту 2 твердження 1.1 випливає, що лінія долі будь-якої базової мінливої множини є непорожньою множиною. Отже, існує елементарно-часовий стан ω такий, що $\omega \in \mathcal{L}$. Оскільки $\omega \in \mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$, то за пунктом 2 теореми 2.1

існує траєкторія $r \in \mathcal{R}$ така, що $\omega \in r$. Розглянемо довільний елементарно-часовий стан $\omega_1 \in \mathcal{L}$. Оскільки $\omega, \omega_1 \in \mathcal{L}$, то елементарно-часові стани ω і ω_1 об'єднані долею, і, згідно з твердженням 3.3, повинна виконуватись хоча б одна з умов $\omega_1 \leftarrow \omega$ або $\omega \leftarrow \omega_1$. Тобто за пунктом 3 теореми 2.1 повинна існувати траєкторія $r_1 \in \mathcal{R}$ така, що $\omega, \omega_1 \in r_1$. Отже, $\omega \in r \cap r_1$. Але оскільки $\mathcal{R}$ є системою індивідуальних траєкторій, то останнє співвідношення можливе лише за умови $r = r_1$. Тому довільний елементарно-часовий стан $\omega_1 \in \mathcal{L}$ належить до r. Це означає, що $\mathcal{L} \subseteq r$. Але, згідно з доведеним у пункті 1, траєкторія r також є лінією долі для $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$. Оскільки r і $\mathcal{L}$ є лініями долі для $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$, то включення $\mathcal{L} \subseteq r$ можливе лише за умови $\mathcal{L} = r$. Таким чином, $\mathcal{L} = r \in \mathcal{R}$, звідки, враховуючи довільність вибору лінії долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right)$, отримуємо включення, обернене до (3.5).

***Приклад* 3.2.** Нехай $\mathfrak{X}$ — повний метричний простір. Нагадаємо [15, с. 4], що динамічною системою на $\mathfrak{X}$ називається пара вигляду

$$\mathbb{S} = (\Theta, W), \tag{3.6}$$

де $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ — довільна підмножина числової прямої $\mathbb{R}$; W — операторнозначна функція, визначена на множині $\widetilde{\Theta} = \left\{(\tau, t_0) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, t_0, t_0 + \tau \in \Theta\right\}$, яка ставить у відповідність довільній парі $(\tau, t_0) \in \widetilde{\Theta}$ оператор $W(\tau, t_0) : \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}$ і задовольняє умови

$$W(0, t_0)\, x = x, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad t_0 \in \Theta, \tag{3.7}$$

$$W(t+s, t_0) = W(t, t_0+s)\, W(s, t_0), \quad t_0,\ t_0+s,\ t_0+t+s \in \Theta, \tag{3.8}$$

добуток операторів визначається стандартним чином ($W(t, t_0+s)\, W(s, t_0)\, x = W((t, t_0 + +s))\,(W(s, t_0)\, x),\ x \in \mathfrak{X}$). (Зауважимо, що оператори $W(\tau, t_0)$ ($(\tau, t_0) \in \widetilde{\Theta}$) можуть бути і нелінійними.)

Довільна динамічна система $\mathbb{S}$ вигляду (3.6) породжує систему абстрактних траєкторій

$$\begin{gathered} \mathcal{R}_{\mathbb{S}} = \left\{ r_{x,t_0} \,|\, x \in \mathfrak{X},\ t_0 \in \Theta \right\}, \\ r_{x,t_0}(t) = W(t - t_0, t_0)\, x, \quad x \in \mathfrak{X},\ t \in \Theta, \end{gathered} \tag{3.9}$$

з $\mathbb{T}_\Theta = (\Theta, \leq)$ в $\mathfrak{X}$, де $\leq$ — звичайний порядок на полі дійсних чисел. З (3.7), (3.8) випливає, що довільні траєкторії з системи $\mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ мають такі властивості:

$$r_{x,t_0}(t_0) = x, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad t_0 \in \Theta,$$

$$r_{x,t_0'} = r_{\left[r_{x,t_0'}(t_0)\right],t_0}, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad t_0, t_0' \in \Theta.$$

Отже, при довільному фіксованому $t_0 \in \Theta$ систему траєкторій $\mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ можна подати у вигляді

$$\mathcal{R}_{\mathbb{S}} = \left\{ r_{x,t_0} \,|\, x \in \mathfrak{X} \right\}. \tag{3.10}$$

Доведемо, що $\mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ — система індивідуальних траєкторій. Справді, зафіксуємо довільне число $t_0 \in \Theta$. Використавши рівність (3.10), розглянемо довільні траєкторії $r_{x_1,t_0}, r_{x_2,t_0} \in \mathcal{R}_{\mathbb{S}}$. Припустимо, що для деякого фіксованого $t \in \Theta$ $\ r_{x_1,t_0}(t) = r_{x_2,t_0}(t)$. Тоді, використовуючи (3.7) – (3.9), отримуємо

$$x_2 = W(0, t_0)\, x_2 = W(t_0 - t, t)\, W(t - t_0, t_0)\, x_2 = W(t_0 - t, t)\, r_{x_2, t_0}(t) =$$

$$= W(t_0 - t, t)\, r_{x_1, t_0}(t) = W(t_0 - t, t)\, W(t - t_0, t_0)\, x_1 = x_1.$$

Отже, $r_{x_1,t_0} = r_{x_2,t_0}$. Це означає, що для довільних траєкторій $r_{x_1,t_0}, r_{x_2,t_0} \in \mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ з умови $r_{x_1,t_0} \neq r_{x_2,t_0}$ випливає, що $r_{x_1,t_0}(t) \neq r_{x_2,t_0}(t)$ $(\forall t \in \Theta)$. Тому $\mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ — система індивідуальних траєкторій. Зокрема, для довільних $x \in \mathfrak{X}$ і $t_0 \in \Theta$ існує, причому єдина, траєкторія $\rho_{x,t_0} \in \mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ така, що $\rho_{x,t_0}(t_0) = x$ (де $\rho_{x,t_0} = r_{x,t_0}$).

Система індивідуальних траєкторій $\mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ породжує базову мінливу множину $\mathcal{A}t(\mathcal{R}_{\mathbb{S}})$, причому за теоремою 2.1 $\mathbf{Tm}(\mathcal{A}t(\mathcal{R}_{\mathbb{S}})) = \Theta$. Згідно з теоремою 3.2, знаючи базову мінливу множину $\mathcal{A}t(\mathcal{R}_{\mathbb{S}})$, можна відновити систему траєкторій $\mathcal{R}_{\mathbb{S}}$. Звідси, в свою чергу, однозначно відновлюються оператори еволюції $\left\{ W(\tau, t_0) \mid (\tau, t_0) \in \widetilde{\Theta} \right\}$ за допомогою формули

$$W(\tau, t_0)\, x = \rho_{x,t_0}(\tau + t_0), \quad x \in \mathfrak{X},\ t_0, t_0 + \tau \in \Theta,$$

де $\rho_{x,t_0} \in \mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ — траєкторія, що задовольняє умову $\rho_{x,t_0}(t_0) = x$. Отже, динамічна система $\mathbb{S}$ однозначно відновлюється за базовою мінливою множиною $\mathcal{A}t(\mathcal{R}_{\mathbb{S}})$. Таким чином, динамічні системи вигляду (3.6) можна вважати частинними випадками базових мінливих множин.

4. Мінливі системи і процеси.

Означення 4.1. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина. Будь-яку підмножину $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо називати* ***мінливою системою*** *базової мінливої множини $\mathcal{B}$.*

В механіці елементарними станами є стани (тобто положення) матеріальних точок у різні моменти часу. Саме тому на поняття мінливої системи можна дивитись, як на абстрактне узагальнення поняття фізичного тіла, склад якого, взагалі кажучи, не є постійним і може змінюватись довільним чином протягом часу в процесі трансформацій цього тіла.

Означення 4.2. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина. Довільне відображення $s\colon \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) : \mapsto 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ таке, що $s(t) \subseteq \psi(t)$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$, будемо називати* ***процесом*** *базової мінливої множини $\mathcal{B}$.*

Оскільки примітивні мінливі множини можна розглядати як базові мінливі множини з базою елементарних процесів $\leftarrow$(f), то хронометричні процеси, введені в [16 – 18], можна вважати частинними випадками процесів, уведених в означенні 4.2.

Нехай $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ — довільна мінлива система довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Покладемо

$$S^{\sim}(t) := \{x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mid (t, x) \in S\}, \quad t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B}). \tag{4.1}$$

Легко бачити, що $S^{\sim}(t) \subseteq \psi(t)$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$. Отже, за означенням 4.2 $S^{\sim}$ є процесом на базовій мінливій множині $\mathcal{B}$.

Означення 4.3. *Процес $S^{\sim}$ будемо називати* ***процесом трансформацій*** *мінливої системи S.*

Твердження 4.1. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина.*

1. *Для довільних мінливих систем $S_1, S_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ $S_1^{\sim} = S_2^{\sim}$ тоді і тільки тоді, коли $S_1 = S_2$.*

2. *Для довільного процесу s базової мінливої множини $\mathcal{B}$ існує, причому єдина, мінлива система $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ така, що $s = S^{\sim}$.*

Доведення. 1. Очевидно, досить довести, що для $S_1, S_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ з рівності $S_1^{\sim} = S_2^{\sim}$ випливає рівність $S_1 = S_2$. Отже, нехай $S_1^{\sim} = S_2^{\sim}$. Тоді для довільного $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ $S_1^{\sim}(t) =$

$= S_2^{\sim}(t)$. Отже, згідно з (4.1), для довільних $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ і $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ умова $(t,x) \in S_1$ рівносильна умові $(t,x) \in S_2$. А це й означає, що $S_1 = S_2$.

2. Нехай s — процес базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Покладемо

$$S := \{(t,x) \mid t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B}),\ x \in s(t)\} = \bigcup_{t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})} (\{t\} \times s(t)),$$

де у випадку $s(t) = \varnothing$ $\{t\} \times s(t) = \varnothing$. Оскільки для довільної пари $(t,x) \in S$ маємо $x \in s(t) \subseteq \psi(t)$, то $S \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$. Отже, S є мінливою системою $\mathcal{B}$. Для довільного $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ маємо

$$S^{\sim}(t) = \{x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \mid (t,x) \in S\} = \{x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \mid x \in s(t)\} = s(t).$$

Отже, $S^{\sim} = s$. Доведемо єдиність мінливої системи S. Нехай S_1 — інша мінлива система, така, що $S_1^{\sim} = s$. Тоді $S^{\sim} = S_1^{\sim}$, а отже, згідно з першим пунктом даного твердження, $S = S_1$.

Отже, згідно з твердженням 4.1, відображення $(\cdot)^{\sim}$ встановлює взаємно однозначну відповідність між мінливими системами і процесами базової мінливої множини. Враховуючи зазначений факт, далі між поняттями мінливої системи і процесу завжди будемо ставити „знак рівності”, а говорячи про процеси на базових мінливих множинах, будемо позначати ці процеси великими буквами з хвилькою у верхньому індексі, маючи на увазі, що довільний процес є процесом трансформацій певної мінливої системи.

Будемо говорити, що мінлива система $U \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ є ***підсистемою*** *мінливої системи $S \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$, якщо $U \subseteq S$.*

Твердження 4.2. *Мінлива система $U \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ є підсистемою мінливої системи $S \subseteq \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\forall\, t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \quad U^{\sim}(t) \subseteq S^{\sim}(t).$$

Доведення. 1. Нехай $S, U \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ і $U \subseteq S$. Тоді, згідно з (4.1), для довільного $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ отримуємо

$$U^{\sim}(t) = \{x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \mid (t,x) \in U\} \subseteq \{x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \mid (t,x) \in S\} = S^{\sim}(t).$$

2. Навпаки, нехай $U^{\sim}(t) \subseteq S^{\sim}(t)$ для довільного $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$. Покладемо

$$S_1 := \bigcup_{t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})} \{t\} \times S^{\sim}(t), \quad U_1(t) := \bigcup_{t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})} \{t\} \times U^{\sim}(t).$$

Згідно з отриманим під час доведення другого пункту твердження 4.1, $S_1^{\sim} = S^{\sim}$, $U_1^{\sim} = U^{\sim}$. Отже, згідно з першим пунктом твердження 4.1, $S_1 = S$, $U_1 = U$. Тому

$$U = U_1 = \bigcup_{t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})} \{t\} \times U^{\sim}(t) \subseteq \bigcup_{t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})} \{t\} \times S^{\sim}(t) = S_1 = S.$$

Означення 4.4. *Будемо говорити, що елементарний стан $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$* ***належить*** *до мінливої системи $S \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ в момент часу $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$, якщо $x \in S^{\sim}(t)$.*

Той факт, що елементарний стан x базової мінливої множини $\mathcal{B}$ належить до мінливої системи S в момент часу t, будемо позначати таким чином:

$$x \in [t, \mathcal{B}] S,$$

а у випадку, коли зрозуміло про яку базову мінливу множину йде мова, будемо використовувати позначення

$$x \in [t] S.$$

З твердження 4.2 випливає, що для мінливих систем $U, S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ співвідношення $U \subseteq S$ має місце тоді і тільки тоді, коли для довільних $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ і $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ з умови $x \in [t]\ U$ випливає співвідношення $x \in [t]\ S$.

Останнє зауваження свідчить про те, що на мінливу систему довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ можна дивитись як на аналог поняття підмножини у класичній теорії множин, а на відношення $\in [\cdot]$ — як на аналог відношення належності класичної теорії множин. Проте, з іншого боку, ні елементарні, ні елементарно-часові стани не можуть повністю претендувати на аналог поняття елемента у класичній теорії множин, оскільки, знаючи всі елементарні чи елементарно-часові стани базової мінливої множини, ми не зможемо відновити ні напрямне відношення змін, ні базу елементарних процесів, а отже, не зможемо повністю відновити базову мінливу множину за її „елементами".

Очевидно, що довільна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ є її мінливою системою.

Означення 4.5. *Процес $\mathcal{L}^{\sim}$, породжений лінією долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$, будемо називати* ***елементарним процесом*** *$\mathcal{B}$.*

Розглянемо довільну систему матеріальних точок, які не втрачають свою „індивідуальність" у процесі еволюції (тобто матеріальні точки не зливаються в одну і не розпадаються на декілька). Еволюцію такої системи можна описати за допомогою базової мінливої множини $\mathcal{B} = \mathcal{A}t\,(\mathcal{R})$, де $\mathcal{R}$ — деяка система індивідуальних траєкторій. Згідно з теоремою 3.2, лінії долі (тобто мінливі системи, що породжують елементарні процеси) для такої базової мінливої множини $\mathcal{B}$ збігаються з траєкторіями $r \in \mathcal{R}$, які описують еволюцію кожної з матеріальних точок, що входять в цю систему ($\mathbb{L}d(\mathcal{B}) = \mathcal{R}$). Це означає, що в цьому випадку кожен елементарний процес містить всю необхідну інформацію для самоідентифікації відповідної йому матеріальної точки в кожен момент часу еволюцій системи, а тому може бути ототожнений з цією матеріальною точкою і названий „елементом" відповідної базової мінливої множини. Отже, поняття елементарного процесу природно вважати аналогом поняття елемента звичайної (статичної) множини і в загальній ситуації довільної базової мінливої множини, що не породжується індивідуальними траєкторіями. Крім того, з елементарних процесів, використовуючи теорему 3.1, можна повністю відновити базову мінливу множину.

1. *Проблемы* Гильберта / Сборник под ред. П. С. Александрова. – М: Наука, 1969. – 240 с.
2. *Гладун А. Д.* Шестая проблема Гильберта // Потенциал. – 2006, № 3 (http://potential.org.ru/Home/ProblemGilbert).
3. *Petunin Yu. I., Klyushin D. A.* A structural approach to solving the 6th Hilbert problem // Theory Probab. and Math. Statist. – 2005. – № 71. – P. 165 – 179.
4. *McKinsey J. C. C., Sugar A. C., Suppes P.* Axiomatic foundations of classical particle mechanics // J. Ration. Mech. and Anal. – 1953. – № 2. – P. 253 – 272.
5. *Schutz John W.* Foundations of special relativity: kinematic axioms for Minkowski space-time // Lect. Notes Math. – 1973. – **361**. – 314 p.

6. *da Costa N. C. A., Doria F. A.* Suppes predicates for classical physics // Space Math.: Proc. Int. Symp. Structures Math. Theories (San Sebastian, Spain, 1990). – Berlin; New York: De-Gruyter, 1992. – P. 168 – 191.
7. *Adonai S. Sant'Anna.* The definability of physical concepts // Bol. Soc. Parana. Mat. (3s.). – 2005. – **23**, № 1-2. – P. 163 – 175.
8. *Пименов Р. И.* Математические темпоральные конструкции // Конструкции времени в естествознании: На пути к пониманию феномена времени. – М.: Изд-во. Моск. ун-та, 1996. – Ч. I. – С. 153 – 199.
9. *Пименов Р. И.* Основы теории темпорального универсума. – М.: Ленанд, 2006. – 200 с.
10. *Левич А. П.* Методологические трудности на пути к пониманию феномена времени // http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/levich_trudnosti.pdf. – 10 с.
11. *Левич А. П.* Почему скромны успехи в изучении времени // На пути к пониманию феномена времени: конструкции времени в естествознании / Под ред. А. П. Левич. – М.: Прогресс-Традиция, 2009. – Ч. 3. – С. 15 – 29.
12. *Біланюк О.* Тахіони. Вибрані публікації до 40-річчя тахіонової гіпотези. – Л.: Євросвіт, 2002. – 160 с.
13. *Hill J. M., Cox B. J.* Einstein's special relativity beyond the speed of light // Proc. Roy. Soc. London. – Publ. ahead of print October 3, 2012.
14. *Биркгоф Г.* Теория решеток. – М.: Наука, 1984. – 567 с.
15. *Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е.* Лекции по нелинейной динамике. – М.; Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика”, 2011. – 516 с.
16. *Грушка Я. І.* Мінливі множини та їх властивості // Доп. НАН України. – 2012. – № 5. – С. 12 – 18.
17. *Грушка Я. І.* Примітивні мінливі множини та їх властивості // Мат. вісн. НТШ. – 2012. – **9**. – С. 52 – 80.
18. *Grushka Ya. I.* Abstract concept of changeable set // Препринт: arXiv:1207.3751 (http://arxiv.org/abs/1207.3751).

Одержано 20.07.12,
після доопрацювання — 08.01.13