УДК 517.9

В. А. Лагода (Київ. нац. ун-т технологій та дизайну),
І. О. Парасюк (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ТЕОРЕМА ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНОГО ПЕРЕРІЗУ НАД $\mathbb{R}^m$ ІНДЕФІНІТНО МОНОТОННОЇ СИСТЕМИ В $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$

We consider a nonlinear system on the direct product $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. For this system, under the conditions of indefinite coercivity and indefinite monotonicity, we establish the existence of a bounded Lipschitzian invariant section over $\mathbb{R}^m$.

Рассматривается нелинейная система в прямом произведении $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. При выполнении условий индефинитной коэрцитивности и индефинитной монотонности установлено существование у такой системы ограниченного липшицевого инвариантного сечения над $\mathbb{R}^m$.

1. Вступ. Розглянемо систему

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, x), \qquad \dot{x} = b(\varphi, x), \tag{1}$$

фазовим простором якої є прямий добуток $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$, де $\mathcal{M}$ — m-вимірний диференційовний многовид. Припускатимемо, що $a(\cdot,\cdot)\colon \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n \mapsto T\mathcal{M}$ та $b(\cdot,\cdot)\colon \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ — локально ліпшицеві відображення, причому $a(\varphi, x) \in T_\varphi\mathcal{M}$ для всіх $(\varphi, x) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$ ($T_\varphi\mathcal{M}$ — дотичний простір до $\mathcal{M}$ у точці φ).

Трактуватимемо фазовий простір системи (1) як тривіальне розшарування над $\mathcal{M}$ з шаром $\mathbb{R}^n$.

Означення 1. *Обмеженим інваріантним перерізом системи* (1) *назвемо графік неперервного обмеженого відображення* $u(\cdot)\colon \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}^n$, *інваріантний відносно* (*локального*) *потоку системи* (1).

Природно виникає питання: за яких умов система має обмежений інваріантний переріз? Випадок, коли $\mathcal{M}$ є компактним многовидом, зокрема m-вимірним тором $\mathbb{T}^m$, вивчався багатьма авторами, причому переважно в рамках теорії збурень, коли відображення $b(\cdot,\cdot)$ допускає зображення

$$b(\varphi, x) = P(\varphi)x + c(\varphi, x), \tag{2}$$

де $P(\cdot)\colon \mathcal{M} \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ і $c(\cdot,\cdot)\colon \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ — неперервні (достатньо гладкі) відображення, норма $c(\varphi, 0)$ є достатньо малою, а інваріантний переріз шукається в околі тривіального розв'язку $x = 0$. Фундаментальні результати в цьому випадку були одержані А. М. Самойленком, який розробив математичний апарат, що одержав назву „метод функцій Гріна – Самойленка" [1 – 3] (детальну бібліографію див. у [2]).

Менш дослідженим є випадок, коли $\mathcal{M}$ — некомпактний многовид [4 – 7]. Зокрема, для випадку $\mathcal{M} = \mathbb{R}^m$ у [7] показано, що якщо система

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, 0), \qquad \dot{x} = A(\varphi)x$$

має функцію Гріна – Самойленка, то оператор, який кожному обмеженому відображенню $f(\varphi) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n)$ ставить у відповідність обмежений інваріантний переріз системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, 0), \qquad \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi),$$

є c-неперервним (тобто неперервним у топології рівномірної збіжності на кожній компактній підмножині простору $\mathbb{R}^m$) [8, 9]. Цей факт дає можливість застосовувати метод функцій Гріна – Самойленка у поєднанні з принципами нерухомої точки для встановлення умов існування обмеженого інваріантного перерізу системи (1) з правою частиною $b(\cdot, \cdot)$ вигляду (2) і функцією $a(\varphi, x) \equiv a(\varphi, 0)$.

Мета цієї статті полягає в тому, щоб для випадку $\mathcal{M} = \mathbb{R}^m$ знайти нелокальні достатні умови існування обмеженого інваріантного перерізу системи (1) на основі підходу, запропонованого у [12]. А саме, будемо розглядати клас локально ліпшицевих систем вигляду (1), які мають певні властивості індефінітної коерцитивності та індефінітної монотонності. Основний результат про існування обмеженого інваріантного перерізу для таких систем буде одержано шляхом поєднання деякої модифікації топологічного принципу Важевського з теоремою Шаудера – Тихонова про нерухому точку (див., наприклад, [11, с. 227]). Формулювання цього результату повністю збігається з основною теоремою роботи [12]. Однак його доведення має істотну особливість. А саме, звівши задачу існування обмеженого інваріантного перерізу до задачі про нерухому точку деякого нелінійного оператора χ, який діє у просторі ліпшицевих відображень з $\mathbb{R}^m$ у $\mathbb{R}^n$, нам, на відміну від випадку, коли $\mathcal{M} = \mathbb{T}^m$, доведеться додатково пересвідчитися, що цей оператор має властивість c-неперервності в сенсі [7]. Зазначимо, що конструкція оператора χ не використовує апарат функцій Гріна – Самойленка.

2. Теорема про існування ліпшицевого інваріантного перерізу. Далі припускаємо, що відображення $a(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ та $b(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ для довільного $R > 0$ задовольняють умову Ліпшиця на множині $\mathbb{R}^m \times B^n_R(0)$, де $B^n_R(0)$ — куля в $\mathbb{R}^n$ радіуса R з центром у початку координат, зі сталою Ліпшиця, яка, можливо, залежить від R. Крім того, припускаємо, що система (1) допускає сім'ю симетричних операторів $S(\cdot) \in \mathrm{C}^1\big(\mathbb{R}^m \mapsto \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)\big)$ таку, що

$$\sup_{\varphi\in\mathbb{R}^m} \|S(\varphi)\| < \infty, \qquad \inf_{\varphi\in\mathbb{R}^m} |\det S(\varphi)| > 0, \tag{3}$$

і виконано умови:

(A) для кожного $\varphi \in \mathbb{R}^m$ існують проектори $P_+(\varphi)$, $P_-(\varphi)$ на інваріантні підпростори $\mathbb{L}_+(\varphi)$, $\mathbb{L}_-(\varphi)$ оператора $S(\varphi)$ такі, що його звуження на $\mathbb{L}_+(\varphi)$ та на $\mathbb{L}_-(\varphi)$ є відповідно додатно та від'ємно визначеними операторами;

(B) існують функції $\beta(\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}^m \mapsto [1,\infty)\right)$, $q(\cdot) \in \mathrm{C}((0,\infty) \mapsto \mathbb{R})$, $p(\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+)$, $Q(\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+)$ такі, що $p(\cdot)$ є неспадною і для всіх $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ та $u \in \mathbb{R}^n$ справджуються нерівності

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\left\langle S(\varphi)x, x\right\rangle}{\partial\varphi} a(\varphi, u) + \langle S(\varphi)b(\varphi, x), x\rangle \geq \beta(\varphi)\Big[q\left(\|x\|^2\right) - p\left(\|u\|^2\right)\Big]\|x\|^2,$$

$$\Big|\langle b(\varphi, x), x\rangle\Big| \leq \beta(\varphi)Q\big(\|x\|^2\big);$$

(C) існують числа $z_0 > 0$ і $z^* > z_0$ такі, що $q(z) > p(z^*)$, $Q(z) > 0$ для всіх $z \in (z_0, z^*]$ і

$$\int\limits_{z_0}^{z^*} \frac{\big[q(z) - p(z^*)\big]z}{Q(z)}dz \geq \frac{z_0}{2}\left(\lambda_+ - \lambda_-\right),$$

де $\lambda_+ := \sup_{\varphi\in\mathbb{R}^m} \lambda_+(\varphi)$, $\lambda_- := \inf_{\varphi\in\mathbb{R}^m} \lambda_-(\varphi)$, а $\lambda_+(\varphi)$ та $\lambda_-(\varphi)$ — відповідно найбільше та найменше власні значення оператора $S(\varphi)$;

(D) існує стала $\gamma > 0$ така, що

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \langle S(\varphi)(x-y), x-y\rangle}{\partial\varphi} a(\varphi,u) + \langle S(\varphi)\left[b(\varphi,x) - b(\varphi,y)\right], x-y\rangle \geq \gamma\left\|x-y\right\|^2$$

для всіх $\varphi \in \mathbb{R}^m$ і всіх u, x, $y \in \mathbb{R}^n$ таких, що

$$\|u\|^2,\ \|x\|^2,\ \|y\|^2 \leq z^*, \qquad \lambda_- z_0 \leq \langle S(\varphi)x, x\rangle, \qquad \langle S(\varphi)y, y\rangle \leq \lambda_+ z_0.$$

Без обмеження загальності міркувань далі припускаємо, що $\max\left\{\lambda_+, |\lambda_-|\right\} = 1$, а відтак

$$\sup_{\varphi\in\mathbb{R}^m} \|S(\varphi)\| = 1. \tag{4}$$

Як і у [12], умову (B) назвемо умовою індефінітної S-коерцитивності системи (1) в $\mathbb{R}^m \times \times \mathbb{R}^n$, а умову (D) — умовою індефінітної S-монотонності цієї системи на множині $\mathbb{R}^m \times \times \left\{x\colon\ \|x\|^2 \leq z^*\right\}$. Умова (C) виражає певні взаємозалежності швидкостей зростання функцій $q(\cdot)$, $Q(\cdot)$, $p(\cdot)$ при $z \to \infty$. Приклади функцій, які задовольняють цю умову, наведено у [12].

З огляду на припущення щодо ліпшицевості правих частин системи (1) визначимо такі чотири сталі:

$$l_a := \sup\left\{\|a(\varphi,x) - a(\psi,x)\|\,\|\varphi-\psi\|^{-1} : \varphi,\ \psi\in\mathbb{R}^m,\ \varphi\neq\psi,\ \|x\|^2 \leq z^*\right\},$$

$$L_a := \sup\left\{\|a(\varphi,x) - a(\varphi,y)\|\,\|x-y\|^{-1} : \varphi\in\mathbb{R}^m,\ x\neq y,\ \|x\|^2,\ \|y\|^2 \leq z^*\right\},$$

$$l_b := \sup\left\{\|b(\varphi,x) - b(\psi,x)\|\,\|\varphi-\psi\|^{-1} : \varphi,\ \psi\in\mathbb{R}^m,\ \varphi\neq\psi,\ \|x\|^2 \leq z^*\right\},$$

$$L_b := \sup\left\{\|b(\varphi,x) - b(\varphi,y)\|\,\|x-y\|^{-1} : \varphi\in\mathbb{R}^m,\ x\neq y,\ \|x\|^2, \|y\|^2 \leq z^*\right\}.$$

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови* (A)–(D) *і нерівність*

$$\max_{l\in[l_-,l_+]} \int\limits_1^{A(l)} \frac{\sqrt{s}-1}{B(l)\sqrt{s}+1}ds \geq \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2}, \tag{5}$$

де

$$A(l) := \frac{\left[\gamma - \lambda_+(l_a + lL_a)\right]^2 l^2}{l_b^2}, \qquad B(l) := \frac{L_b + l_a + lL_a}{\gamma - \lambda_+(l_a + lL_a)},$$

а l_- та l_+ — відповідно менший та більший корені рівняння $A(l) = 1$. Тоді система (1) *має обмежений інваріантний переріз, який є графіком ліпшицевого відображення $u(\cdot)\colon \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ зі сталою Ліпшиця, що реалізує максимум лівої частини нерівності* (5), *а квадрат норми цього відображення не перевищує z^*.*

***Зауваження* 1.** Як показано у [12], для виконання умови (5) достатньо припустити, що

$$\frac{(\gamma-\lambda_+ l_a)\big[(\gamma-\lambda_+ l_a)^2-4\lambda_+ L_a l_b\big]^2}{8\lambda_+ L_a^2 l_b^2\big[(\gamma-\lambda_+ l_a)(1+\lambda_+)+2\lambda_+(l_a+L_b)\big]}\geq\lambda_+-\lambda_-. \tag{6}$$

***Зауваження* 2.** Оскільки квадрат норми відображення $u(\cdot)$ з теореми не перевищує z^*, то без обмеження загальності подальших міркувань, як і у [12], будемо вважати, що при $\|x\|^2>z^*$ функцію $b(\cdot,\cdot)$ перевизначено за формулою

$$b(\varphi,x)=\frac{\|x\|}{\sqrt{z^*}}b\left(\varphi,\frac{\sqrt{z^*}x}{\|x\|^2}\right)$$

і відповідно при $z>z^*$ перевизначено функції $q(\cdot)$ та $Q(\cdot)$ рівностями

$$q(z)=q(z^*),\qquad Q(z)=zQ(z^*)/z^*.$$

Таким чином ми забезпечуємо виконання нерівності $q(z)>p(z^*)$ в умові (C) для всіх $z>z_0$, а також розбіжність інтеграла

$$\int\limits_{z_0}^{\infty}\frac{\big[q(z)-p(z^*)\big]z}{Q(z)}dz=\infty,$$

що спрощує подальші міркування.

Доведення теореми, як і у [12], базується на такій природній ідеї. Для додатного числа l позначимо через $\mathfrak{U}_l$ простір відображень $u(\cdot)\colon\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}^n$ таких, що $\sup_{\varphi\in\mathbb{R}^m}\|u(\varphi)\|^2\leq z^*$ і $\|u(\varphi)-u(\psi)\|\leq l\|\varphi-\psi\|$ для всіх $\varphi,\ \psi\in\mathbb{R}^m$. Тепер, зафіксувавши $u(\cdot)\in\mathfrak{U}_l$, утворимо систему

$$\dot\varphi=a\big(\varphi,u(\varphi)\big),\qquad\dot x=b(\varphi,x) \tag{7}$$

і вияснимо, чи має вона обмежений інваріантний переріз. Оскільки $a\big(\cdot,u(\cdot)\big)\colon\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}^n$ — глобально ліпшицеве відображення, то перша підсистема в (7) визначає потік $\big(\mathbb{R}^m,\{\phi_t(\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}}\big)$ $\big($задля спрощення позначень ми не вказуємо залежність цього потоку від $u(\cdot)\big)$. Якщо $\xi_t(\varphi,x)$ — непродовжуваний розв'язок системи

$$\dot x=b(\phi_t(\varphi),x) \tag{8}$$

з інтервалом визначення $J_{\varphi,x}$ і початковим значенням $\xi_0(\varphi,x)=x$, то пара $\big(\phi_t(\varphi),\xi_t(\varphi,x)\big)$, $t\in J_{\varphi,x}$, визначає локальний потік системи (7). Очевидно, що графік відображення $\hat u(\cdot)\colon\mathbb{R}^m\mapsto$ $\mapsto\mathbb{R}^n$ буде інваріантним перерізом системи (7) тоді й лише тоді, коли виконуватиметься рівність

$$\hat u\circ\phi_t(\varphi)=\xi_t\big(\varphi,\hat u(\varphi)\big)\quad\forall(t,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m,$$

тобто $\hat u\circ\phi_t(\varphi)$ буде розв'язком системи (8), який у момент $t=0$ набуває значення $\hat u(\varphi)$ при кожному $\varphi\in\mathbb{R}^m$. Для доведення існування відображення $\hat u(\cdot)$, як і у [12], скористаємося тим, що досліджуваній системі можна поставити у відповідність пару допоміжних функцій вигляду

$$W(\varphi, x) := \langle S(\varphi)x, x\rangle, \qquad V(x) := \int\limits_{z_0}^{\|x\|^2} \frac{\big[q(s) - p(z^*)\big]s}{Q(s)}\, ds,$$

перша з яких є напрямною функцією, а друга — оцінювальною в сенсі [12]. А саме, з огляду на умову (B) для кожного $u(\cdot) \in \mathfrak{U}_l$ похідні $\dot{W}(\cdot,\cdot)$ та $\dot{V}(\cdot,\cdot)$ функцій $W(\cdot,\cdot)$ та $V(\cdot)$ внаслідок системи (7) при $\|x\|^2 > z_0$ задовольняють нерівності

$$\dot{W}(\varphi, x) \geq 2\beta(\varphi)\left[q(\|x\|^2) - p(z^*)\right]\|x\|^2, \tag{9}$$

$$\left|\dot{V}(\varphi, x)\right| \leq 2\left[\frac{[q(z) - p(z^*)]z}{Q(z)}\right]_{z=\|x\|^2} |\langle x, b(\varphi, x)\rangle| \leq$$

$$\leq 2\beta(\varphi)\left[\Big(q\big(\,\|x\|^2\,\big) - p(z^*)\Big)\right]\|x\|^2 \leq \dot{W}(\varphi, x), \tag{10}$$

крім того, поверхні додатного рівня функції $V(\cdot)$ є $(n-1)$-вимірними сферами. Отже, за термінологією [12] зазначені допоміжні функції утворюють V-W-пару для системи (7).

Далі інваріантний переріз системи (1) можна шукати як нерухому точку оператора χ, який діє за правилом

$$\mathfrak{U}_l \ni u(\varphi) \mapsto \chi[u](\varphi) := \hat{u}(\varphi). \tag{11}$$

Як буде показано, існування такої точки в $\mathfrak{U}_l$, де число l задовольняє нерівність (5), випливатиме з принципу Шаудера – Тихонова.

3. Існування обмеженого інваріантного перерізу нелінійного розширення динамічної системи на $\mathbb{R}^m$. Існування обмеженого інваріантного перерізу системи (7) буде спиратися на модифікований принцип Важевського. Пояснимо, як працює цей принцип.

Нехай $\mathcal{D}$ — область у просторі $\big\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\big\}$ така, що для кожного $t \geq 0$ множина $\big\{x \in \mathbb{R}^n \colon (t, x) \in \mathcal{D}\big\}$ є непорожньою. Розглянемо систему

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{12}$$

права частина якої визначена і неперервна в деякому околі області $\mathcal{D}$. Позначимо через $\mathcal{E} \subset \subset \dot{\mathcal{D}} := \mathrm{cl}\,\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}$ множину точок строгого виходу інтегральних кривих системи (12) з області $\mathcal{D}$ ($\mathrm{cl}\,\mathcal{D}$ — замикання множини $\mathcal{D}$).

Означення 2. *Скажемо, що пара $(\mathcal{D}, f)$ має властивість* $\mathbf{W}$, *якщо існує компакт $\mathcal{K} \subset \subset \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ такий, що $\mathcal{K} \cap \mathcal{E} \neq \varnothing$ і множину $\mathcal{K}$ не можна ізотопією по множині $\mathrm{cl}\,\mathcal{D}$ продеформувати у підмножину множини $\mathcal{E}$, залишаючи при цьому нерухомою множину $\mathcal{K} \cap \mathcal{E}$.*

Нехай $u(\cdot) \in \mathfrak{U}_l$. Як і у п. 2, $\phi_t(\varphi)$, $t \in \mathbb{R}$, позначає розв'язок системи $\dot{\varphi} = a\big(\varphi, u(\varphi)\big)$ такий, що $\phi_0(\varphi) = \varphi$.

Твердження 1. *Припустимо, що існують числа $s_- < 0$, $s_+ > 0$ такі, що на множині*

$$\Big\{(\varphi, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \colon \big\langle S(\varphi)x, x\big\rangle = s_-\Big\} \cup \Big\{(\varphi, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \colon \big\langle S(\varphi)x, x\big\rangle = s_+\Big\}$$

справджується нерівність

$$\frac{\partial \langle S(\varphi)x, x\rangle}{\partial \varphi} a\big(\varphi, u(\varphi)\big) + 2\big\langle S(\varphi)b(\varphi, x), x\big\rangle > 0. \tag{13}$$

Тоді для кожного $\varphi \in \mathbb{R}^m$ *пара* $\big(\mathcal{D}_\varphi, b(\phi_t(\varphi), x)\big)$, *де*

$$\mathcal{D}_\varphi := \Big\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \colon s_- < \big\langle S\big(\phi_t(\varphi)\big)x, x\big\rangle < s_+\Big\},$$

має властивість $\mathbf{W}$, *причому в ролі компакта* $\mathcal{K}$ *можна взяти* n_+*-вимірний еліпсоїдальний диск*

$$\mathcal{K}_\varphi := \Big\{(t, x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^n \colon x \in \mathbb{L}_+(\varphi) \wedge \langle S(\varphi)x, x\rangle \le s_+\Big\}.$$

Доведення. Умови твердження гарантують, що множиною точок строгого виходу (строгого входу) інтегральних кривих системи (8) з $\mathcal{D}_\varphi$ (у $\mathcal{D}_\varphi$) є гіперповерхня $\mathcal{E}_\varphi^+$ (гіперповерхня $\mathcal{E}_\varphi^-$), де

$$\mathcal{E}_\varphi^\pm := \Big\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \colon \big\langle S\big(\phi_t(\varphi)\big)x, x\big\rangle = s_\pm\Big\}. \tag{14}$$

Нехай $e_k^\pm(\cdot;\varphi) \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n)$, $k = 1, \ldots, n_\pm$, — набір відображень такий, що $\Big\{e_k^\pm(t;\varphi)\Big\}_{k=1}^{n_\pm}$ — базис в $\mathbb{L}_\pm\big(\phi_t(\varphi)\big)$, де $n_\pm := \dim \mathbb{L}_\pm(\varphi)$. Позначимо через $R_\pm(t;\varphi) := \pm\Big\{r_{ij}^\pm(t;\varphi)\Big\}_{i,j=1}^{n_\pm}$ додатно визначені матриці з елементами $r_{ij}^\pm(t;\varphi) := \Big\langle S(\phi_t(\varphi))e_i^\pm(t;\varphi), e_j^\pm(t;\varphi)\Big\rangle$. Відображення $\Xi_\varphi \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+} \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, яке кожній точці $(t, \xi_1, \ldots, \xi_{n_-}, \eta_1, \ldots, \eta_{n_+})$ ставить у відповідність точку $(t, x) = \Xi_\varphi(t, \xi, \eta)$, де

$$x = \sum_{k=1}^{n_-} \xi_k e_k^-(t;\varphi) + \sqrt{s_+ + \langle R_-(t;\varphi)\xi, \xi\rangle} \sum_{k=1}^{n_+} \left(\sqrt{R_+^{-1}(t;\varphi)}\eta\right)_k e_k^+(t;\varphi),$$

а $\left(\sqrt{R_+^{-1}(t;\varphi)}\eta\right)_k$ — k-та компонента вектора $\sqrt{R_+^{-1}(t;\varphi)}\eta$, є дифеоморфізмом. Легко бачити, що коли точка η належить одиничній сфері $\mathbb{S}^{n_+-1} := \Big\{\eta \in \mathbb{R}^{n_+} \colon \langle \eta, \eta\rangle = 1\Big\}$, то точка $(t, x) = \Xi_\varphi(t, \xi, \eta)$ справджує рівність $\big\langle S\big(\phi_t(\varphi)\big)x, x\big\rangle = s_+$, тобто належить $\mathcal{E}_\varphi^+$. Таким чином, звуження дифеоморфізму Ξ_φ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{S}^{n_+-1}$ визначає структуру прямого добутку многовиду $\mathcal{E}_\varphi^+$. При цьому відображення

$$\Xi_\varphi(0, 0, \cdot) \colon\ \mathbb{S}^{n_+-1} \mapsto \mathcal{E}_\varphi^+$$

визначає вкладення, образом якого є $(n_+ - 1)$-вимірний еліпсоїд $\mathcal{K}_\varphi \cap \mathcal{E}_\varphi^+$ — представник нетривіального елемента групи гомологій $\mathrm{H}_{n_+-1}(\mathcal{E}_\varphi^+)$ топологічного простору $\mathcal{E}_\varphi^+$. Водночас цикл $\mathcal{K}_\varphi \cap \mathcal{E}_\varphi^+$ зображує тривіальний елемент групи гомологій $\mathrm{H}_{n_+-1}(\mathrm{cl}\,\mathcal{D}_\varphi)$, оскільки є межею еліпсоїдального диска $\mathcal{K}_\varphi \subset \mathrm{cl}\,\mathcal{D}_\varphi$. Звідси випливає, що такий диск не можна ізотопією по $\mathrm{cl}\,\mathcal{D}_\varphi$ продеформувати в підмножину гіперповерхні $\mathcal{E}_\varphi^+$, залишивши нерухомою його межу.

Твердження 1 доведено.

Далі, для довільного $x \in \mathbb{R}^n$, як і у п. 2, через $\xi_t(\varphi, x)$ позначимо розв'язок системи (8) такий, що $\xi_0(\varphi, x) = x$.

Твердження 2. *Якщо виконано умови твердження* 1, *то для кожного фіксованого* $\varphi \in \mathbb{R}^m$ *знайдеться точка* $(0, x_\varphi) \in \mathcal{K}_\varphi \setminus \mathcal{E}_\varphi^+$ *така, що при* $t \geq 0$ *графік розв'язку* $\xi_t(\varphi, x_\varphi)$ *належить множині* $\mathcal{D}_\varphi$ *на своєму правому максимальному інтервалі існування* $I_\varphi^+ \subset \mathbb{R}_+$.

Доведення. Оскільки $\mathcal{K}_\varphi \setminus \mathcal{E}_\varphi^+ \subset \mathcal{D}_\varphi$, а множина $\mathcal{E}_\varphi^+$ є компонентою межі області $\mathcal{D}_\varphi$ і складається з точок строгого входу інтегральних кривих системи (8) у цю область, то для кожної точки $(0, x) \in \mathcal{K}_\varphi \setminus \mathcal{E}_\varphi^+$ буде виконуватися нерівність

$$W\big(\phi_t(\varphi), \xi_t(\varphi, x)\big) \equiv \Big\langle S\big(\phi_t(\varphi)\big)\xi_t(\varphi, x), \xi_t(\varphi, x)\Big\rangle > s_-$$

на правому максимальному інтервалі існування $\xi_t(\varphi, x)$. Тепер, міркуючи від супротивного, припустимо, що твердження 2 є хибним. Тоді для кожної точки $(0, x) \in \mathcal{K}_\varphi$ існує момент $\tau_\varphi(x) \geq 0$ такий, що $\big(\tau_\varphi(x), \xi_{\tau_\varphi(x)}(\varphi, x)\big) \in \mathcal{E}_\varphi^+$, тобто $W(\phi_t(\varphi), \xi_t(\varphi, x))\big|_{t=\tau_\varphi(x)} = s_+$, і при цьому $\tau_\varphi(x) = 0$ лише у випадку, коли $(0, x) \in \mathcal{K}_\varphi \cap \mathcal{E}_\varphi^+$, а для інших точок компакта $\mathcal{K}_\varphi$ повинна виконуватися нерівність

$$s_- < W\big(\phi_t(\varphi), \xi_t(\varphi, x)\big) < s_+ \quad \forall t \in [0, \tau_\varphi(x)).$$

Оскільки з (13) випливає нерівність

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=\tau_\varphi(x)} W\big(\phi_t(\varphi), \xi_t(\varphi, x)\big) > 0,$$

то за теоремою про неявну функцію $\tau_\varphi(x)$ неперервно залежить від x. Однак тоді сім'я відображень

$$\Big\{\mathcal{K}_\varphi \mapsto \operatorname{cl}\mathcal{D}_\varphi \colon (0, x) \mapsto \big(s\tau_\varphi(x), \xi_{s\tau_\varphi(x)}(\varphi, x)\big)\Big\}_{s\in[0,1]}$$

визначала б ізотопію, причому значенню $s = 1$ відповідає гомеоморфізм цієї ізотопії, який відображає $\mathcal{K}_\varphi$ у $\mathcal{E}_\varphi^+$. Отримали суперечність із твердженням 1, що і доводить твердження 2.

Твердження 3. *Припустимо, що виконуються умови* (A) – (C) *і* s_- *та* s_+ — *довільні числа, які задовольняють нерівності* $s_- < \lambda_- z_0$, $s_+ > \lambda_+ z_0$. *Тоді для довільного* $\varphi \in \mathbb{R}^m$ *існує точка* $(0, x_\varphi) \in \mathcal{K}_\varphi \setminus \mathcal{E}_\varphi^+$ *така, що розв'язок* $\xi_t(\varphi, x_\varphi)$ *системи* (8) *існує принаймні на півосі* $\mathbb{R}_+$, *його графік на цій півосі належить області* $\mathcal{D}_\varphi$ *і при цьому*

$$R := \sup_{(t,\varphi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m} \big\|\xi_t(\varphi, x_\varphi)\big\| < \infty. \tag{15}$$

Доведення. Насамперед зауважимо, що оскільки

$$\lambda_- \|x\|^2 \leq \langle S(\varphi)x, x\rangle \leq \lambda_+ \|x\|^2,$$

то

$$\Big\{(\varphi, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq z_0\Big\} \subset \Big\{(\varphi, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \colon s_- < \langle S(\varphi)x, x\rangle < s_+\Big\}.$$

Тоді з урахуванням умов (B) і (C) та зауваження 2 умови тверджень 1 та 2 будуть виконані. Отже, можемо вказати точку $(0, x_\varphi) \in \mathcal{K}_\varphi \setminus \mathcal{E}_\varphi^+$, про яку йдеться у твердженні 2.

Тепер введемо дві функції

$$w_\varphi(t) := W\big(\phi_t(\varphi), \xi_t(\varphi, x_\varphi)\big) \equiv \big\langle S(\phi_t(\varphi))\xi_t(\varphi, x_\varphi), \xi_t(\varphi, x_\varphi)\big\rangle,$$

$$v_\varphi(t) := V\big(\xi_t(\varphi, x_\varphi)\big) \equiv \left[\int\limits_{z_0}^{z} \frac{[q(s) - p(z^*)]s}{Q(s)} ds\right]_{z = \|\xi_t(\varphi, x_\varphi)\|^2}, \quad t \in I_\varphi^+,$$

і покажемо, що $I_\varphi^+ = \mathbb{R}_+$. З урахуванням нерівностей (9), (10) та зауваження 2 для тих значень $t \in I_\varphi^+$, для яких

$$\big\|\xi_t(\varphi, x_\varphi)\big\|^2 > z_0, \tag{16}$$

маємо

$$\dot{w}_\varphi(t) \geq 2\Big[\beta(\psi)\,\Big(q\big(\,\|x\|^2\,\big) - p(z^*)\Big)\,\|x\|^2\,\Big]_{\psi = \phi_t(\varphi), x = \xi_t(\varphi, x_\varphi)} > 0,$$

$$|\dot{v}_\varphi(t)| \leq 2\left[\frac{[q(z) - p(z^*)]z}{Q(z)}\right]_{z = \|\xi_t(\varphi, x_\varphi)\|^2} |\langle x, b(\psi, x)\rangle|_{\psi = \phi_t(\varphi), x = \xi_t(\varphi, x_\varphi)} \leq \tag{17}$$

$$\leq 2\left[\beta(\psi)\,\Big(q(\|x\|^2) - p(z^*)\Big)\,\|x\|^2\right]_{\psi = \phi_t(\varphi), x = \xi_t(\varphi, x_\varphi)},$$

а отже, для таких значень t виконується нерівність

$$|\dot{v}_\varphi(t)| \leq \dot{w}_\varphi(t). \tag{18}$$

Якщо б $\sup I_\varphi^+ := T_\varphi^+ < \infty$, то

$$\|\xi_t(\varphi, x_\varphi)\|^2 \to \infty, \quad t \to T_\varphi^+ - 0,$$

і з урахуванням зауваження 2

$$v_\varphi(t) \to \infty, \quad t \to T_\varphi^+ - 0. \tag{19}$$

Тоді знайдеться момент $t_\varphi^0 \in (0, T_\varphi^+)$ такий, що нерівність (16) виконується на інтервалі $(t_\varphi^0, T_\varphi^+)$, і на підставі (18) дістаємо нерівність

$$v_\varphi(t) - v_\varphi(t_\varphi^0) \leq w_\varphi(t) - w_\varphi(t_\varphi^0) < s_+ - s_- \quad \forall t \in (t_\varphi^0, T_\varphi^+),$$

яка суперечить (19). Отже, $I_\varphi^+ = \mathbb{R}_+$, і з твердження 2 випливає, що графік розв'язку $\xi_t(\varphi, x_\varphi)$ на півосі $\mathbb{R}_+$ належить області $\mathcal{D}_\varphi$.

Тепер доведемо скінченність верхньої межі в (15). Можливі два випадки: 1) нерівність $\big\|\xi_t(\varphi, x_\varphi)\big\|^2 \leq z_0$ виконується для всіх $t \geq 0$; 2) множина

$$\mathcal{T}_0 := \Big\{t \geq 0 : \|\xi_t(\varphi, x_\varphi)\|^2 > z_0\Big\} \tag{20}$$

є непорожньою.

Перший випадок не потребує пояснень. У другому випадку, якщо $0 \in \mathcal{T}_0$, з урахуванням (18) при $t \in \mathcal{T}_0$ маємо

$$v_\varphi(t) < v_\varphi(0) + s_+ - s_-.$$

Покажемо, що $v_\varphi(0)$ допускає рівномірну щодо $\varphi \in \mathbb{R}^m$ оцінку зверху. Справді, з другої нерівності (3) випливає, що

$$\lambda_+^0 := \inf\left\{\langle S(\varphi)x, x\rangle : \varphi \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{L}_+(\varphi),\ \|x\| = 1\right\} > 0,$$

а тоді $\lambda_+^0 \|x_\varphi\|^2 \le \langle S(\varphi)x_\varphi, x_\varphi\rangle \le s_+$, звідки $\|x_\varphi\|^2 \le s_+/\lambda_+^0 =: z_+$. Тому

$$v_\varphi(0) \le \int\limits_{z_0}^{z_+} \frac{[q(s) - p(z^*)]s}{Q(s)} ds.$$

Тепер оцінимо $v_\varphi(t)$ на кожному інтервалі, який є зв'язною компонентою множини $\mathcal{T}_0$ і в лівому кінці якого квадрат норми $\xi_t(\varphi, x_\varphi)$ дорівнює z_0, якщо такий інтервал існує. З урахуванням (18) у точках такого інтервалу матимемо

$$v_\varphi(t) \le s_+ - s_-.$$

Отже, доведено, що $v_\varphi(t)$ допускає рівномірну щодо $(t, \varphi) \in \mathcal{T}_0 \times \mathbb{R}^m$ оцінку зверху. А це з урахуванням зауваження 2 забезпечує скінченність R у формулі (15).

Твердження 4. *Якщо виконано умови твердження* 3, *то для довільного* $\varphi \in \mathbb{R}^m$ *система* (8) *має розв'язок* $x_t^*(\varphi)$, *який існує на всій дійсній осі часу і задовольняє нерівності*

$$\lambda_- z_0 \le \langle S(\phi_t(\varphi))x_t^*(\varphi), x_t^*(\varphi)\rangle \le \lambda_+ z_0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\|x_t^*(\varphi)\|^2 \le z^* \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Доведення. Виберемо $\varepsilon > 0$ настільки малим, щоб

$$\Big\{(\varphi, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n\colon\ \|x\|^2 \le z_0 + \varepsilon\Big\} \subset \Big\{(\varphi, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n\colon s_- < \langle S(\varphi)x, x\rangle < s_+\Big\},$$

і зазначимо, що розв'язок $\xi_t(\varphi, x_\varphi)$, про який йдеться у твердженні 3, має таку властивість: якщо множина

$$\mathcal{T}_\varepsilon := \Big\{t \ge 0 : \|\xi_t(\varphi, x_\varphi)\|^2 > z_0 + \varepsilon\Big\}$$

не є порожньою, то знайдеться число $d_\varepsilon > 0$ таке, що довжина довільного інтервалу $(t_1, t_2) \subset \mathcal{T}_\varepsilon$ не перевищує d_ε. Справді, з огляду на умови (B), (C) та нерівність (17) існує $\delta_\varepsilon > 0$ таке, що на множині $\mathcal{T}_\varepsilon$ маємо $\dot{w}_\varphi(t) \ge \delta_\varepsilon$, звідки

$$\delta_\varepsilon(t_2 - t_1) \le w_\varphi(t_2) - w_\varphi(t_1) \le s_+ - s_-,$$

а отже, можна покласти $d_\varepsilon := (s_+ - s_-)/\delta_\varepsilon$.

Тепер можна стверджувати: якщо $0 \in \mathcal{T}_\varepsilon$, тобто $\|x_\varphi\|^2 > z_0 + \varepsilon$, то не пізніше ніж через час d_ε знайдеться момент, коли квадрат норми $\xi_t(\varphi, x_\varphi)$ набуде значення $z_0 + \varepsilon$.

Далі, нехай інтервал (t_1, t_2) є зв'язною компонентою множини $\mathcal{T}_\varepsilon$ і на кінцях цього інтервалу квадрат норми $\xi_t(\varphi, x_\varphi)$ дорівнює $z_0 + \varepsilon$. Тоді $v_\varphi(t_1) = v_\varphi(t_2)$ і знайдеться точка $t_* \in (t_1, t_2)$, в якій $v_\varphi(t)$ досягає максимуму. Тому з урахуванням (18) маємо

$$w_\varphi(t_2) - w_\varphi(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_*} \dot w_\varphi(t)dt + \int\limits_{t_*}^{t_2} \dot w_\varphi(t)dt \geq$$

$$\geq \int\limits_{t_1}^{t_*} \dot v_\varphi(t)dt - \int\limits_{t_*}^{t_2} \dot v_\varphi(t)dt = 2v_\varphi(t_*).$$

Отже, дістаємо нерівність

$$v_\varphi(t) \leq \frac{w_\varphi(t_2) - w_\varphi(t_1)}{2} \leq \frac{s_+ - s_-}{2} \quad \forall t \in [t_1, t_2],$$

наслідком якої є нерівність

$$\big\|\xi_t(\varphi, x_\varphi)\big\|^2 \leq \hat z \quad \forall t \geq d_\varepsilon, \tag{21}$$

де $\hat z$ — корінь рівняння

$$\int\limits_{z_0}^{z} \frac{\big[q(s) - p(z^*)\big]s}{Q(s)} ds = \frac{s_+ - s_-}{2}$$

на півосі $z > z_0$. Зауважимо, що різницю $\hat z - z^*$ можна зробити як завгодно малою за рахунок мализни $|s_\pm - \lambda_\pm z_0|$.

Тепер для довільного натурального k, як і у [12], введемо до розгляду функцію

$$x_t^k(\varphi) := \xi_{t+k}\big(\phi_{-k}(\varphi), x_{\phi_{-k}(\varphi)}\big).$$

Вона є визначеною для всіх $t \geq -k$. Оскільки $\big(\phi_t(\varphi), \xi_t(\varphi, x)\big)$ визначає локальний потік системи (7), то

$$\big(\phi_{t+s}(\varphi), \xi_{t+s}(\varphi, x)\big) = \Big(\phi_t\big(\phi_s(\varphi)\big), \xi_t\big(\phi_s(\varphi), \xi_s(\varphi, x)\big)\Big) \tag{22}$$

для всіх значень t, s, для яких хоча б одна, права або ліва, частина цієї рівності має сенс. Звідси, зокрема, випливає рівність

$$x_t^k(\varphi) = \xi_t\big(\varphi, \xi_k(\phi_{-k}(\varphi), x_{\phi_{-k}(\varphi)})\big),$$

яка означає, що $x_t^k(\varphi)$ є розв'язком системи (8), визначеним при $t \geq -k$ з початковим значенням $x_0^k(\varphi) = \xi_k\big(\phi_{-k}(\varphi), x_{\phi_{-k}(\varphi)}\big)$. При цьому на підставі рівності $\phi_{t+k}\big(\phi_{-k}(\varphi)\big) = \phi_t(\varphi)$, твердження 3 і нерівності (21) дістаємо нерівності

$$s_- < \Big\langle S(\phi_t(\varphi))x_t^k(\varphi), x_t^k(\varphi)\Big\rangle < s_+, \qquad \Big\|x_t^k(\varphi)\Big\|^2 \leq \hat z \quad \forall t \geq (s_+ - s_-)/\delta_\varepsilon - k.$$

Тепер з обмеженої послідовності $x_0^k(\varphi)$ виділимо збіжну підпослідовність і границю цієї підпослідовності позначимо через $x_0^*(\varphi)$. Дістанемо розв'язок

$$x_t^*(\varphi) := \xi_t(\varphi, x_0^*(\varphi)),$$

який існуватиме на всій дійсній осі часу і задовольнятиме нерівності

$$s_- < \langle S(\phi_t(\varphi))x_t^*(\varphi), x_t^*(\varphi)\rangle < s_+, \quad \|x_t^*(\varphi)\|^2 \leq \hat z \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Для завершення доведення достатньо спрямувати $s_\pm$ до $\lambda_\pm z_0$ і, відповідно, $\hat z$ до z^*.

Твердження 5. *Якщо виконується умова* (C), *то для кожного* $\varphi \in \mathbb{R}^m$ *система* (8) *не має розв'язку, визначеного на* $\mathbb{R}$, *відмінного від* $x_t^*(\varphi)$ *і такого, що задовольняє ті самі нерівності з твердження* 4, *що й* $x_t^*(\varphi)$.

Доведення. Припустимо, що крім $x_t^*(\varphi)$ існує інший розв'язок $\tilde{x}_t(\varphi)$ системи (8) з аналогічними властивостями. Введемо функцію

$$s_\varphi(t) := \frac{1}{2}\Big\langle S\big(\varphi_t(\varphi)\big)\big[x_t^*(\varphi) - \tilde{x}_t(\varphi)\big], x_t^*(\varphi) - \tilde{x}_t(\varphi)\Big\rangle.$$

З одного боку, ця функція є обмеженою на $\mathbb{R}$. З іншого боку, беручи до уваги умову (D), маємо

$$\dot{s}_\varphi(t) \geq \gamma\big\|x_t^*(\varphi) - \tilde{x}_t(\varphi)\big\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Але $\big|s_\varphi(t)\big| \leq \dfrac{1}{2}\big\|x_t^*(\varphi) - \tilde{x}_t(\varphi)\big\|^2$ (див. (4)). Тому $\dot{s}_\varphi(t) \geq 2\gamma\,|s_\varphi(t)|$. Якщо тепер $s_\varphi(0) > 0$, то $s_\varphi(t) \to \infty$, $t \to \infty$, якщо ж $s_\varphi(0) < 0$, то $s_\varphi(t) \to -\infty$, $t \to -\infty$. Отримали суперечність.

Твердження 5 доведено.

4. Оператор χ, його властивості та доведення основної теореми. Наслідком тверджень 4 та 5 є наступний результат про коректність конструкції оператора χ, визначеного відповідно до (11).

Твердження 6. *Якщо умови* (A)–(D) *виконано, то для кожного* $u(\cdot) \in \mathfrak{U}_l$ *система* (7) *має обмежений інваріантний переріз, який є графіком відображення* $\chi[u](\cdot)\colon \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, *де* $\chi[u](\varphi) := x_0^*(\varphi)$, *а* $x_0^*(\varphi)$ — *початкове значення розв'язку* $x_t^*(\varphi)$ *з твердження* 4. *При цьому зазначений інваріантний переріз належить множині*

$$\mathcal{S} := \Big\{(\varphi, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \colon \lambda_- z_0 \leq \langle S(\varphi)x, x\rangle \leq \lambda_+ z_0,\ \|x\|^2 \leq z^*\Big\}.$$

Доведення. Покладемо $\hat{u}(\varphi) := x_0^*(\varphi)$. За означенням $x_0^*(\varphi)$ графік відображення $\hat{u}(\cdot)$ належить $\mathcal{S}$. На підставі викладеного наприкінці п. 2 достатньо показати, що $\hat{u}\big(\phi_t(\varphi)\big)$ — розв'язок системи (8). Цей факт випливає з рівностей

$$x_t^*(\varphi) = \xi_t\big(\varphi, x_0^*(\varphi)\big) = \xi_0\Big(\phi_t(\varphi), x_0^*\big(\phi_t(\varphi)\big)\Big) = x_0^*\big(\phi_t(\varphi)\big) = \hat{u}\big(\phi_t(\varphi)\big),$$

які одержуються на підставі властивості (22) локального потоку системи (7).

Твердження 6 доведено.

Твердження 7. *Якщо справджується нерівність* (5), *то існує* $l > 0$ *таке, що* $\chi[u](\cdot) \in \mathfrak{U}_l$ *для кожного* $u(\cdot) \in \mathfrak{U}_l$.

Доведення . Нехай число l реалізує максимум лівої частини (5) і $u(\cdot) \in \mathfrak{U}_l$. Візьмемо пару різних точок φ, $\psi \in \mathbb{R}^m$ і покладемо

$$y_{\varphi,\psi}(t) := \frac{x_t^*(\varphi) - x_t^*(\psi)}{\|\phi_t(\varphi) - \phi_t(\psi)\|} \equiv \frac{\chi[u](\phi_t(\varphi)) - \chi[u](\phi_t(\psi))}{\|\phi_t(\varphi) - \phi_t(\psi)\|},$$

$$\omega_{\varphi,\psi}(t) := \langle S(\phi_t(\varphi))y_{\varphi,\psi}(t), y_{\varphi,\psi}(t)\rangle\,.$$

Як і у [12], легко переконуємося в тому, що ці функції задовольняють нерівності

$$\dot{\omega}_{\varphi,\psi}(t) \geq 2\big[\gamma - \lambda_+(l_a + lL_a)\big]\,\big\|y_{\varphi,\psi}(t)\big\|^2 - 2l_b\big\|y_{\varphi,\psi}(t)\big\|,$$

$$\left|\frac{d}{dt}\,\|y_{\varphi,\psi}(t)\|^2\right| \leq 2\left(L_b + l_a + lL_a\right)\big\|y_{\varphi,\psi}(t)\big\|^2 + 2l_b\big\|y_{\varphi,\psi}(t)\big\|.$$

Зауважимо, що з умови (5) випливає також нерівність $\gamma > \lambda_+(l_a + lL_a)$. Тепер, поклавши

$$\zeta_0(l) := \left(\frac{l_b}{\gamma - \lambda_+(l_a + lL_a)}\right)^2,$$

для функцій

$$\nu_{\varphi,\psi}(t) = \left[\int\limits_{\zeta_0(l)}^{\zeta} \frac{\left[\gamma - \lambda_+(l_a + lL_a)\right] z - l_b\sqrt{z}}{\left(L_b + l_a + lL_a\right) z + l_b\sqrt{z}}dz\right]_{\zeta = \left\|y_{\varphi,\psi}(t)\right\|^2}$$

і $\omega_{\varphi,\psi}(t)$ на множині

$$\Theta_\varepsilon := \left\{t \in \mathbb{R}\colon\ \|y_{\varphi,\psi}(t)\|^2 > \zeta_0(l) + \varepsilon\right\},$$

де $\varepsilon > 0$ як завгодно мале, дістанемо нерівності

$$\dot{\omega}_{\varphi,\psi}(t) \geq \sigma_\varepsilon > 0, \qquad \left|\dot{\nu}_{\varphi,\psi}(t)\right| \leq \dot{\omega}_{\varphi,\psi}(t)$$

з достатньо малою сталою σ_ε. Міркуючи, як і при доведенні твердження 4, можемо зробити такі висновки: оскільки функція $\omega_{\varphi,\psi}(t)$ обмежена, то довжина будь-якого інтервалу, який міститься в Θ_ε, є скінченною і не перевищує

$$\sigma_\varepsilon^{-1}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}}\omega_{\varphi,\psi}(t) - \inf_{t\in\mathbb{R}}\omega_{\varphi,\psi}(t)\right];$$

в кінцях кожного інтервалу (t_1, t_2), який є компонентою зв'язності множини Θ_ε, квадрат норми $y_{\varphi,\psi}(t)$ набуває значення $\zeta_0(l) + \varepsilon$; в точках такого інтервалу справджуються нерівності

$$\nu_{\varphi,\psi}(t) \leq \frac{\omega_{\varphi,\psi}(t_2) - \omega_{\varphi,\psi}(t_1)}{2} \leq \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2}\left(\zeta_0(l) + \varepsilon\right).$$

Спрямувавши ε до нуля, отримаємо

$$\nu_{\varphi,\psi}(t) \leq \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2}\zeta_0(l) \quad \forall t \in \Theta_0. \tag{23}$$

Але якщо справджується нерівність (5), то, як і у [12], неважко переконатися в існуванні такого числа l, що наслідком (23) є нерівність $\big\|y_{\varphi,\psi}(t)\big\| \leq l$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Зокрема, $\big\|y_{\varphi,\psi}(0)\big\| \leq l$ означає, що $\chi[u](\cdot) \in \mathfrak{U}_l$.

Твердження 7 доведено.

Твердження 8. *Нехай l — число, існування якого встановлює твердження 7. Тоді $\chi\colon \mathfrak{U}_l \mapsto \mapsto \mathfrak{U}_l$ — c-неперервний оператор.*

Доведення. Потрібно показати, що для довільної послідовності $\{u_k(\cdot) \in \mathfrak{U}_l\}$, рівномірно збіжної на кожній компактній підмножині простору $\mathbb{R}^m$, послідовність $\{\chi[u_k](\cdot)\}$ на кожній компактній підмножині простору $\mathbb{R}^m$ рівномірно збігається до $\chi[u](\cdot)$, де $u(\cdot)$ — границя послідовності $\big\{u_k(\cdot)\big\}$. Міркуючи від супротивного, припускаємо, що, навпаки, знайдуться послідовність $\big\{u_k(\cdot) \in \mathfrak{U}_l\big\}$, рівномірно збіжна на кожній компактній підмножині простору $\mathbb{R}^m$, додатне число $\rho > 0$, компакт $\mathfrak{K} \subset \mathbb{R}^m$ і послідовність точок $\{\varphi_k \in \mathfrak{K}\}$ така, що

$$\|\chi[u_k](\varphi_k) - \chi[u](\varphi_k)\| \geq \rho \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Позначимо через $\big\{\phi_t^k(\cdot)\big\}$ та $\big\{\phi_t(\cdot)\big\}$ потоки відповідно систем

$$\dot{\varphi} = a\big(\varphi, u_k(\varphi)\big), \qquad \dot{\varphi} = a\big(\varphi, u(\varphi)\big).$$

Тоді

$$x_k(t;\varphi_k) := \chi[u_k]\big(\phi_t^k(\varphi_k)\big), \qquad x(t;\varphi_k) := \chi[u]\big(\phi_t(\varphi_k)\big)$$

— розв'язки відповідно систем

$$\dot{x} = b(\phi_t^k(\varphi_k), x\big), \qquad \dot{x} = b\big(\phi_t(\varphi_k), x\big)$$

такі, що $x_k(0;\varphi_k) = \chi[u_k](\varphi_k)$, $x(0;\varphi_k) = \chi[u](\varphi_k)$. Ввівши позначення

$$r_k(t) := x(t;\varphi_k) - x_k(t;\varphi_k), \qquad \varrho_k(t) := \Big\| b\big(\phi_t(\varphi_k), x_k(t;\varphi_k)\big) - b\big(\phi_t^k(\varphi_k), x_k(t;\varphi_k)\big) \Big\|$$

та утворивши функцію

$$w_k(t) := \langle S(\phi_t(\varphi_k)) r_k(t), r_k(t) \rangle\,,$$

з урахуванням умови (D) та (4) дістанемо

$$\dot{w}_k(t) \geq 2\gamma \big\| r_k(t) \big\|^2 - 2\varrho_k(t) \big\| r_k(t) \big\|.$$

Зауважимо, що оскільки $\big\| x_k(t;\varphi_k) \big\|^2 \leq z^*$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, то

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |w_k(t)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \big\| r_k(t) \big\|^2 \leq 4z^*,$$

а оскільки для довільного відрізка $J \subset \mathbb{R}$ маємо (див., наприклад, [13], теорема 5.7)

$$\sup_{t\in J} \Big\| \phi_t(\varphi_k) - \phi_t^k(\varphi_k) \Big\| \to 0, \quad k \to 0,$$

то $\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in J} \varrho_k(t) = 0$. Зокрема, якщо для $\varepsilon \in (0,\rho)$ позначити через J_ε відрізок довжини $16z^*/(\gamma\varepsilon^2)$ з центром у точці 0, то знайдеться $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\varrho_k(t) \leq \gamma\varepsilon/2 \qquad \forall t \in J_\varepsilon \quad \forall k \geq k_\varepsilon$$

і, отже,

$$\dot{w}_k(t) \geq 2\gamma \left\| r_k(t) \right\|^2 - \gamma\varepsilon \left\| r_k(t) \right\| \qquad \forall t \in J_\varepsilon \quad \forall k \geq k_\varepsilon. \tag{24}$$

Тепер визначимо множину

$$\Theta_{k,\varepsilon} := \Big\{ t \in \mathbb{R}\colon \big\| r_k(t) \big\| > \varepsilon \Big\}.$$

Оскільки $\big\| r_k(0) \big\| \geq \rho > \varepsilon$, то $0 \in \Theta_{k,\varepsilon}$. Покажемо, що інтервал $(\tau^-_{k,\varepsilon}, \tau^+_{k,\varepsilon})$, який є тією зв'язною компонентою множини $\Theta_{k,\varepsilon}$, що містить точку 0, належить J_ε. Справді, якщо (t_1, t_2) — будь-який інтервал такий, що $0 \in (t_1, t_2) \subset J_\varepsilon \cap \Theta_{k,\varepsilon}$, то $\dot{w}_k(t) \geq \gamma\varepsilon^2$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$ і

$$8z^* \geq w_k(t_2) - w_k(t_1) \geq \gamma\varepsilon^2(t_2 - t_1) \;\Rightarrow\; |t_1 - t_2| \leq 8z^*/(\gamma\varepsilon^2).$$

Звідси випливає, що відрізок $[t_1, t_2]$ складається з внутрішніх точок відрізка J_ε, і, отже, кінці відрізка J_ε лежать за межами відрізка $[t_1, t_2]$. Тоді $\Big[\tau^-_{k,\varepsilon}, \tau^+_{k,\varepsilon} \Big] \subset J_\varepsilon$. Зрозуміло, що $\Big\| r_k(\tau^\pm_{k,\varepsilon}) \Big\| = \varepsilon$. Звідси

$$w_k(\tau^+_{k,\varepsilon}) - w_k(\tau^-_{k,\varepsilon}) \leq (\lambda_+ - \lambda_-)\,\varepsilon^2.$$

Далі, на відрізку J_ε маємо

$$\left| \frac{d}{dt} \|r_k(t)\|^2 \right| \leq 2L_b \big\| r_k(t) \big\|^2 + 2\varrho_k(t) \big\| r_k(t) \big\| \leq 2L_b \big\| r_k(t) \big\|^2 + \gamma\varepsilon \big\| r_k(t) \big\|. \tag{25}$$

Введемо функцію

$$v_{k,\varepsilon}(t) := \left[\int\limits_{\varepsilon^2}^{z} \frac{\gamma\big[2s - \varepsilon\sqrt{s}\,\big]}{2L_b s + \gamma\varepsilon\sqrt{s}} ds \right]_{z=\|r_k(t)\|^2}, \quad t \in \Big[\tau^-_{k,\varepsilon}, \tau^+_{k,\varepsilon} \Big].$$

Очевидно, що $v_{k,\varepsilon}(\tau^\pm_{k,\varepsilon}) = 0$ і з урахуванням (24), (25) маємо $\big| \dot{v}_k(t) \big| \leq \dot{w}_k(t)$. Звідси на підставі тих самих міркувань, що й при доведенні твердження 4, одержуємо

$$2v_{k,\varepsilon}(0) \leq w_k(\tau^+_{k,\varepsilon}) - w_k(\tau^-_{k,\varepsilon}) \leq (\lambda_+ - \lambda_-)\,\varepsilon^2,$$

звідки, з одного боку, $v_{k,\varepsilon}(0) \leq (\lambda_+ - \lambda_-)\,\varepsilon^2/2$, а з іншого —

$$v_{k,\varepsilon}(0) \geq \int\limits_{\varepsilon^2}^{\rho^2} \frac{\gamma\,[2s - \varepsilon\sqrt{s}]}{2L_b s + \gamma\varepsilon\sqrt{s}} ds.$$

Зрозуміло, що при достатньо малому $\varepsilon \in (0, \rho)$ і $k = k_\varepsilon$ прийдемо до суперечності, адже при $\varepsilon \to 0$ інтеграл у лівій частині останньої нерівності прямує до $\gamma\rho^2/L_b$.

Твердження 8 доведено.

Тепер перейдемо до доведення теореми. Перевіримо щодо оператора χ виконання умов теореми Шаудера – Тихонова [11]. Згідно з твердженням 7 число l можна вибрати так, щоб $\chi[\mathfrak{U}_l] \subset \mathfrak{U}_l$. Множина функцій $\mathfrak{U}_l$ є опуклою, обмеженою, c-замкненою, одностайно неперервною на кожній кулі в $\mathbb{R}^m$, а отже, c-компактною. Внаслідок c-неперервності оператора χ (твердження 8) всі умови теореми Шаудера – Тихонова виконано, а тому оператор χ має нерухому точку. Згідно з твердженням 6 графік відображення, яке є нерухомою точкою оператора χ, є інваріантним перерізом системи (1).

Теорему доведено.

Розглянемо випадок послабленої умови (B), коли функція $\beta(\cdot)$ є додатною, причому $\inf_{\varphi\in\mathbb{R}^m}\beta(\varphi)=0$. Аналіз доведень тверджень із п. 3 показує, що єдиною проблемою, яка тут виникає, є виведення оцінки (21), що спирається на існування числа δ_ε у доведенні твердження 4. Однак у цій ситуації можна скористатися менш тонкими оцінками з доведення твердження 3, з яких випливає, що на множині $\mathcal{T}_0$ маємо

$$\left[\int\limits_{z_+}^{z}\frac{\big[q(s)-p(z^*)\big]s}{Q(s)}ds\right]_{z=\|\xi_t(\varphi,x_\varphi)\|}\le s_+-s_-.$$

Звідси можна зробити висновок, що теорема залишається правильною, якщо нерівність в умові (C) замінити на таку:

$$\int\limits_{z_*}^{z^*}\frac{\big[q(z)-p(z^*)\big]z}{Q(z)}dz\ge(\lambda_+-\lambda_-)\,z_0,$$

де $z_*:=\lambda_+z_0/\lambda_+^0$.

5. Висновки. У цій роботі отримано нові нелокальні достатні умови існування обмежених ліпшицевих інваріантних перерізів над $\mathbb{R}^m$ для істотно нелінійних динамічних систем із фазовим простором $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$, які характеризуються певними властивостями індефінітної коерцитивності та індефінітної монотонності. Використаний при цьому підхід ґрунтується на поєднанні топологічного принципу Важевського та принципу Шаудера – Тихонова існування нерухомої точки у c-неперервного і c-компактного оператора, визначеного на опуклій множині $\mathbb{R}^n$-значних ліпшицевих відображень простору $\mathbb{R}^m$.

З метою ефективної реалізації першого із названих принципів при конструюванні зазначеного оператора було використано пару допоміжних функцій — напрямну функцію W у вигляді індефінітної квадратичної форми щодо змінних $x\in\mathbb{R}^n$ з коефіцієнтами, залежними від координат $\varphi\in\mathbb{R}^m$, та залежну від $\|x\|$ оцінювальну функцію V. З урахуванням властивостей індефінітної коерцитивності та індефінітної монотонності досліджуваної системи функцію V вдалося вибрати так, щоб разом функції V та W, за термінологією роботи [12], утворювали V-W-пару. Це дало змогу, скориставшись особливостями структури поверхонь рівня напрямної функції, встановити існування інваріантного перерізу системи (7) для довільного $u(\cdot)$ з опуклої обмеженої множини $\mathfrak{U}_l$ $\mathbb{R}^n$-значних ліпшицевих відображень простору $\mathbb{R}^m$, і, як наслідок, побудувати c-неперервний і c-компактний оператор $\chi\colon\mathfrak{U}_l\mapsto\mathfrak{U}_l$, кожна нерухома точка якого визначає ліпшицевий інваріантний переріз системи (1). Отримані достатні умови існування таких інваріантних перерізів мають аналітичний, коефіцієнтний характер і в кожному конкретному випадку допускають ефективну перевірку.

1. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, № 6. – С. 1219 – 1240.
2. *Samoilenko A. M.* Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1991. – 332 p.
3. *Samoilenko A. M.* Perturbation theory of smooth invariant tori of dynamical systems // Nonlinear Anal. – 1997. – **30**, № 5. – P. 3121 – 3133.

4. *Grod I. M* On the smoothness of bounded invariant manifolds of linear inhomogeneous extensions of dynamical systems // Ukr. Math. J. – 1996. – **48**, № 1. – P. 154 – 157.
5. *Bodnaruk S. B., Kulik V. L.* On parameter dependence of bounded invariant manifolds of autonomous systems of differential equations // Ukr Math. J. – 1996. – **48**, № 6. – P. 838 – 845.
6. *Samoilenko A. M., Teplins'kyi Yu. V., Semenyshyna I. V.* On the Existence of a smooth bounded semiinvariant manifold for a degenerate nonlinear system of difference equations in the space m // Nonlinear Oscillations. – 2003. – **6**, № 3. – P. 371 – 392.
7. *Перестюк М. О., Слюсарчук В. Ю.* Оператор Гріна – Самойленка в теорії інваріантних множин нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 7. – С. 948 – 957.
8. *Мухамадиев Э., Нажмиддинов Х., Садовский Б. Н.* Применение принципа Шаудера – Тихонова в задаче об ограниченных решениях дифференциальных уравнений // Функцион. анализ и его прил. – 1972. – **6**, № 6. – С. 83 – 84.
9. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116**, № 4. – С. 483 – 501.
10. *Ważewski T.* Sur un prinsipe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des integrales des equations differentielles ordinaires // Ann. pol. math. – 1947. – **20**. – P. 279 – 313.
11. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1969. – 1072 с.
12. *Самойленко А. М., Парасюк І. О., Лагода В. А.* Ліпшицеві інваріантні тори індефінітно монотонних систем // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 3. – С. 363 – 383.
13. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння: підручник. – Київ: Вид.-поліграф. центр „Київ. ун-т", 2010. – 527 с.

Одержано 08.11.12