УДК 517.927

**Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец*** (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
**Н. В. Рева** (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

We study the limit with respect to a parameter in the uniform norm for solutions of general boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations of the first order. A generalization of the Kiguradze theorem (1987) to these problems is obtained. The conditions on the asymptotic behavior of the coefficients of the systems are weakened as much as possible. Sufficient conditions for the Green matrices to converge uniformly to the Green matrix of the limit boundary-value problem are found as well.

Досліджується границя за параметром у рівномірній нормі розв'язків загальних крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Отримано узагальнення теореми І. Т. Кігурадзе (1987) щодо таких задач. Воно максимально послаблює умови на асимптотичну поведінку коефіцієнтів систем. Крім того, знайдено достатні умови рівномірної збіжності матриць Гріна до матриці Гріна граничної крайової задачі.

**1. Введение и постановка задач.** Вопросы предельного перехода в системах дифференциальных уравнений возникают во многих задачах анализа и в связи с этим привлекли внимание известных математиков. Так, И. И. Гихман [1], а позднее М. А. Красносельский и С. Г. Крейн [2], Я. Курцвейль и З. Ворел [3], А. М. Самойленко [4, 5] и другие доказали ряд глубоких теорем о характере зависимости решений дифференциальных уравнений и систем от параметра. Часть их связана с обоснованием известного принципа усреднения Н. Н. Боголюбова (см., например, [6]) в нелинейной механике и характеризуется общей точкой зрения на линейный и нелинейный случаи. Применительно к линейным задачам Коши эти результаты усиливались и уточнялись в работах [8 – 12]. Более сложный случай общих линейных краевых задач исследован И. Т. Кигурадзе [7, 13]. Эти результаты в двух направлениях развиваются в данной статье.

Рассмотрим на конечном интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$ систему $m \in \mathbb{N}$ линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t) \tag{1}$$

с общим неоднородным краевым условием

$$By = c, \tag{2}$$

где линейный непрерывный оператор

$$B\colon C([a,b];\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m.$$

Предполагается, что матрица-функция $A(\cdot)$ принадлежит $L([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, вектор-функция $f(\cdot) \in L([a,b];\mathbb{C}^m)$, а $c \in \mathbb{C}^m$.

Под решением системы дифференциальных уравнений (1) понимается абсолютно непрерывная на $[a,b]$ вектор-функция, которая удовлетворяет равенству (1) почти всюду. Неоднородное общее краевое условие (2) охватывает все классические виды краевых условий: задачи

*Поддержан грантом № 01/01-12 НАН Украины (в рамках совместного украинско-российского проекта НАН Украины и Российского фонда фундаментальных исследований).

Коши, двух- и многоточечные, интегральные и смешанные краевые задачи, а также ряд неклассических задач.

Известно (см., например, [7]), что для однозначной всюду разрешимости задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная краевая задача с $f(t) = 0$ и $c = 0$ имела только нулевое решение. Если последнее условие выполнено, то задача (1), (2) имеет единственное решение. Если, кроме того, $c = 0$, то оно допускает представление

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds,$$

где $G(t,s)$ — функция Грина однородной краевой задачи.

Пусть теперь коэффициент $A(\cdot)$, правая часть $f(\cdot)$, оператор $B$ и вектор $c$ в задаче (1), (2) зависят от параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$. Тогда решение задачи и матрица Грина также зависят от $\varepsilon$. В связи с этим естественно исследовать вопрос о том, когда при $\varepsilon \to 0+$

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_\infty \to 0, \tag{3}$$

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon) - G(\cdot,\cdot;0)\|_\infty \to 0, \tag{4}$$

где $\|\cdot\|_\infty$ — $\sup$-норма. Цель данной работы состоит в нахождении достаточных условий справедливости предельных соотношений (3) на $(a,b)$ и (4) на квадрате $(a,b)\times(a,b)$ при наиболее общих условиях на данные задачи. Отметим, что соотношение (4) имеет смысл лишь для линейных краевых задач и ранее в такой постановке не исследовалось.

**2. Предельные теоремы.** Рассмотрим семейство общих неоднородных краевых задач

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{5}$$

$$B_\varepsilon y(\cdot;\varepsilon) = c_\varepsilon, \quad \varepsilon \in [0,\varepsilon_0], \tag{6}$$

которые при каждом фиксированном $\varepsilon$ удовлетворяют предположениям п. 1. Чтобы поставленные задачи имели смысл, будем предполагать далее, что выполнено следующее допущение.

**Предположение I.** *Предельная однородная краевая задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0), \qquad B_0 y(\cdot;0) = 0$$

*имеет только тривиальное решение.*

Тогда неоднородная предельная краевая задача имеет единственное решение при произвольных $f(\cdot;0) \in L([a,b];\mathbb{C}^m)$ и $c_0 \in \mathbb{C}^m$.

В работе [7] применительно к случаю вещественнозначных функций установлена следующая теорема.

**Теорема** (И. Т. Кигурадзе). *Пусть для задачи* (5), (6) *выполнены предположение* I *и при* $\varepsilon \to 0+$ *следующие условия*:

1) $\|A(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1)$;

2) $\left\| \int_a^t A(s;\varepsilon)ds - \int_a^t A(s;0)ds \right\|_\infty \to 0$;

3) $B_\varepsilon y \to B_0 y$, $y \in C\left([a,b];\mathbb{C}^m\right)$, $c_\varepsilon \to c_0$;

4) $\left\|\int_a^t f(s;\varepsilon)ds - \int_a^t f(s;0)ds\right\|_\infty \to 0.$

*Тогда для достаточно малых $\varepsilon$ задача* (5), (6) *имеет единственное решение и справедливо предельное соотношение* (3).

Здесь и всюду далее $\|\cdot\|_1$ — норма в пространстве Лебега $L_1 = L$.

Примеры (см. [7]) показывают, что каждое из условий теоремы является существенным и не может быть опущено. Однако условия на коэффициенты систем можно значительно ослабить. Сформулируем их.

Обозначим через $\mathcal{M} = \mathcal{M}(a,b;m)$ класс всех семейств комплекснозначных $(m \times m)$-матриц-функций

$$R(\cdot;\varepsilon)\colon [0,\varepsilon_0] \to L([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}),$$

для которых матричное решение $Z(t;\varepsilon)$ задачи Коши

$$Z'(t;\varepsilon) = R(t;\varepsilon)Z(t;\varepsilon), \qquad Z(a;\varepsilon) \equiv I_m$$

удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \|Z(\cdot;\varepsilon) - I_m\|_\infty = 0,$$

где $I_m$ — единичная $(m \times m)$-матрица.

**Теорема 1.** *В формулировке теоремы Кигурадзе можно заменить условия* 1, 2 *одним более общим условием*

$$R(t;\varepsilon) := A(t;\varepsilon) - A(t;0) \in \mathcal{M}, \tag{7}$$

*если* $\left\|f(\cdot\,;\varepsilon)\right\|_1 = O(1)$.

***Замечание* 1.** Из определения класса $\mathcal{M}$ и леммы 2 следует, что условие (7) является необходимым для справедливости предельного соотношения (3) применительно к решениям задач (5), (6) частного вида $f(\cdot;\varepsilon) \equiv 0$, $c_\varepsilon \equiv c \in \mathbb{C}^m$, $B_\varepsilon(y;\varepsilon) = y(a,\varepsilon)$. Поэтому оно является наиболее общим из возможных.

В работах [8 – 12] найдены конструктивные необходимые и достаточные условия того, что матричная функция $R(\cdot;\varepsilon)$ принадлежит $\mathcal{M}$ при выполнении различных *априорных* предположений. Примеры показывают, что класс $\mathcal{M}$ не является аддитивным [11].

Для матрицы-функции $R(\cdot) \in L([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ и вектор-функции $f(\cdot) \in L([a,b];\mathbb{C}^m)$ положим

$$R^\vee(t) := \int_a^t R(s)ds, \qquad f^\vee(t) := \int_a^t f(s)ds.$$

Тогда условия 2 и 4 можно записать соответственно в виде:

2′) $\|R^\vee(\cdot;\varepsilon)\|_\infty \to 0$, $\varepsilon \to 0+$;

4′) $\|f^\vee(\cdot;\varepsilon) - f^\vee(\cdot;0)\|_\infty \to 0$, $\varepsilon \to 0+$.

Из результатов [10, 11] следует, что справедлива следующая теорема.

**Теорема** (А. Ю. Левин). *Если при $\varepsilon \to 0+$ выполнено любое из четырех условий*:

$(\alpha)$ $\|R(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1)$;

$(\beta)$ $\|R^\vee(\cdot;\varepsilon)R(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0$;

$(\gamma)$ $\|R(\cdot;\varepsilon)R^\vee(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0$;

$(\delta)$ $\|R^\vee(\cdot;\varepsilon)R(\cdot;\varepsilon) - R(\cdot;\varepsilon)R^\vee(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0$,

*то условие* (7) *равносильно условию* $2'$.

В общем случае условие $2'$ не является ни необходимым, ни достаточным для выполнения условия (7). Ниже будет приведен пример, в котором выполнено соотношение (7), однако не выполняется ни одно из условий $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $(\delta)$ и тем более условие 1 теоремы Кигурадзе.

Из теоремы 1, в частности, следует, что при выполнении ее условий на $A(\cdot,\varepsilon)$ и $B_\varepsilon$ при достаточно малых значениях $\varepsilon$ задача (5), (6) однозначно разрешима. Поэтому существуют функции Грина $G(t,s;\varepsilon)$, заданные на квадрате $(a,b)\times(a,b)$. При этом каждая из них определяется однозначно лишь с точностью до значений на подмножестве меры нуль. В связи с этим вопрос о справедливости предельного соотношения (4) нуждается в уточнении.

Назовем *нормированной* матрицей Грина однородной краевой задачи (1), (2) ту, которая определяется посредством приводимой ниже формулы (18). Для таких матриц Грина справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены предположение* I *и условия*:

1) $A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) \in \mathcal{M}$;

2) $\|B_\varepsilon - B_0\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+$ .

*Тогда для достаточно малых $\varepsilon$ существуют нормированные матрицы Грина рассматриваемых задач, которые удовлетворяют предельному соотношению* (4).

Утверждение теоремы 1 анонсировано в работе [16]. Ее доказательство приведено в п. 3 данной работы. Для более широких классов краевых задач аналог теоремы 1 применительно к нормам соболевских пространств $W_p^n$, $n\in\mathbb{N}$, $p\in[1,\infty)$, установлен в [17].

Условие 4 теоремы 1 также можно существенно ослабить. Формулировка соответствующего результата приведена в [16] и содержит клас $\mathcal{M}(a,b;m+1)$.

Доказательство теоремы 2 содержится в п. 4 данной работы. Там же приведен пример, который показывает, что в условии 2 теоремы 2 равномерную сходимость операторов нельзя заменить сильной.

В более слабой форме предельное соотношение (4), где $\|\cdot\|_\infty$ — норма в пространстве Лебега $L_\infty$, использовалось в работах [18, 19] для доказательства равномерной резольвентной аппроксимации операторов Штурма – Лиувилля с сильно сингулярными потенциалами аналогичными операторами с гладкими потенциалами. Подобные дифференциальные операторы встречаются в ряде задач современной математической физики. Относительно дифференциальных операторов высокого порядка см. [20].

**3. Доказательство теоремы 1**. Сформулируем сначала известное (см., например, [14]) утверждение общего характера, которое будет использоваться далее.

Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра с единицей, а $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ — мультипликативная группа обратимых элементов алгебры $\mathcal{A}$.

**Лемма 1.** 1. *Отображение* $X \mapsto X^{-1}$ *является непрерывным по норме* $\mathcal{A}$ *на множестве* $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.

2. *Отображение* $(X, Y) \mapsto X \cdot Y$*является непрерывным на* $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

В частности, в лемме 1 можно положить $\mathcal{A} = B([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m})$. Это (некоммутативная при $m \geq 2$) банахова алгебра с единицей $I_m$ и нормой

$$\|X\|_{\mathcal{A}} := \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |X(t)|, \qquad |X| := \sum_{i,j} |x_{i,j}|.$$

Пусть $Y(t;\varepsilon)$ — единственное решение матричной задачи Коши

$$Y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)Y(t;\varepsilon), \qquad Y(a;\varepsilon) = I_m.$$

Отправным моментом в доказательстве теоремы 1 является принцип редукции А. Ю. Левина [10, 11]. В наших определениях он имеет следующий вид.

**Лемма 2.** *Предельное соотношение*

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+,$$

*выполняется в том и только в том случае, когда*

$$A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) \in \mathcal{M}.$$

Наряду с исходной неоднородной краевой задачей (5), (6) относительно вектор-функции $y(t;\varepsilon)$ рассмотрим еще три векторные краевые задачи:

$$z'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)z(t;\varepsilon), \qquad B_\varepsilon z(\cdot;\varepsilon) = c_\varepsilon, \tag{8}$$

$$x'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)x(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad x(a;\varepsilon) \equiv 0, \tag{9}$$

$$w'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)w(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \qquad B_\varepsilon w(\cdot;\varepsilon) \equiv 0. \tag{10}$$

Как известно, краевая задача (9) (задача Коши) всегда имеет решение и оно единственно.

**Лемма 3.** *Если выполнено предположение* I, *то каждая из задач* (5)–(6), (8) *и* (10) *при достаточно малых значениях параметра* $\varepsilon$ *имеет ровно одно решение.*

***Доказательство.*** Достаточно показать, что при малых $\varepsilon$ однородная краевая задача

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon), \qquad B_\varepsilon y(\cdot;\varepsilon) = 0$$

имеет только тривиальное решение. Каждое из решений однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(t;\varepsilon) = Y(t;\varepsilon)\widetilde{c}_\varepsilon, \quad \widetilde{c}_\varepsilon \in \mathbb{C}^m,$$

где $Y(t;\varepsilon)$ — матрицант этого уравнения. Отсюда в силу краевого условия имеем

$$\big[B_\varepsilon Y(t;\varepsilon)\big]\widetilde{c}_\varepsilon \equiv 0,$$

где $i$-й столбец $(m\times m)$-матрицы $[B_\varepsilon Y(t;\varepsilon)]$ по определению совпадает с действием линейного оператора $B_\varepsilon$ на $i$-й столбец матрицы $Y(t;\varepsilon)$.

Квадратная матрица $[B_\varepsilon Y(t;\varepsilon)]$ непрерывно зависит от $\varepsilon$ в силу леммы 2 и сильной непрерывности операторной функции $B_\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$. Кроме того, в силу предположения I

$$\det\big[B_0 Y(t;0)\big] \neq 0.$$

Поэтому в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ функция

$$\det\big[B_\varepsilon Y(t;\varepsilon)\big] \neq 0.$$

Отсюда следует, что в этой окрестности вектор $\widetilde{c}_\varepsilon \equiv 0$, и лемма доказана.

Из леммы 3 следует, что при малых $\varepsilon > 0$

$$y(\cdot;\varepsilon) = z(\cdot;\epsilon) + w(\cdot;\epsilon).$$

Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что при ее условиях

$$\big\|z(\cdot;\varepsilon) - z(\cdot;0)\big\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+, \tag{11}$$

$$\big\|w(\cdot;\varepsilon) - w(\cdot;0)\big\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{12}$$

**Лемма 4.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда справедливо предельное соотношение* (11).

***Доказательство.*** Из первого из равенств (8) имеем

$$z(t;\varepsilon) = Y(t;\varepsilon)\widetilde{c}_\varepsilon.$$

Отсюда в силу второго из равенств (8) получаем

$$\big[B_\varepsilon Y(t;\varepsilon)\big]\widetilde{c}_\varepsilon = c_\varepsilon.$$

Поэтому, согласно доказанному, при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\widetilde{c}_\varepsilon = \big[B_\varepsilon Y(t;\varepsilon)\big]^{-1} c_\varepsilon.$$

В силу лемм 1, 2

$$\Big|\big[B_\varepsilon Y(t;\varepsilon)\big]^{-1} - [B_0 Y(t;0)]^{-1}\Big| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Кроме того, по условию $c_\varepsilon \to c_0$. Поэтому $\widetilde{c}_\varepsilon \to \widetilde{c}_0$ при $\varepsilon \to 0+$ . Отсюда следует соотношение (11).

**Лемма 5.** *Пусть при* $\varepsilon \to 0+$ *выполнены условия*:

1) $A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) \in \mathcal{M}$;

2) $\|f(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1)$;

3) $\|f^\vee(\cdot;\varepsilon) - f^\vee(\cdot;0)\|_\infty \to 0$.

*Тогда*

$$\big\|x(\cdot;\varepsilon) - x(\cdot;0)\big\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{13}$$

***Доказательство.*** Из условия 1 в силу принципа редукции вытекает, что

$$\left\|Y(t;\varepsilon) - Y(t;0)\right\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Отсюда в силу леммы 1 следует, что

$$\left\|Y^{-1}(t;\varepsilon) - Y^{-1}(t;0)\right\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Как известно, решение $x(t;\varepsilon)$ задачи (9) может быть представлено в виде

$$x(t;\varepsilon) = Y(t;\varepsilon)\int\limits_a^t Y^{-1}(s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds.$$

Поэтому в силу леммы 1 достаточно доказать, что

$$\left\|\int\limits_a^t Y^{-1}(s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds - \int\limits_a^t Y^{-1}(s;0)f(s;0)ds\right\|_\infty \to 0.$$

Из оценки

$$\left\|\int\limits_a^t [Y^{-1}(s;\varepsilon) - Y^{-1}(s;0)]f(s;\varepsilon)ds\right\|_\infty \leqslant \int\limits_a^t \left|Y^{-1}(s;\varepsilon) - Y^{-1}(s;0)\right||f(s;\varepsilon)|ds \leqslant$$

$$\leqslant \left\|Y^{-1}(\cdot;\varepsilon) - Y^{-1}(\cdot;0)\right\|_\infty \sup_\varepsilon \|f(\cdot;\varepsilon)\|_1 \leqslant c\left\|Y^{-1}(\cdot;\varepsilon) - Y^{-1}(\cdot;0)\right\|_\infty \to 0$$

следует, что достаточно доказать, что

$$\left\|\int\limits_a^t Y^{-1}(s;0)[f(s;\varepsilon) - f(s;0)]ds\right\|_\infty \to 0.$$

Интегрируя интеграл по частям, имеем

$$\left\|\int\limits_a^t Y^{-1}(s;0)[f(s;\varepsilon) - f(s;0)]ds\right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int\limits_a^t (Y^{-1})'(s;0)[f^\vee(s;\varepsilon) - f^\vee(s;0)]ds\right\|_\infty + 2\left\|Y^{-1}(\cdot;0)\right\|_\infty\left\|f^\vee(\cdot;\varepsilon) - f^\vee(\cdot;0)\right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \left\|f^\vee(\cdot;\varepsilon) - f^\vee(\cdot;0)\right\|_\infty\Big(2\left\|Y^{-1}(\cdot;0)\right\|_\infty + \left\|Y^{-1}(\cdot;0)\right\|_\infty^2\left\|Y'(\cdot;0)\right\|_1\Big) \to 0, \quad \varepsilon \to 0+,$$

так как

$$(Y^{-1})'(\cdot;\varepsilon) = -Y^{-1}(\cdot;\varepsilon)Y'(\cdot;\varepsilon)Y^{-1}(\cdot;\varepsilon).$$

Лемма доказана.

**Лемма 6.** *При условиях теоремы* 1 *справедливо предельное соотношение* (12).

***Доказательство.*** Положим

$$v(t;\varepsilon) := x(t;\varepsilon) - w(t;\varepsilon).$$

Тогда вектор-функция $v(t;\varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$v'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)v(t;\varepsilon), \qquad B_\varepsilon v(t;\varepsilon) = B_\varepsilon x(t;\varepsilon) =: \widetilde{c}_\varepsilon.$$

Но

$$\big\|B_\varepsilon x(t;\varepsilon) - B_0 x(t;0)\big\|_\infty \leqslant \|B_\varepsilon\|\big\|x(t;\varepsilon) - x(t;0)\big\|_\infty + \big\|(B_\varepsilon - B_0)x(t;0)\big\|_\infty \to 0,$$

т. е. $\widetilde{c}_\varepsilon \to \widetilde{c}_0$ при $\varepsilon \to 0+$ . Поэтому

$$v(t;\varepsilon) = Y(t;\varepsilon)\overline{c}_\varepsilon, \quad \overline{c}_\varepsilon \in \mathbb{C}^m,$$

где $\big[B_\varepsilon Y(t;\varepsilon)\big]\overline{c}_\varepsilon = \widetilde{c}_\varepsilon$ и при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\overline{c}_\varepsilon = \big[B_\varepsilon Y(t;\varepsilon)\big]^{-1}\widetilde{c}_\varepsilon \to \big[B_0 Y(t;0)\big]^{-1}\widetilde{c}_0 = \overline{c}_0.$$

Отсюда следует, что

$$\big\|v(t;\varepsilon) - v(t;0)\big\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to 0+ . \tag{14}$$

Из равенства $w(t;\varepsilon) = x(t;\varepsilon) - v(t;\varepsilon)$ и соотношений (13) и (14) следует асимптотическое соотношение (12).

Лемма 6, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Приведем пример, в котором выполнено соотношение (7), однако не выполняется ни одно из условий $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $(\delta)$.

***Пример* 1.** Пусть $m = 2$, $(a,b) = (0,1)$, $A(t;\varepsilon) = A(t) + R(t;\varepsilon)$, где

$$R(t;\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\cos\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sin\left(\dfrac{2t}{\varepsilon}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $\|R^\vee(\cdot;\varepsilon)\|_\infty \to 0$ и

$$R(t;\varepsilon)R^\vee(t;\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2t}{\varepsilon}\right)\sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),\ \sin\left(\frac{2t}{\varepsilon}\right)\sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\},$$

$$R^\vee(t;\varepsilon)R(t;\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{\sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin\left(\frac{2t}{\varepsilon}\right),\ \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin\left(\frac{2t}{\varepsilon}\right)\right\},$$

$$R^\vee(t;\varepsilon)R(t;\varepsilon) - R(t;\varepsilon)R^\vee(t;\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2t}{\varepsilon}\right)\sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),\ \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin\left(\frac{2t}{\varepsilon}\right)\right\},$$

$$\big\|R(\cdot;\varepsilon)\big\|_1 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_0^1 \left|\cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right| dt = \sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^{1/\varepsilon} |\cos(t)| dt = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\varepsilon\int\limits_0^{1/\varepsilon} |\cos(t)|\, dt \to +\infty,$$

так как $\mathcal{M}\big\{|\cos(t)| > 0\big\}$, где $\mathcal{M}$ — среднее значение периодической функции (см. [15]).

Аналогично

$$\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin\left(\frac{2t}{\varepsilon}\right)\right| dt = \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} \left|\sin(t)\right|\left|\sin(2t)\right| dt \to M\Big\{\left|\sin(t)\sin(2t)\right|\Big\} > 0.$$

Поэтому ни одно из четырех приведенных выше условий здесь не выполнено. Однако, используя теорему 6 работы [12] при $i = 1$, нетрудно убедиться, что $R(\cdot;\varepsilon)$ принадлежит $\mathcal{M}(0,1;2)$.

**4. Доказательство теоремы 2.** Рассмотрим однородную векторную краевую задачу

$$y'(t) = A(t)y(t), \qquad By = 0. \tag{15}$$

Тогда справедливо (см., например, [13]) однозначное представление

$$By = \int_a^b [dH(t)]y(t), \qquad y(\cdot) \in C([a,b];\mathbb{C}^m),$$

где $H(\cdot) \in NBV([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — банахово пространство комплекснозначных $(m\times m)$-матриц-функций с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$, которые равны 0 в точке $a$ и непрерывны слева на полуинтервале $(a,b]$. Поэтому для матрицанта $Y(t)$ системы (15) на интервале $[a,b]$ определена заданная интегралом Стильтьеса матрица-функция

$$H_Y(t) = \int_a^t [dH(s)]Y(s). \tag{16}$$

Она может быть разрывной в точках разрыва коэффициентов матрицы-функции $H(\cdot)$. При этом если однородная краевая задача (15) имеет только тривиальное решение, то

$$\det H_Y(b) \neq 0 \tag{17}$$

и существует матрица $H_Y^{-1}(b)$.

Как и в вещественном случае (см., например, [13]), справедлива следующая лемма.

**Лемма 7.** *Если выполнено неравенство* (17), *то матрица Грина однородной задачи* (15) *существует и представима в виде*

$$G(t,s) = \begin{cases} Y(t)Y^{-1}(s) - Y(t)H_Y^{-1}(b)H_Y(s)Y^{-1}(s), & a \leqslant s \leqslant t \leqslant b, \\ -Y(t)H_Y^{-1}(b)H_Y(s)Y^{-1}(s), & a \leqslant t < s \leqslant b. \end{cases} \tag{18}$$

Напомним, что формула (18) по определению задает нормированную матрицу Грина задачи (15).

Формулу (18) удобно записать в виде $G(t,s) = G_1(t,s) + G_2(t,s)$, где

$$G_1(t,s) = -Y(t)H_Y^{-1}(b)H_Y(s)Y^{-1}(s),$$

$$G(t,s) = \begin{cases} Y(t)Y^{-1}(s), & a \leqslant s \leqslant t \leqslant b, \\ 0, & a \leqslant t < s \leqslant b. \end{cases}$$

Понятно, что достаточно показать, что

$$\big\|G_i(t,s;\varepsilon)-G_i(t,s;0)\big\|_\infty\to 0,\qquad \varepsilon\to 0+,\quad i=1,2.$$

Из леммы 1 следует, что если

$$\big\|T_\varepsilon(t)-T_0(t)\big\|_\infty\to 0,\qquad \big\|S_\varepsilon(s)-S_0(s)\big\|_\infty\to 0,\qquad C_\varepsilon\to C_0,$$

то на квадрате $(a,b)\times(a,b)$

$$\big\|T_\varepsilon(t)C_\varepsilon S_\varepsilon(s)-T_0(t)C_0S_0(s)\big\|_\infty\to 0,\quad \varepsilon\to 0+.$$

Поэтому для доказательства теоремы 2, в силу леммы 1, достаточно показать, что при выполнении ее условий для достаточно малых $\varepsilon$

$$\det H_Y(b;\varepsilon)\neq 0, \tag{19}$$

$$\big\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\big\|_\infty\to 0,\quad \varepsilon\to 0+, \tag{20}$$

$$\big\|H_Y(\cdot;\varepsilon)-H_Y(\cdot;0)\big\|_\infty\to 0,\quad \varepsilon\to 0+. \tag{21}$$

Соотношения (19), (20) уже установлены нами при доказательстве теоремы 1.

Переходя к соотношению (21), имеем

$$\big\|H_Y(t;\varepsilon)-H_Y(t;0)\big\|_\infty=\left\|\int_a^t[dH(s;\varepsilon)]Y(s;\varepsilon)-\int_a^t[dH(s;0)]Y(s;0)\right\|_\infty\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\int_a^t\big[d(H(s;\varepsilon)-H(s;0))\big]Y(s;\varepsilon)\right\|_\infty+\left\|\int_a^t[dH(s;0)]\cdot[Y(s;\varepsilon)-Y(s;0)]\right\|_\infty\leqslant$$

$$\leqslant V_a^b\big[H(s;\varepsilon)-H(s;0)\big]\|Y(\cdot;\varepsilon)\|_\infty+V_a^b[H(s;0)]\cdot\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_\infty\to 0,$$

так как в силу условия $\|B_\varepsilon-B_0\|\to 0$ вариация матрицы-функции

$$V_a^b\big[H(s;\varepsilon)-H(s;0)\big]\to 0.$$

Теорема доказана.

Приведем упомянутый в п. 2 пример.

***Пример* 2.** Пусть $m=1$, $(a,b)=(0,1)$, $A(t,\varepsilon)=A(t,0)=0$, а линейные непрерывные операторы $B_\varepsilon\colon C([0,1];\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ заданы равенством

$$(B_\varepsilon y):=y(\varepsilon),\quad \varepsilon\in[0,1].$$

Определенные таким образом операторы $B_\varepsilon$ сильно сходятся к оператору $B_0$ на пространстве $C([0,1];\mathbb{C})$:

$$(B_\varepsilon y)=y(\varepsilon)\to y(0),\quad \varepsilon\to+0,\qquad y(\cdot)\in C([0,1];\mathbb{C}).$$

Однако

$$\|B_\varepsilon - B_0\| = 2, \quad \varepsilon \neq 0.$$

В данном случае функция Грина задачи

$$y'(t;0) = 0, \qquad y(t;0)|_{t=0} = 0$$

имеет вид

$$G(t,s;0) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant s < t \leqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

а для задачи

$$y'(t;\varepsilon) = 0, \qquad y(t;\varepsilon)|_{t=\varepsilon} = 0,$$

соответственно

$$G(t,s;\varepsilon) = G(t,s,0) - \mathbf{1}_{[0,1]\times[0,\varepsilon]}(t,s),$$

где $\mathbf{1}_F$ — характеристическая функция множества $F$.

Отсюда следует, что

$$\big\|G(t,s;\varepsilon) - G(t,s;0)\big\|_\infty = 1, \quad \varepsilon \neq 0.$$

***Замечание* 2.** Для операторов, соответствующих многоточечным краевым задачам с

$$B_\varepsilon y := C_1(\varepsilon)y(t_1) + C_2(\varepsilon)y(t_2) + \ldots + C_n(\varepsilon)y(t_n),$$

где $n \in \mathbb{N}$, точки $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \in [a,b]$ фиксированы и не зависят от $\varepsilon$, матрицы $C_k(\varepsilon)$ принадлежат $\mathbb{C}^{m\times m}$, условия

$$\|B_\varepsilon - B_0\| \to 0,$$

$$B_\varepsilon y \to B_0 y, \quad y \in C\left([a,b];\mathbb{C}^m\right)$$

равносильны между собой. Каждое из них эквивалентно тому, что

$$C_k(\varepsilon) \to C_k(0), \qquad \varepsilon \to 0+, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

1. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. мат. журн. – 1952. – **4**, № 2. – С. 215 – 219.
2. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, вып. 3 – С. 147 – 153.
3. *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Чех. мат. журн. – 1957. – **7**, № 4. – С. 568 – 583.
4. *Самойленко А. М.* Про неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметра // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1962. – № 10. – С. 1290 – 1293.
5. *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Укр. мат. журн. – 1962. – **14**, № 3. – С. 289 – 298.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1955. – 448 с.

7. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ. – 1987. – **30**. – С. 3 – 103.
8. *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems // J. Different. Equat. – 1967. – **3**, № 3. – P. 423 – 439.
9. *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations // J. Different. Equat. – 1967. – **3**. – P. 571 – 579.
10. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$// Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 774 – 777.
11. *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I // Вестн. Ярослав. ун-та. – 1973. – Вып. 5. – С. 105 – 132.
12. *Нгуен Тхе Хоан.* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 6. – С. 970 – 975.
13. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. – 352 с.
14. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. – М.: Мир, 1966. – 1064 с.
15. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
16. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23 – 27.
17. *Кодлюк Т. И., Михайлец В. А.* Решения одномерных краевых задач с параметром в пространствах Соболева // Ukr. Mat. Visn. – 2012. – **9**, № 4. – С. 546 – 559.
18. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Resolvent convergence of Sturm – Liouville operators with singular potentials // Math. Notes. – 2010. – **87**, № 2. – P. 287 – 292.
19. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of singular Sturm – Liouville equations // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2010. – **16**, № 2. – P. 120 – 130.
20. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives // Ukr. Math. J. – 2012. – **63**, № 9. – P. 1361 – 1378.

Получено 26.11.12