УДК 517.698.519.6

А. В. Костенко (Харьков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина)

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

A numerical method for the solution of a hypersingular integral equation of the second kind obtained as a generalization of the well-known method is proposed. The existence and uniqueness theorems are proved under additional assumptions. The rate of convergence of the approximate solution to the exact solution is obtained.

Запропоновано чисельний метод розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння другого роду — узагальнення відомого методу. При додаткових припущеннях доведено теорему існування та єдиності розв'язку. Отримано оцінку швидкості збіжності наближеного розв'язку до точного.

1. Введение. Будем рассматривать уравнение вида

$$h\sqrt{1-y^2}u(y)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{(t-y)^2}\sqrt{1-t^2}dt+\frac{a}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-y|\,u(t)\sqrt{1-t^2}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(t,y)\,u(t)\sqrt{1-t^2}dt \;=\; f(y)\,, \tag{1}$$

где h — заданная комплексная постоянная, $\operatorname{Re} h \neq 0$, $\operatorname{Im} h \neq 0$, a — заданная постоянная; $f(y)$ принадлежит $C^{1,\alpha}_{[-1,1]}$, $0<\alpha<1$, — множеству функций, непрерывных на $[-1,1]$, производная которых удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, $0<\alpha<1$; $K(t,y)$ принадлежит $C^{1,\alpha}_{[-1,1]}$, $0<\alpha<1$, по каждой переменной равномерно относительно другой; искомая функция $u(t)$ принадлежит $C^{1,\alpha}_{[-1,1]}$, $0<\alpha<1$. Второе слагаемое в левой части уравнения (1) понимается в смысле конечной части по Адамару; третье слагаемое — несобственный интеграл.

Настоящая статья посвящена обобщению метода, предложенного в [1], и наследует структуру изложения [1]. В работе предложено решение задачи регуляризации уравнения (1), которое опирается на решение соответствующей задачи, представленное в [1]. Доказана теорема существования и единственности решения уравнения (1) при предположении, что $K(t,y)$ имеет специальный вид. Дана оценка скорости сходимости приближенного решения к точному.

Также уравнение (1) было получено при построении математической модели дифракции электромагнитных волн на решетке, состоящей из конечного числа неидеально проводящих лент.

2. Операторы и функциональные пространства. Пусть Π^I и Π^{II}, как в $[1,2]$, — два пространства полиномов со следующими скалярными произведениями соответственно:

$$\left(u(t), v(t)\right)^I \equiv \int_{-1}^{1} u(t)v(t)\sqrt{1-t^2}\,dt + \int_{-1}^{1}\left(u(t)\sqrt{1-t^2}\right)'\left(v(t)\sqrt{1-t^2}\right)'\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

$$\left(u(t), v(t)\right)^{II} \equiv \int_{-1}^{1} u(t)v(t)\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Слагаемые, входящие в левую часть уравнения (1), рассматриваются как линейные операторы, действующие из Π^I в Π^{II}. Пусть

$$\left(Ru\right)(y) \equiv h\sqrt{1-y^2}\,u(y), \tag{2}$$

$$\left(Au\right)(y) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{(t-y)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt, \tag{3}$$

$$\left(Bu\right)(y) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-y|\,u(t)\sqrt{1-t^2}\,dt, \tag{4}$$

$$\left(Ku\right)(y) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(t,y)\,u(t)\sqrt{1-t^2}\,dt. \tag{5}$$

В [3] показано, что оператор A переводит полином в полином и сохраняет его степень, оператор B также переводит полином в полином, но повышает его степень на две единицы. Результаты действия операторов R и K не являются полиномами.

Обозначим через L^I и L^{II} пополнения пространств Π^I и Π^{II} по нормам, которые порождены определенными выше соответствующими скалярными произведениями. Расширения операторов на введенные пространства обозначены теми же символами.

3. Задача регуляризации, интерполяционные полиномы и квадратурные формулы. Под решением задачи регуляризации оператора здесь понимается оператор, который сохраняет степень полинома и близок по норме к регуляризируемому оператору. Целью регуляризации является определение уравнения относительно приближенного решения.

Пусть $T_n(t)$ — полином Чебышева первого рода степени n, $U_{n-1}(t)$ — полином Чебышева второго рода степени $n-1$, $\left\{t_{0j}^n\right\}_{j=1}^{n-1}$ — корни $U_{n-1}(t)$, $t_{0j}^n = \cos\frac{j}{n}\pi$, $j=\overline{1,n-1}$; $u_{n-2}(t)$ — некоторый полином степени $n-2$. Тогда $u_{n-2}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} u_{n-2}\left(t_{0j}^n\right) l_{n-2,j}(t)$ — интерполяционный полином $u_{n-2}(t)$ степени $n-2$. Здесь $l_{n-2,j}(t) = \dfrac{U_{n-1}(t)}{U'_{n-1}\left(t_{0j}^n\right)\left(t-t_{0j}^n\right)}$, $j=\overline{1,n-1}$, — базисные полиномы.

Как показано в [1], оператор, обозначенный B_{n-2}, является решением задачи регуляризации B и имеет вид

$$(B_{n-2}u_{n-2})(y) \equiv (Bu_{n-2})(y) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{2T_{n-1}(y)T_{n-1}(t)}{n-1} + \frac{2T_n(y)T_n(t)}{n}\right)u_{n-2}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt. \quad (6)$$

Выполняется следующее неравенство:

$$\| B_{n-2} - B \|_{L^{II}} \le \frac{c_B}{n(n-1)}, \quad (7)$$

где $n > 2$, c_B — константа, не зависящая от n.

Следуя [1], через $K_{n-2}(t, y)$ обозначаем интерполяционный полином $K(t, y)$ с узлами $\left\{t_{0j}^n\right\}_{j=1}^{n-1}$ по каждой переменной, $K_{n-2}\left(t_{0j}^n, t_{0k}^n\right) \equiv K\left(t_{0j}^n, t_{0k}^n\right)$, $j = \overline{1, n-1}$, $k = \overline{1, n-1}$; $f_{n-2}(y)$ — интерполяционный полином $f(y)$ степени $n-2$ с узлами $\left\{t_{0j}^n\right\}_{j=1}^{n-1}$, $f_{n-2}\left(t_{0j}^n\right) \equiv f\left(t_{0j}^n\right)$, $j = \overline{1, n-1}$. Имеет место неравенство

$$\| f_{n-2} - f \|_{L^{II}} \le \frac{c_f}{n^{1+\alpha}}, \quad (8)$$

где $n > 2$, c_f — константа, не зависящая от n.

Обозначим через R_{n-2} оператор, являющийся решением задачи регуляризации R:

$$\left(R_{n-2}u_{n-2}\right)(y) \equiv h\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{1-\left(t_{0k}^n\right)^2}\,u_{n-2}\left(t_{0k}^n\right)l_{n-2,k}(y). \quad (9)$$

Он, по построению, сохраняет степень полинома и близок по норме к R (см. [4]):

$$\| R_{n-2} - R \|_{L^{II}} \le \frac{c_R}{\sqrt{n}}, \quad (10)$$

где $n > 2$, c_R — константа, не зависящая от n.

В [1] предложено следующее решение задачи регуляризации оператора K (обозначим его K_{n-2}):

$$\left(K_{n-2}u_{n-2}\right)(y) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{n-2}(t, y)u_{n-2}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt. \quad (11)$$

Он сохраняет степень полинома и близок по норме к K:

$$\| K_{n-2} - K \|_{L^{II}} \le \frac{c_K}{n^{1+\alpha}}, \quad (12)$$

где $n > 2$, c_K — константа, не зависящая от n.

Таким образом, (6), (9) и (11) определяют регуляризированное гиперсингулярное интегральное уравнение второго рода, которое в операторной записи имеет вид

$$(R_{n-2}u_{n-2})(y)-(Au_{n-2})(y)+a(B_{n-2}u_{n-2})(y)+(K_{n-2}u_{n-2})(y) = f_{n-2}(y). \qquad (13)$$

В левой и правой частях уравнения (13) стоят полиномы степени $n-2$. Совпадение этих полиномов в $n-2$ различных точках — $\left\{t_{0j}^{n}\right\}_{j=1}^{n-1}$, необходимо и достаточно для их тождественного равенства.

Уравнение (13) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в этих различных точках. Коэффициенты этой системы вычисляются по следующим квадратурным формулам интерполяционного типа (см. [1, 3]). Для оператора R_{n-2} применяется формула

$$(R_{n-2}u_{n-2})\left(t_{0j}^{n}\right) = h\sum_{k=1}^{n-1}a_{jk}^{(1)}u_{n-2}\left(t_{0k}^{n}\right), \qquad j=\overline{1,n-1},$$

где $a_{jk}^{(1)}=\sqrt{1-\left(t_{0k}^{n}\right)^{2}}\,l_{n-2,k}\left(t_{0j}^{n}\right)$, $k=\overline{1,n-1}$; для оператора A — формула

$$(Au_{n-2})\left(t_{0j}^{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}a_{jk}^{(2)}u_{n-2}\left(t_{0k}^{n}\right), \qquad j=\overline{1,n-1},$$

где $a_{jk}^{(2)}=\dfrac{\left(1-\left(t_{0k}^{n}\right)^{2}\right)\left((-1)^{k+j+1}+1\right)}{n\left(t_{0j}^{n}-t_{0k}^{n}\right)^{2}}$, при $k\neq j$ и $a_{jk}^{(2)}=-\dfrac{n}{2}$ при $k=j$, $k=\overline{1,n-1}$;

для оператора B_{n-2} — формула

$$(B_{n-2}u_{n-2})\left(t_{0j}^{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}a_{jk}^{(3)}u_{n-2}\left(t_{0k}^{n}\right), \qquad j=\overline{1,n-1},$$

где $a_{jk}^{(3)}=\dfrac{\left(t_{0k}^{n}\right)^{2}-1}{n}\left(\ln 2+2\sum_{m=1}^{n-2}\dfrac{T_m\left(t_{0j}^{n}\right)T_m\left(t_{0k}^{n}\right)}{m}\right)$, $k=\overline{1,n-1}$; для оператора K_{n-2} — формула

$$(K_{n-2}u_{n-2})\left(t_{0j}^{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}a_{jk}^{(4)}u_{n-2}\left(t_{0k}^{n}\right), \qquad j=\overline{1,n-1},$$

где $a_{jk}^{(4)}=\dfrac{1-\left(t_{0k}^{n}\right)^{2}}{n}K_{n-2}\left(t_{0j}^{n},t_{0k}^{n}\right)$, $k=\overline{1,n-1}$.

4. Регуляризированная дискретная математическая модель. В операторной записи уравнение (1) имеет вид

$$(Ru)(y) - (Au)(y) + a(Bu)(y) + (Ku)(y) = f(y)$$

и называется уравнением относительно точного решения. Уравнение относительно приближенного решения определено (13). Полагая $y = t_{0j}^n$, $j = \overline{1, n-1}$, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$(R_{n-2}u_{n-2})(t_{0j}^n) - (Au_{n-2})(t_{0j}^n) + a(B_{n-2}u_{n-2})(t_{0j}^n) + (K_{n-2}u_{n-2})(t_{0j}^n) =$$

$$= f_{n-2}(t_{0j}^n), \qquad j = \overline{1, n-1}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Уравнение* (13) — *уравнение относительно приближенного решения, эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений относительно* $\left(u_{n-2}(t_{0j}^n)\right)_{j=1}^{n-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{jk} u_{n-2}(t_{0k}^n) = f_{n-2}(t_{0j}^n),$$

где $a_{jk} = ha_{jk}^{(1)} + a_{jk}^{(2)} + aa_{jk}^{(3)} + a_{jk}^{(4)}$.

5. Теорема существования и единственности решения гиперсингулярного интегрального уравнения второго рода. Для доказательства используются приведенные ниже теоремы.

Теорема 2. *Оператор* $R - A$, *действующий из* L^I *в* L^{II}, *ограничен*: $\|(R-A)\|_{L^{II}} \le 2$, *и обратим*: *существует* $(R-A)^{-1}$, *действующий из* L^{II} *в* L^I *и* $\left\|(R-A)^{-1}\right\|_{L^I} \le 1$.

Доказательство. Пусть g — произвольная функция из L^I, тогда с учетом того, что $\|A\|_{L^{II}} = 1$ (см. [2, с. 106]), имеем

$$\|(R-A)g\|_{L^{II}} \le \|Rg\|_{L^{II}} + \|Ag\|_{L^{II}} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left|\sqrt{1-t^2}\, g(t)\right|^2 \sqrt{1-t^2}\, dt} + \|Ag\|_{L^{II}} \le 2\|g\|_{L^I}.$$

Для того чтобы оценить $\|(R-A)g\|_{L^{II}}$ снизу, рассмотрим следующие скалярные произведения:

$$\left((Rg)(t), g(t)\right)^{II} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, g^2(t) \sqrt{1-t^2}\, dt \ge 0. \tag{14}$$

Как показано в [2, с. 106], справедлива следующая оценка:

$$-\left((Ag)(t), g(t)\right)^{II} \ge \|g(t)\|_{L^{II}}^2. \tag{15}$$

Из (14) и (15) получаем

$$\left(\left((R-A)g\right)(t),g(t)\right)^{II} = \left((Rg)(t),g(t)\right)^{II} - \left((Ag)(t),g(t)\right)^{II} \geq \|g(t)\|_{L^{II}}^2 . \tag{16}$$

Легко видеть, что R самосопряжен; A также самосопряжен (см. [2, с. 106]). Таким образом, $R-A$ самосопряжен и имеет место оценка

$$\left(\left((R-A)^* g\right)(t),\, g(t)\right)^{II} \geq \|g(t)\|_{L^{II}}^2 . \tag{17}$$

Из (16), (17) и неравенства Коши – Буняковского имеем следующие неравенства:

$$\|(R-A)g\|_{L^{II}} \geq \|g\|_{L^I} \quad \text{и} \quad \left\|(R-A)^* g\right\|_{L^{II}} \geq \|g\|_{L^I} .$$

Отсюда следует (см. [5, с. 206]) существование левых ограниченных обратных операторов, обозначенных $(R-A)_l^{-1}$ и $\left((R-A)^*\right)_l^{-1}$, со следующими оценками: $\left\|(R-A)_l^{-1}\right\|_{L^I} \leq 1$ и $\left\|\left((R-A)^*\right)_l^{-1}\right\|_{L^I} \leq 1$. Отсюда, в свою очередь, следует существование двустороннего $(R-A)^{-1}$, действующего из L^{II} в L^I, и $\left\|(R-A)^{-1}\right\|_{L^I} \leq 1$.

Теорема доказана.

Теорема 3 [6, с. 351]. *Пусть* T *— компактный оператор,* I *— единичный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

$(I-T)x=b$ *разрешимо при любой правой части;*

$(I-T)x=0$ *не имеет ненулевых решений;*

$(I-T)x=b$ *разрешимо при любой правой части, причем единственным образом.*

Также нам понадобится известное утверждение о компактности композиции компактного и ограниченного операторов (см., например, [5] или [6]).

Как указано выше, теорема существования и единственности решения уравнения (1) доказана при предположении, что ядро имеет специальный вид

$$K(t,y) = \frac{(\Bbbk a)^2}{2}\left(\int_0^1 \frac{\cos \Bbbk a(t-y)x}{i\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)}dx + \int_1^\infty \frac{\cos \Bbbk a(t-y)x}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}dx\right) -$$

$$-\frac{(\Bbbk a)^2}{2}\left(i\frac{\pi}{2}\left(H_0^{(1)}\left(\Bbbk a|t-y|\right)+\ln|t-y|\right)\right). \tag{18}$$

Здесь $\Bbbk a$ — вещественный параметр. Вид $K(t,y)$ обусловлен спецификой решаемой проблемы — задачи дифракции.

Преобразуем уравнение (1), применив к обеим частям $(R-A)^{-1}$. В результате получим

$$(Iu)(y)+(R-A)^{-1}((aB+K)u)(y)=\left((R-A)^{-1}f\right)(y).$$

В [2, с. 117] показано, что $aB+K$ — компактный оператор. Тогда $(R-A)^{-1}(aB+K)$ также компактен как композиция компактного и ограниченного операторов.

Перейдем к доказательству существования и единственности решения. Докажем второе утверждение теоремы 3. Предположим, что существует такое не равное нулю g, что $\left(I-(R-A)^{-1}(aB+K)\right)g=0$. Применив $R-A$ к обеим частям, получим уравнение

$$h\sqrt{1-y^2}g(y)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{(t-y)^2}\sqrt{1-t^2}dt+\frac{a}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-y|g(y)\sqrt{1-t^2}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(t,y)g(t)\sqrt{1-t^2}dt = 0.$$

В [7] представлен метод сведения парного интегрального уравнения к гиперсингулярному интегральному уравнению первого рода. В [8] этот метод был модифицирован: парное интегральное уравнение более общего вида сведено к гиперсингулярному интегральному уравнению второго рода. Проведя обратный ход рассуждений этого метода, получим одно из уравнений парного интегрального уравнения, которое имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}G(\lambda)(\gamma(\lambda)+h)e^{i\lambda y}d\lambda = 0, \qquad y\in(-1,1), \tag{19}$$

где $G(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}g(t)\sqrt{1-t^2}e^{-i\lambda t}dt$, $\gamma(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-\Bbbk^2}$ при $\lambda>\Bbbk$ и $\gamma(\lambda)=-i\sqrt{\Bbbk^2-\lambda^2}$ при $\lambda<\Bbbk$, $\Bbbk$ — параметр. Из (19) имеем $G(\lambda)(\gamma(\lambda)+h)=0$ почти всюду. Учитывая определение $\gamma(\lambda)$ и то, что $\operatorname{Re}h\neq 0$ и $\operatorname{Im}h\neq 0$, получаем $\gamma(\lambda)+h\neq 0$. Таким образом $\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}g(t)\sqrt{1-t^2}e^{-i\lambda t}dt=0$ почти всюду. Итак, приходим к противоречию: $g(t)$ равна нулю почти всюду. Второе утверждение теоремы 3 доказано.

Таким образом, из теоремы 3 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *Уравнение* (1) *с таким* h, *что* $\operatorname{Re}h\neq 0$ *и* $\operatorname{Im}h\neq 0$, *известной постоянной* a *и ядром, определенным* (18), *имеет единственное решение в* L^I *при любой правой части, принадлежащей* L^{II}.

В случае, когда решение уравнения ищется в L^{II}, т. е. когда операторы, порожденные (1), действуют из L^{II} в L^{II}, предложенное доказательство существования решения уравнения провести невозможно. Это связано с тем, что A не ограничен (см., например, [3, с. 69]). Однако в этом случае, как показано в [9, с. 23], оператор, обратный к A, имеет вид

$$\left(A^{-1}v\right)(t) \equiv \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\ln\left|\frac{t-y}{1-ty-\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-y^2}}\right|v(t)\,dy$$

и действует из L^{II} в L^{II}. Так, A^{-1} имеет логарифмическую особенность в ядре и является компактным оператором. Далее проведение доказательства аналогично приведенному выше: применением A^{-1} уравнение (1) преобразуется к виду

$$(Iu)(y)+\left(A^{-1}Ru\right)(y)+\left(\left(A^{-1}(aB+K)\right)u\right)(y) = \left(A^{-1}f\right)(y),$$

причем $A^{-1}R+A^{-1}(aB+K)$ — компактный оператор, как композиция компактного оператора и ограниченных операторов. Доказательство единственности решения уравнения проводится аналогично приведенному выше доказательству единственности решения. Так, из теоремы 3 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. *Уравнение* (1) *с таким* h, *что* $\operatorname{Re} h \neq 0$ *и* $\operatorname{Im} h \neq 0$, *известной постоянной* a *и ядром, определенным* (18), *имеет единственное решение в* L^{II} *при любой правой части, принадлежащей* L^{II}.

6. Скорость сходимости приближенного решения к точному решению. Оценка нормы разности точного решения уравнения (1) и приближенного решения — решения уравнения (13), получена с помощью следующей теоремы.

Теорема 6 [10, 19]. *Пусть* X *и* Y *— банаховы пространства,* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— соответственно последовательности их конечномерных подпространств;* Q *и* Q_n *— линейные операторы, действующие из* X *в* Y *и из* X_n *в* Y_n *соответственно,* $Qx = y$ *и* $Q_n x_n = y_n$ *— уравнения. Пусть выполнены условия*:

1) Q *обратим;*
2) $\varepsilon^{(n)} \equiv \|Q-Q_n\|_Y \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
3) *для любого* n $\dim X_n = \dim Y_n = m(n) < \infty$;
4) $\delta^{(n)} \equiv \|y-y_n\|_Y \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Тогда при всех n, *удовлетворяющих неравенству* $p_n \equiv \left\|Q^{-1}\right\|_X \|Q-Q_n\|_Y < 1$, *уравнение* $Q_n x_n = y_n$ *имеет единственное решение при любой правой части (обозначим его* x_n^**) и*

$$\left\|x_n^*\right\|_{X_n} \leq \left\|Q^{-1}\right\|_{X_n}\|y_n\|_{Y_n}, \qquad \left\|Q^{-1}\right\|_{X_n} \leq \frac{\left\|Q^{-1}\right\|_X}{1-p_n}.$$

Скорость сходимости приближенного решения к точному решению (обозначим его x^**) оценивается так:* $\dfrac{\alpha_n}{\|Q\|_Y} \leq \left\|x^*-x_n^*\right\|_X \leq \alpha_n\left\|Q^{-1}\right\|_X$, *где* $\alpha_n \equiv \left\|(y-y_n)+(Q_n-Q)x_n^*\right\|_Y$, *и*

$$\left\| x^{*} - x_n^{*} \right\|_X \le \frac{\left\| Q^{-1} \right\|_X}{1 - p_n} \left(\| y - y_n \|_Y + p_n \| y \|_Y \right) = O\left(\varepsilon^{(n)} + \delta^{(n)} \right).$$

Таким образом, из теоремы 6 и (7), (10), (12), (8) вытекает следующая теорема.

Теорема 7. *Решение уравнения* (13) *при достаточно больших значениях* n *близко к решению уравнения* (1) *и имеет место следующее неравенство*:

$$\| u - u_{n-2} \|_{L^{II}} \le \frac{c}{\sqrt{n}}, \tag{20}$$

где $n > 2$, c *— константа, равная наибольшему из чисел* c_R, c_B, c_K *и* c_f.

Неравенство (20) помогает оценить скорость сходимости линейных функционалов от приближенного решения к их значениям от точного решения. Вычисление таких функционалов часто необходимо при решении прикладных задач математической физики, которые сводятся к рассматриваемому граничному гиперсингулярному интегральному уравнению.

Автор выражает благодарность профессору Юрию Владимировичу Ганделю за интерес к работе.

1. *Гандель Ю. В., Кононенко А. С.* Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения // Дифференц. уравнения. – 2006. – **42**, № 9. – С. 1256 – 1262.
2. *Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С.* Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учеб. пос. – Харьков: Изд-во Харьк. гос. ун-та им. М. Горького, 1992. – Ч. II – 145 с.
3. *Гандель Ю. В.* Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов: Учеб. пос. – Харьков: Изд-во Харьк. нац. ун-та им. В. Н. Каразина, 2001. – 92 с.
4. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М.: Гостехтеориздат, 1949. – 688 с.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
6. *Кадец В. М.* Курс функционального анализа: Учеб. пос. – Харьков: Изд-во Харьков. нац. ун-та им. В. Н. Каразина, 2006. – 607 с.
7. *Гандель Ю. В.* Парные и гиперсингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках и экранах // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: Тр. XI Междунар. симп. (Херсон, 11 июня – 18 июня 2003 г.) – Херсон, 2003. – С. 53 – 58.
8. *Костенко А. В.* Еще раз о дифракции плоской монохроматической электромагнитной волны на импедансной ленте // Вестн. Харьков. нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. – 2012. – **20**, № 1037. – С. 110 – 124.
9. *Лифанов И. К.* Особые интегральные уравнения и методы их численного решения: Учеб. пос. – М.: МАКС Пресс, 2006. – 70 с.
10. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации линейных задач. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 231 с.

Получено 04.12.12,
после доработки — 08.07.13