УДК 517.956

**В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, Р. І. Петришин** (Чернів. нац. ун-т)

# КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЇ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

We study properties of a fundamental solution of a nonlocal multipoint (with respect to time) problem for evolution equations with pseudo-Bessel operators constructed on the basis of constant symbols. The correct solvability of this problem in the class of generalized functions of distribution type is proved.

Исследованы свойства фундаментального решения нелокальной многоточечной по времени задачи для эволюционных уравнений с псевдобесселевыми операторами, построенными по постоянным символам. Доказана корректная разрешимость такой задачи в классе обобщенных функций типа распределений.

Теорія нелокальних крайових задач як розділ загальної теорії крайових задач для рівнянь з частинними похідними інтенсивно розвивається з сімдесятих років минулого століття. Нелокальними крайовими задачами прийнято називати задачі, в яких замість задання значень розв'язку або його похідних на фіксованій частині межі задається зв'язок цих значень із значеннями тих самих функцій на інших внутрішніх або межових многовидах. До таких задач належать і нелокальні багатоточкові за часом задачі. Загальне означення нелокальних умов та їх класифікація були запроваджені А. М. Нахушевим [1].

Дослідження таких задач зумовлене багатьма застосуваннями у механіці, фізиці, хімії, біології, екології та інших природничо-наукових дисциплінах, які виникають при математичному моделюванні тих чи інших процесів [2 – 8]. Доцільність використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач уперше відмітив О. О. Дезін [9], який досліджував розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Він показав, що для постановки коректної крайової задачі необхідно використовувати поряд з локальними і нелокальні умови. А. М. Мамян встановив [10], що існують такі рівняння з частинними похідними в шарі, для яких неможливо сформулювати жодну коректну локальну задачу; водночас коректні задачі існують, якщо залучити нелокальні умови.

Двоточкову за часом задачу для рівняння теплопровідності та $B$-параболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами дослідив М. І. Матійчук [11]. Двоточкову та $m$-точкову ($m \geq 2$) за часом задачі для одного класу еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами, які будуються за допомогою перетворення Бесселя та негладкими однорідними символами, незалежними від просторових змінних, досліджували В. В. Городецький, О. М. Ленюк, Д. І. Спіжавка [12, 13]. Такі оператори вони назвали псевдобесселевими і їх формально можна подати у вигляді $F^{-1}_{B_\nu}[aF_{B_\nu}]$, де $F_{B_\nu}$, $F^{-1}_{B_\nu}$ — перетворення Бесселя, $a$ — символ оператора. У праці [14] побудовано нові класи негладких у фіксованій точці однорідних символів та нові класи псевдодиференціальних операторів, які містять клас псевдобесселевих операторів, розглянутих у [12, 13]. Досліджено задачу Коші для еволюційних рівнянь з такими операторами у просторах узагальнених початкових функцій.

Нелокальні багатоточкові за часом задачі для таких рівнянь на теперішній час не вивчались. Метою цієї роботи є побудова та дослідження властивостей фундаментального розв'язку нелокальної $m$-точкової ($m \geq 1$) за часом задачі для еволюційних рівнянь, що містять вказані псевдодиференціальні оператори, встановлення коректної розв'язності задачі у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу розподілів. Дослідження таких задач з крайовими умовами в тих чи інших просторах узагальнених функцій (встановлення їх коректної розв'язності, побудова та властивості розв'язків тощо) є актуальним, оскільки граничні функції можуть мати особливості в одній або декількох точках. Якщо ці особливості степеневого порядку, то такі функції допускають регуляризацію у просторах узагальнених функцій скінченного порядку типу розподілів Соболєва – Шварца. Якщо ж порядок особливостей вищий за степеневий, то ці функції є узагальненими функціями нескінченного порядку (наприклад, ультрарозподілами, гіперфункціями). Тут знайдено клас $X'$ узагальнених граничних функцій, для яких розв'язок $u(t,\cdot)$ багатоточкової задачі зображується у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком цієї задачі (який є елементом простору $X$ основних функцій), при цьому розв'язок має ті ж властивості, що і фундаментальний розв'язок, тобто $u(t,\cdot) \in X$ при кожному $t \in (0,T]$, а відповідну крайову умову $u(t,\cdot)$ задовольняє у просторі $X'$.

**1. Простори основних та узагальнених функцій.** ***1.1. Простори $\theta_{M,\rho}$, $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.*** Нехай $M$, $\rho\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ — неперервні, парні на $\mathbb{R}$ функції, диференційовні, монотонно зростаючі на $(0,\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} M(x) = \lim_{x\to+\infty} \rho(x) = 0$, $M(0) = \rho(0) = 0$, причому $\rho(x) = \displaystyle\int_0^x \omega(\xi)d\xi$ для $x \geq 0$, де $\omega$ — зростаюча й неперервна на $[0,\infty)$ функція, $\omega(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \omega(x) = +\infty$. Функція $\rho$ опукла на $[0,+\infty)$, тобто а) $\forall \{x_1,x_2\} \subset [0,+\infty)\colon\ \rho(x_1)+\rho(x_2) \leq \rho(x_1+x_2)$; б) $\forall \alpha \geq 1\ \forall x \in [0,\infty)\colon\ \rho(\alpha x) \geq \alpha\rho(x)$; в) $\forall \alpha \in (0,1)\ \forall x \in [0,\infty)\colon\ \rho(\alpha x) \leq \alpha\rho(x)$. Припускаємо також, що виконуються наступні умови:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 = x_0(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \geq x_0\colon \qquad \rho(\varepsilon x) \geq M(x),$$

$$\rho(x) \underset{x\to 0+0}{\sim} x^{\gamma}, \quad \gamma \in (1,+\infty), \qquad M(x) \underset{x\to 0+0}{\sim} x^{\beta}, \quad \beta \in (0,1],$$

де $\gamma$ та $\beta$ — фіксовані параметри.

Символом $\theta_{M,\rho}$ позначимо сукупність усіх неперервних, парних на $\mathbb{R}$ функцій $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, для яких

$$\exists a > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_k > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\colon$$

$$M^k(x)|D_x^k\varphi(x)| \leq c_k \sum_{l=1}^{k} \rho^l(x) \cdot e^{-\rho(ax)} \tag{1}$$

(якщо $k = 0$, то суми немає; якщо $k = 1$, то $l = 1$ і т. д.; якщо $k = 0$, то (1) справджується для всіх $x \in \mathbb{R}$; сталі $c_k$, $a > 0$ залежать від функції $\varphi$).

Зазначимо, що однорідні порядку $\gamma > 1$ функції із простору $\theta_{|x|,|x|^{\gamma}}$ трактуються як негладкі у точці 0 однорідні символи, за якими будуються псевдодиференціальні оператори вигляду $F^{-1}[\alpha F]$, $\alpha \in \theta_{|x|,|x|^{\gamma}}$, де $F$, $F^{-1}$ — пряме та обернене перетворення Фур'є [14, 15].

Відзначимо основні властивості функцій із простору $\theta_{M,\rho}$, доведені в [15]: у функції $D_x^k\varphi$, $\varphi \in \theta_{M,\rho}$, $x \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, існують скінченні односторонні границі $\lim_{x\to\pm 0} D_x^k\varphi(x)$, функція

$D_x^{2k}\varphi$, $x \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, у точці $x = 0$ має усувний розрив, кожна функція $\varphi \in \theta_{M,\rho}$ у точці 0 задовольняє умову Діні.

Нехай $\nu$ — фіксоване число з множини $\{3/2, 5/2, 7/2, \ldots\}$. На функціях з простору $\theta_{M,\rho}$ визначено перетворення Бесселя $F_{B_\nu}$:

$$F_{B_\nu}[\varphi](\xi) = \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(x\xi) x^{2\nu+1} dx, \qquad \varphi \in \theta_{M,\rho},$$

де $j_\nu$ — нормована функція Бесселя. Нехай $F_{B_\nu}[\theta_{M,\rho}] := \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$. Елементами простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції, які задовольняють нерівності [16]

$$|D_\xi^m F_{B_\nu}[\varphi](\xi)| \leq \alpha_m (1 + |\xi|)^{-(\omega_0+m)}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \theta_{M,\rho},$$

$\omega_0 = \tilde{p}_0 + [\beta^{-1}[\gamma]]$, $\tilde{p}_0 = 1 + p_0$, $p_0 = 2\nu + 1$, $[\cdot]$ — ціла частина числа.

$\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ перетворюється в зліченно-нормований простір, якщо систему норм в ньому ввести за формулами

$$\|\varphi\|_p := \sup_{\xi \in [0,\infty)} \left\{ \sum_{k=0}^p \Lambda(\xi)^{\tilde{\omega}_0 + 2k} |D_\xi^{2k} \varphi(\xi)| \right\}, \qquad \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\Lambda(\xi) := 1 + \xi$, $\xi \in [0,\infty)$, $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ — фіксований параметр.

Збіжність у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ — це збіжність за кожною нормою $\|\cdot\|_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

Перетворення Бесселя неперервно відображає $\theta_{M,\rho}$ на $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ [16]; на функціях із простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ визначено обернене перетворення Бесселя $F^{-1}_{B_\nu}$:

$$F^{-1}_{B_\nu}[\psi](x) = c_\nu \int\limits_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \qquad c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}, \quad \psi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}.$$

У просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ є визначеним і неперервним оператор узагальненого зсуву аргументу $T_x^\xi$, який відповідає оператору Бесселя [17]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\omega}) \sin^{2\nu}\omega d\omega, \qquad \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. Операція узагальненого зсуву аргументу $\varphi \to T_x^\xi \varphi$ диференційовна (навіть нескінченно диференційовна) у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ в тому розумінні, що граничні співвідношення $(\Delta\xi)^{-1}(T_x^{\xi+\Delta\xi}\varphi(x) - T_x^\xi\varphi(x)) \to \partial T_x^\xi \varphi(x)/\partial\xi$, $\Delta\xi \to 0$, справджуються у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$.

Дотримуючись [18], згортку двох функцій із простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ визначимо формулою

$$(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi, \qquad \{\varphi, \psi\} \subset \Phi^\nu_{\beta,\gamma}.$$

***1.2. Простір узагальнених функцій $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$.*** Символом $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Оскільки $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma} = \bigcap_{p=0}^{\infty} \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$, де $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$ — поповнення простору $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ за $p$-ю нормою, до того ж вкладення $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p+1} \subset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервні, щільні й компактні, то $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})' = \bigcup_{p=0}^{\infty} (\Phi^{\nu}_{\gamma,\beta,p})'$. Отже, якщо $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$, то $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p})'$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$; найменше з таких $p$ називається порядком $f$, тобто кожна узагальнена функція $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ має скінченний порядок.

Оскільки у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ визначено операцію узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) \rangle \equiv \langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi) \rangle, \qquad \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma},$$

при цьому $f * \varphi$ — нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція (індекс $\xi$ в $f_\xi$ означає, що функціонал $f$ діє на $T_x^\xi \varphi(x)$ як на функцію аргументу $\xi$).

Врахувавши те, що $F_{B_\nu}[\varphi] \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, якщо $\varphi \in \theta_{M,\rho}$, перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ визначимо за допомогою співвідношення $\langle F_{B_\nu}[f], \varphi \rangle = \langle f, F_{B_\nu}[\varphi] \rangle$, $\varphi \in \theta_{M,\rho}$. Звідси, з властивостей лінійності і неперервності функціонала $f$ та перетворення Бесселя випливає лінійність і неперервність функціонала $F_{B_\nu}[f]$, заданого на просторі $\theta_{M,\rho}$, тобто $F_{B_\nu}[f] \in \theta'_{M,\rho}$.

**2. Структура та властивості фундаментального розв'язку $m$-точкової задачі.** Нехай $p \in \mathbb{N}$ є фіксованим, $\{\gamma_i\}_{i=1}^p \subset (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \ldots\}$, до того ж $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_p$, $\rho_i \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $i = \{1, \ldots, p\}$, — функції, які задовольняють ті ж умови, що і функція $\rho$ з п. 1, причому $\rho_i \underset{x \to +0}{\sim} x^{\gamma_i}$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, і

$$\exists L > 0 \quad \forall x \geq 0\colon \qquad \rho_i(x) \leq L\rho_1(x), \quad i \in \{2, 3, \ldots, p\},$$

$a_i \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, — неперервні, парні на $\mathbb{R}$ функції, однорідні порядку $\gamma_i$ (відповідно), нескінченно диференційовні на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ такі, що:

1) $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists b_{ki} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\colon$ $M^k(x)|D_x^k a_i(x)| \leq b_{ki}\rho_i(x)$;

2) $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$ $\exists c_{0i}, \tilde{c}_{0i} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}\colon$ $c_{0i}\rho_i(x) \leq a_i(x) \leq \tilde{c}_{0i}(1 + \rho_i(x))$.

Безпосередньо переконуємося в тому, що функції $a_1, \ldots, a_p$ є мультиплікаторами у просторі $\theta_{M,\rho_1}$. У зв'язку з цим розглянемо оператори $A_i$: $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1} \to \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$, які визначаються формулами

$$A_i \varphi = F_{B_\nu}[a_i F_{B_\nu}^{-1}[\varphi]], \qquad \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}, \quad i \in \{1, \ldots, p\}.$$

Із властивостей перетворення Бесселя (прямого та оберненого) випливає лінійність і неперервність операторів $A_i$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$, які далі називатимемо псевдобесселевими операторами.

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{p} A_i u = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{2}$$

розглянемо багатоточкову задачу

$$\mu u(t, \cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t, \cdot)|_{t=t_1} - \ldots - \mu_m u(t, \cdot)|_{t=t_m} = \varphi, \tag{3}$$

де $T \in (0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$ — фіксовані числа, до того ж $\mu > \mu_0 2^m$, $\mu_0 = \max\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq T$, $\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$.

Розв'язок задачі (2), (3) шукаємо у вигляді $u(t,x) = F_{B_\nu}[v(t,\sigma)](x)$. Для функції $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ отримуємо наступну задачу з параметром $\sigma$:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} + \sum_{i=1}^{p} a_i(\sigma) v(t,\sigma) = 0, \qquad (t,\sigma) \in \Omega, \tag{4}$$

$$\mu v(t,\sigma)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k v(t,\sigma)|_{t=t_k} = \tilde{\varphi}(\sigma), \qquad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

де $\tilde{\varphi}(\sigma) := F^{-1}_{B_\nu}[\varphi](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c \exp\left\{-t \sum_{i=1}^{p} a_i(\sigma)\right\}, \qquad (t,\sigma) \in \Omega, \tag{6}$$

де $c = c(\sigma)$ визначається з умови (5). Підставивши (6) в (5), знайдемо

$$c = \tilde{\varphi}(\sigma) \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\left\{-t_k \sum_{i=1}^{p} a_i(\sigma)\right\}\right)^{-1}, \qquad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже, формальним розв'язком задачі (2), (3) є функція

$$u(t,x) = \int\limits_0^\infty v(t,\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \qquad (t,x) \in \Omega.$$

Введемо позначення

$$G(t,x) := c_\nu \int\limits_0^\infty Q(t,\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \tag{7}$$

де

$$Q(t,\sigma) = \exp\left\{-t \sum_{i=1}^{p} a_i(\sigma)\right\} \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\left\{-t_k \sum_{i=1}^{p} a_i(\sigma)\right\}\right)^{-1}.$$

Тоді, знову міркуючи формально, отримуємо

$$u(t,x) = \int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t,x) \varphi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi, \qquad (t,x) \in \Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = \int\limits_0^\infty Q(t,\sigma) \left(c_\nu \int\limits_0^\infty \varphi(\xi) j_\nu(\sigma\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi\right) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma.$$

Оскільки $j_\nu(\sigma\xi)j_\nu(\sigma x) = T_x^\xi j_\nu(\sigma x)$ [17], то, врахувавши властивості оператора узагальненого зсуву аргументу [17], знайдемо

$$u(t,x) = \int\limits_0^\infty \left( c_\nu \int\limits_0^\infty Q(t,\sigma) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma \right) \varphi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi =$$

$$= \int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t,x)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi. \tag{8}$$

Коректність проведених тут перетворень та збіжність відповідних інтегралів, а отже, правильність формул (8), випливають із властивостей функції $G$, які ми наведемо нижче. Передусім дослідимо властивості функції $G$ як функції аргументу $x$.

Оскільки

$$\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\left\{-t_k \sum_{i=1}^p a_i(\sigma)\right\} = \mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k \exp\left\{-t_k \sum_{i=1}^p a_i(\sigma)\right\}\right),$$

до того ж $\sum_{k=1}^m \mu_k < m\mu_0 < \mu_0 \cdot 2^m < \mu$, то

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k \exp\left\{-t_k \sum_{i=1}^p a_i(\sigma)\right\} \le \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k < 1.$$

Використавши поліноміальну формулу, одержимо

$$\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\left\{-t_k \sum_{i=1}^p a_i(\sigma)\right\}\right)^{-1} = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^\infty \mu^{-r}\left(\sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k a(\sigma)}\right)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)}\left(\sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}(\mu_1 e^{-t_1 a(\sigma)})^{r_1}\ldots(\mu_m e^{-t_m a(\sigma)})^{r_m}\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m} e^{-(t_1r_1+\ldots+t_mr_m)a(\sigma)},$$

де $a(\sigma) := \sum_{i=1}^p a_i(\sigma)$. Звідси маємо

$$G(t,x) = c_\nu \int\limits_0^\infty \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m} \times$$

$$\times e^{-(t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t)a(\sigma)} j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!}\tilde{G}(t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t, x),$$

де

$$\tilde{G}(t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m + t, x) = c_\nu \int\limits_0^\infty e^{-(t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m + t) a(\sigma)} j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

$\tilde{G}(t,x)$ — фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (2) , для якого правильними є оцінки [14]

$$|D_x^s \tilde{G}(t,x)| \le c_s t^{\tilde{\beta}} (t^{\tilde{\beta}_0} + |x|)^{-(\omega_0 + s)}, \qquad s \in \mathbb{Z}_+, (t,x) \in \Omega, \tag{9}$$

де $\omega_0 = 2\nu + 2 + [\beta^{-1}[\gamma_1]]$, $\tilde{\beta} = [\beta^{-1}[\gamma_1]]/\gamma_p$, $\tilde{\beta}_0 = 1/\gamma_1$, якщо $0 < t < 1$, інакше $\tilde{\beta} = [\beta^{-1}[\gamma_p]]/\gamma_1$, $\tilde{\beta}_0 = 1/\gamma_p$; стала $c_s > 0$ не залежить від $t$. Врахувавши (9), знайдемо

$$|D_x^s G(t,x)| \le c_s \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \ldots + r_m = r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \ldots \mu_m^{r_m}}{r_1! \ldots r_m!} (t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m + t)^{\tilde{\beta}} \times$$

$$\times ((t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m + t)^{\tilde{\beta}_0} + |x|)^{-(\omega_0 + s)} \le$$

$$\le c_s \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \ldots + r_m = r} \frac{r! \mu_0^r}{r_1! \ldots r_m!} (Tr + t)^{\tilde{\beta}} ((t_1 r + t)^{\tilde{\beta}_0} + |x|)^{-(\omega_0 + s)} \le$$

$$\le \tilde{c}_s \sum_{r=0}^\infty \tilde{\mu}^r (t + rT)^{\tilde{\beta}} ((t + r t_1)^{\tilde{\beta}_0} + |x|)^{-(\omega_0 + s)}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad (t,x) \in \Omega, \tag{10}$$

де $\tilde{\mu} = \mu_0 2^m \mu^{-1} < 1$. Оскільки $t + r t_1 \ge t \ \forall r \in \mathbb{Z}_+$, то з (10) випливає, що при кожному $t \in (0,T]$ функція $G$, як функція аргументу $x$, є елементом простору $\Phi_{\beta,\gamma_1}^\nu$.

На підставі цієї властивості робимо висновок про коректність формул (8), при цьому $u(t,x) = G(t,x) * \varphi(x)$.

Функція $G(t,\cdot)$ є неперервною функцією аргументу $t \in (0,T]$. Справді, із властивостей функцій $a_i$, $i \in \{1,\ldots,p\}$, випливає, що для $t \ge t_0 > 0$ справджуються нерівності

$$|Q(t,\sigma)| \le \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\right)^{-1} \exp\left\{-t_0 \sum_{i=1}^p c_{0i} \rho_i(\sigma)\right\} \le$$

$$\le \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\right)^{-1} \exp\{-t_0 c_{01} \rho_1(\sigma)\} \le \alpha \exp\{-t_0 c_{01} |\sigma|^{\gamma_1}\}.$$

Тоді, врахувавши інтегральну формулу Пуассона для нормованої функції Бесселя [19, с. 780]

$$j_\nu(\sigma) = \frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_0^{\pi/2} \cos(\sigma\cos\theta) \sin^{2\nu}\theta d\theta, \qquad \sigma \in \mathbb{R}, \quad \nu > -1/2,$$

знайдемо $|Q(t,\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1}| \le \alpha_0 \exp\{-\alpha_1 |\sigma|^{\gamma_1}\}$. Звідси вже випливає рівномірна збіжність у довільній смузі $\{(t,x)\colon t_0 \le t \le T, x \in \mathbb{R}\}$, $t_0 > 0$, інтеграла (7), тому функція $G(t,\cdot)$ є неперервною у кожній точці проміжку $(0,T]$. Аналогічно доводимо диференційовність по $t$ функції $G$, а також неперервність $\partial G(t,\cdot)/\partial t$ по $t$ (при фіксованому $x$).

**Лема 1.** *Функція $G(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра $t$ із значеннями у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$, диференційовна по $t$.*

***Доведення.*** Необхідно довести, що граничне співвідношення

$$\Psi_{\Delta t}(x) := \frac{1}{\Delta t}[G(t+\Delta t,x) - G(t,x)] \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t}G(t,x)$$

виконується в розумінні збіжності у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$, тобто (див. [16]):

1) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+ \; D_x^{2\alpha}\Psi_{\Delta t} \rightrightarrows D_x^{2\alpha}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\right)$, $\Delta t \to 0$, рівномірно відносно $x$ на кожному відрізку $[a,b] \subset [0,+\infty)$;

2) $\forall p \in \mathbb{Z}_+ \; \exists c = c(p) > 0\colon \; \|\Psi_{\Delta t}\|_p \le c$, де стала $c > 0$ не залежить від $\Delta t$.

Функція $G(t,x)$ диференційовна по $t$ у звичайному розумінні, тому внаслідок теореми про скінченні прирости маємо $\Psi_{\Delta t}(x) = \partial G(t+\theta\Delta t, x)/\partial t$, $0 < \theta < 1$; для зручності далі вважатимемо, що $0 < t < 1$. Отже,

$$D_x^{2\alpha}\Psi_{\Delta t}(x) = -c_\nu \int\limits_0^\infty a(\sigma)Q(t+\theta\Delta t,\sigma)D_x^{2\alpha}j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma, \qquad a(\sigma) = \sum_{i=1}^p a_i(\sigma).$$

Крім того,

$$D_x^{2\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\right) = -c_\nu \int\limits_0^\infty a(\sigma)Q(t,\sigma)D_x^{2\alpha}j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma.$$

Врахувавши нерівності $|D_x^{2\alpha}j_\nu(\sigma x)| \le b_\nu\sigma^{2\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$, $\sigma \ge 0$, а також умови, які задовольняють функції-символи $a_i$, $i \in \{1,\ldots,p\}$, знайдемо

$$\left|D_x^{2\alpha}\left(\Psi_{\Delta t}(x) - \frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\right)\right| \le c\int\limits_0^\infty a(\sigma)e^{-ta(\sigma)}|e^{-\theta\Delta t a(\sigma)} - 1|\sigma^{2\nu+2\alpha+1}d\sigma \le$$

$$\le c_1\int\limits_0^\infty a^2(\sigma)e^{-ta(\sigma)}\sigma^{2\nu+2\alpha+1}d\sigma \cdot |\Delta t| \le c_2|\Delta t|, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+,$$

сталі $c$, $c_1$, $c_2 > 0$ не залежать від $\Delta t$. Звідси вже випливає виконання умови 1.

Доведемо, що умова 2 також виконується. Для цього скористаємося нерівностями

$$\left|D_x^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\right)\right| \le c_\alpha\sum_{r=0}^\infty \tilde{\mu}^r(t+rT)^{\tilde{\beta}-\gamma_p/\gamma_1}((t+rt_1)^{\tilde{\beta}_0} + |x|)^{-(\omega_0+\alpha)}, \tag{11}$$

$$(t,x) \in \Omega, \alpha \in \mathbb{Z}_+, 0 < t < 1,$$

доведення яких проводиться за схемою доведення нерівностей (10). Врахувавши (11), для досить малих значень параметра $\Delta t$ таких, що $t + \theta\Delta t \ge t/2$, отримаємо нерівності

$$|D_x^{2\alpha}\Psi_{\Delta t}(x)| \le c_\alpha t^{-\gamma_p/\gamma_1}\sum_{r=0}^\infty \frac{\tilde{\mu}^r(r+1)}{((t/2)^{\tilde{\beta}_0} + |x|)^{\omega_0+2\alpha}} \le \begin{cases} \tilde{c}_\alpha|x|^{-(\omega_0+2\alpha)}, & |x| \ge 1, \\ \tilde{\tilde{c}}_\alpha, & |x| < 1, \end{cases}$$

де сталі $\tilde{c}_\alpha$, $\tilde{\tilde{c}}_\alpha > 0$ залежать від $t$, але не залежать від $\Delta t$. Тоді для довільного фіксованого $p \in \mathbb{Z}_+$ маємо

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{p} (\Lambda(x))^{\omega_0+2\alpha} |D_x^{2\alpha} \Psi_{\Delta t}(x)| \right\} \leq c_p,$$

де $c_p = c(p,t) > 0$. Отже, $\forall p \in \mathbb{Z}_+$ $\exists c_p > 0$: $\|\Psi_{\Delta t}\|_p \leq c_p$, причому стала $c_p > 0$ не залежить від $\Delta t$. Випадок $t \geq 1$ розглядається аналогічно.

Лему доведено.

Оскільки $G(t,\cdot)$ належить $\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1}$, то для довільної узагальненої функції $f \in (\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1})'$ має сенс формула $f * G(t,\cdot)$ (див. п. 1).

***Наслідок* 1.** *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot), \qquad t \in (0,T].$$

***Доведення.*** Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною маємо

$$f * G(t,x) = \langle f_\xi, T_x^\xi G(t,x)\rangle = \langle f_\xi, T_\xi^x G(t,\xi)\rangle.$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}[f * G(t+\Delta t,x) - f * G(t,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \left\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}[T_x^\xi G(t+\Delta t,x) - T_x^\xi G(t,x)]\right\rangle.$$

За лемою 1 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_x^\xi G(t+\Delta t,x) - T_x^\xi G(t,x)] \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} T_x^\xi G(t,x)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1}$, тому

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = \left\langle f_\xi, \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}[T_x^\xi G(t+\Delta t,x) - T_x^\xi G(t,x)]\right\rangle =$$

$$= \left\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t} T_x^\xi G(t,x)\right\rangle = \left\langle f_\xi, T_x^\xi \frac{\partial}{\partial t} G(t,x)\right\rangle = f * \frac{\partial}{\partial t} G(t,x),$$

що й потрібно було довести.

**Лема 2.** *У просторі $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1})'$ справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} G(t,\cdot) = \delta \tag{12}$$

(*тут $\delta$ — дельта-функція Дірака*).

***Доведення.*** Оскільки $G(t,\cdot)$ належить $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$ при кожному $t>0$, то $Q(t,\cdot)=F^{-1}_{B_\nu}[G(t,\cdot)]\in$ $\in\theta_{M,\rho_1}$ при кожному $t>0$. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Бесселя (прямого та оберненого) та функції $G(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра $t$ із значеннями у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$, співвідношення (12) замінимо еквівалентним граничним співвідношенням

$$\mu\lim_{t\to+0}F^{-1}_{B_\nu}[G(t,\cdot)]-\sum_{l=1}^{m}\mu_l\lim_{t\to t_l}F^{-1}_{B_\nu}[G(t,\cdot)]=F^{-1}_{B_\nu}[\delta] \tag{13}$$

у просторі $\theta'_{M,\rho_1}$. Врахувавши зображення функції $G$, співвідношення (13) запишемо у вигляді

$$\mu\lim_{t\to+0}Q(t,\cdot)-\sum_{l=1}^{m}\mu_l\lim_{t\to t_l}Q(t,\cdot)=1. \tag{14}$$

Для доведення (14) візьмемо довільну функцію $\psi\in\theta_{M,\rho_1}$ і на підставі теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега знайдемо

$$\mu\lim_{t\to+0}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle-\sum_{l=1}^{m}\mu_l\lim_{t\to t_l}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle=$$

$$=\mu\lim_{t\to+0}\int_0^\infty Q(t,\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma-\sum_{l=1}^{m}\mu_l\lim_{t\to t_l}\int_0^\infty Q(t,\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma=$$

$$=\int_0^\infty\left[\mu Q(0,\sigma)-\sum_{l=1}^{m}\mu_l Q(t_l,\sigma)\right]\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma=$$

$$=\int_0^\infty\left[\frac{\mu}{\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\left\{-t_k\sum_{i=1}^{p}a_i(\sigma)\right\}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{l=1}^{m}\mu_l\frac{\exp\left\{-t_l\sum_{i=1}^{p}a_i(\sigma)\right\}}{\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\left\{-t_k\sum_{i=1}^{p}a_i(\sigma)\right\}}\right]\times$$

$$\times\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma=\int_0^\infty\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma=\langle 1,\psi\rangle.$$

Звідси вже дістаємо, що співвідношення (14) виконується у просторі $\theta_{M,\rho_1}$, а отже, правильним є співвідношення (12).

Лему доведено.

Нехай $f$ належить $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1})'$. Якщо $f*\varphi\in\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$ $\forall\varphi\in\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$ і із співвідношення $\varphi_n\to 0$ при $n\to\infty$ за топологією простору $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$ випливає, що $f*\varphi_n\to 0$ при $n\to\infty$ за топологією простору $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$, то функціонал $f$ називається згортувачем у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$. Зауважимо, що оскільки $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$ — досконалий простір із диференційовною операцією узагальненого зсуву аргументу, то кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$ [20, с. 173]. Символом $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1,*})'$ позначатимемо клас узагальнених функцій з $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1})'$, які є згортувачами у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$ .

***Наслідок 2.*** *Нехай* $\omega(t,x) = f * G(t,x)$, $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1,*})'$, $(t,x) \in \Omega$. *Тоді у просторі* $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1})'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \omega(t,\cdot) = f. \tag{15}$$

***Доведення.*** Оскільки $f * G(t,x) = \langle f_\xi, T_x^\xi G(t,x)\rangle$, то з умови $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1,*})'$ та властивості неперервності $G(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра $t \in (0,T]$ із значеннями у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$ випливає неперервність $\omega(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра $t \in (0,T]$ із значеннями у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$. Тоді, врахувавши властивість неперервності перетворення $F^{-1}_{B_\nu}$ та формулу (див. [14])

$$F^{-1}_{B_\nu}[f * G] = F^{-1}_{B_\nu}[f] \cdot F^{-1}_{B_\nu}[G] = F^{-1}_{B_\nu}[f] \cdot Q(t,\cdot),$$

яка правильна для довільної узагальненої функції $f$ з класу $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1,*})'$, співвідношення (15) запишемо в еквівалентному вигляді

$$\mu \lim_{t\to+0} F^{-1}_{B_\nu}[\omega(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F^{-1}_{B_\nu}[\omega(t,\cdot)] =$$

$$= F^{-1}_{B_\nu}[f](\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot)) = F^{-1}_{B_\nu}[f]$$

(вказані співвідношення розглядаються у просторі $\theta'_{M,\rho_1}$). Врахувавши (14), прийдемо до (15).

Твердження доведено.

Функція $G$ є розв'язком рівняння (2). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} F_{B_\nu}[Q(t,\sigma)] = F_{B_\nu}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right].$$

З іншого боку,

$$\sum_{i=1}^{p} A_i G(t,x) = F_{B_\nu}\left[\sum_{i=1}^{p} a_i(\sigma) F^{-1}_{B_\nu}[G(t,x)]\right] =$$

$$= F_{B_\nu}\left[\sum_{i=1}^{p} a_i(\sigma) Q(t,\sigma)\right] = -F_{B_\nu}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right].$$

Звідси випливає, що $G$ задовольняє рівняння (2).

***Зауваження 1.*** Далі функцію $G$ називатимемо фундаментальним розв'язком $m$-точкової задачі для рівняння (2).

**3. Коректна розв'язність $m$-точкової задачі.** З наслідку 2 випливає, що для рівняння (2) $m$-точкову задачу можна сформулювати так. Розглянемо задачу про відшукання розв'язку рівняння (2), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, \tag{16}$$

де $f$ належить $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1,*})'$, границі в (16) розглядаються у просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1})'$, параметри $\mu,\ \mu_1,\ \ldots$ $\ldots,\ \mu_m,\ t_1,\ \ldots,\ t_m$ задовольняють ті ж умови, що і у випадку задачі (2), (3). Правильним є наступне твердження.

**Теорема .** *Задача* (2), (3) *коректно розв'язна. Розв'язок зображується формулою* $u(t,x) = f*G(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, *де* $G$ — *фундаментальний розв'язок* $m$*-точкової задачі для рівняння* (2), *при цьому* $u(t,\cdot)$ *належить* $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$ *при кожному* $t\in(0,T]$.

***Доведення.*** Насамперед переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (2). Справді (див. наслідок 1),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,x)) = f*\frac{\partial}{\partial t}G(t,x),$$

$$\sum_{i=1}^{p} A_i u(t,x) = F_{B_\nu}\left[\sum_{i=1}^{p} a_i(\sigma) F^{-1}_{B_\nu}[f*G(t,x)](\sigma)\right](x).$$

Оскільки $f$ — згортувач у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$, то

$$F^{-1}_{B_\nu}[f*G] = F^{-1}_{B_\nu}[f]\cdot F^{-1}_{B_\nu}[G] = F^{-1}_{B_\nu}[f]\cdot Q.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^{p} A_i u(t,x) = F_{B_\nu}\left[\sum_{i=1}^{p} a_i(\sigma) Q(t,\sigma) F^{-1}_{B_\nu}[f](\sigma)\right] =$$

$$= -F_{B_\nu}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)F^{-1}_{B_\nu}[f]\right] = -F_{B_\nu}\left[F^{-1}_{B_\nu}\left[\frac{\partial}{\partial t}G\right]\cdot F^{-1}_{B_\nu}[f]\right] =$$

$$= -F_{B_\nu}\left[F^{-1}_{B_\nu}\left[f*\frac{\partial G}{\partial t}\right]\right] = -f*\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$ задовольняє рівняння (2). З наслідку 2 випливає, що $u$ задовольняє умову (16) у вказаному сенсі. Зазначимо також, що $u$ неперервно залежить від функції $f\in(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1,*})'$, оскільки операція згортки має властивість неперервності.

Залишилося переконатися в тому, що задача (2), (16) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i=1}^{p} A_i^* v = 0, \qquad (t,x)\in[0,t_0)\times\mathbb{R}\equiv\Omega', \quad 0\le t<t_0\le T, \tag{17}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \qquad \psi\in(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1,*})', \tag{18}$$

де $A_i^* = A_i$ — звуження спряженого оператора до оператора $A_i$ на простір $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}\subset(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1})'$, $i\in\{1,\ldots,p\}$. Умову (18) розуміємо в слабкому сенсі. Задача Коші (17), (18) є коректно розв'язною; при цьому $v(t,\cdot)$ належить $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$ при кожному $t\in[0,t_0)$ (див. [14]).

Нехай $Q^t_{t_0}\colon (\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1,*})' \to \Phi^\nu_{\beta,\gamma_1}$ — оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in (\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1,*})'$ розв'язок задачі (17), (18). Оператор $Q^t_{t_0}$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних $t$ і $t_0$ таких, що $0 \le t < t_0 \le T$; при цьому

$$\frac{dQ^t_{t_0}\psi}{dt} - \sum_{i=1}^p A_i^*\psi = 0, \quad \lim_{t\to t_0} Q^t_{t_0}\psi = \psi$$

(границя розглядається у просторі $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1})'$).

Далі розв'язок $u(t,x)$ задачі (2), (16) розумітимемо як регулярний функціонал з простору $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1,*})' \supset \Phi^\nu_{\beta,\gamma_1}$. Доведемо, що задача (2), (16) має єдиний розв'язок у просторі $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1,*})'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння при нульовій граничній функції може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$. Застосуємо функціонал $u(t,x)$ до функції $Q^t_{t_0}g \in \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma_1} \in (\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1,*})'$, де $g$ — довільно фіксований елемент простору $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1,*})'$, $0 < t < t_0 \le T$. Диференціюючи по $t$ і використовуючи рівняння (2), (17), знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}g\rangle = \Big\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0}g\Big\rangle + \Big\langle u, \frac{\partial}{\partial t}Q^t_{t_0}g\Big\rangle =$$

$$= -\Big\langle \sum_{i=1}^p A_i u, Q^t_{t_0}g\Big\rangle + \Big\langle u, \sum_{i=1}^p A_i^* Q^t_{t_0}g\Big\rangle =$$

$$= -\Big\langle \sum_{i=1}^p A_i u, Q^t_{t_0}g\Big\rangle + \Big\langle \sum_{i=1}^p A_i u, Q^t_{t_0}g\Big\rangle = 0,$$

$$g \in (\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1,*})', \quad 0 < t < t_0 \le T.$$

Звідси випливає, що $\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}g\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення $\lim_{t\to t_0}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}g\rangle = \langle u(t_0,\cdot), g\rangle = \mathrm{const} \equiv c$ у довільній точці $t_0 \in (0,T]$. Отже, якщо в (16) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot), g\rangle - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k}\langle u(t,\cdot), g\rangle = c\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\right) = 0,$$

тобто $c = 0$. Таким чином, $\langle u(t_0,\cdot), g\rangle = 0$ для довільного елемента $g \in (\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1,*})' \supset \Phi^\nu_{\beta,\gamma_1}$, тобто $u(t_0,x)$ — нульовий функціонал на $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1,*})'$. Оскільки $t_0 \in (0,T]$ і $t_0$ вибрано довільним чином, то $u(t,\cdot) \equiv 0$ для всіх $t \in (0,T]$.

Теорему доведено.

***Зауваження* 2.** Функція $G(t,\cdot)$ — фундаментальний розв'язок $m$-точкової задачі (2), (16), як абстрактна функція параметра $t$ із значеннями у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1}$, є неперервною функцією цього параметра (див. лему 1). Звідси та з означення згортувача у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1}$ випливає, що граничні співвідношення

$$u(t,\cdot) = f * G(t,\cdot) \underset{t\to t_i}{\longrightarrow} f * G(t_i,\cdot) = u(t_i,\cdot), \quad t_i \in (0,T], i \in \{1,\ldots,m\},$$

справджуються у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1}$, оскільки $G(t,\cdot) \to G(t_i,\cdot)$ при $t \to t_i$ за топологією простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1}$. Зокрема, звідси дістаємо, що $u(t,\cdot) \to u(t_i,\cdot)$ при $t \to t_i$, $t_i \in (0,T]$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Вказану збіжність у співвідношенні (16) значно погіршує перший доданок; це пояснюється тим, що для функції $G(t,\cdot)$ точка $t=0$ є особливою, при цьому $G(t,\cdot)\to\left(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\right)^{-1}\delta$ при $t\to+0$ у просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1})'$. При доведенні цієї властивості використовується рівність

$$\int\limits_0^{\infty}G(t,x)x^{2\nu+1}dx=\left(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\right)^{-1},\quad t\in(0,T],$$

яка випливає з формули

$$Q(t,\sigma)=\int\limits_0^{\infty}G(t,x)j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx$$

при $\sigma=0$, оскільки $j_\nu(0)=1$, $a_1(0)=a_2(0)=\ldots=a_p(0)=0$. Граничне співвідношення

$$u(t,\cdot)=f*G(t,\cdot)\underset{t\to+0}{\longrightarrow}f*\left(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\right)^{-1}\delta=\left(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\right)^{-1}f$$

справджується у просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1})'$. Однак за певних обмежень на граничну узагальнену функцію $f$ можна отримати локальне покращення збіжності згортки $f*G(t,\cdot)$ при $t\to+0$, а саме, якщо $f$ збігається на відкритій множині $Q\subset\mathbb{R}$ з функцією $g$, яка є мультиплікатором у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$ (тобто $f$ на $Q$ збігається з гладкою функцією), то $u(t,x)\to g(x)$ при $t\to+0$ у кожній точці довільного відрізка $[a,b]\subset Q$. Звідси вже випливає, що за вказаних обмежень граничне співвідношення

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,x)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}u(t,x)=g(x)$$

справджується у кожній точці відрізка $[a,b]\subset Q$.


1. *Нахушев А. М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 1. – С. 92 – 101.
2. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 77 – 81.
3. *Майков А. Р., Поезд А. Д., Якунин С. А.* Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волновых систем // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1990. – **30**, № 8. – С. 1267 – 1271.
4. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
5. *Белавин И. А., Капица С. П., Курдюмов С. П.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1988. – **38**, № 6. – С. 885 – 902.
6. *Bouzinab A., Arino O.* On the existence and uniqueness for an age-dependent population model with nonlinear growth // Facta Univ. Ser. Math. Inf. – 1993. – **8**. – P. 55 – 68.
7. *Cannon I. R., J. van der Hoek.* Diffusion subject to the specification of mass // J. Math. Anal. and Appl. – 1986. – **115**, № 2. – P. 517 – 529.
8. *Song J.* Some developments in mathematical demography and their application to the People's Republic of China // Theor. Pop. Biol. – 1982. – **22**, № 3. – P. 382 – 391.

9. *Дезин А. А.* Операторы с первой производной по „времени” и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – **31**, № 1. – С. 61 – 86.
10. *Мамян А. Х.* Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 292 – 296.
11. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
12. *Городецький В. В., Ленюк О. М.* Двоточкова задача для одного класу еволюційних рівнянь // Мат. студ. – 2007. – **28**, № 2. – С. 175 – 182.
13. *Городецький В. В., Спіжавка Д. І.* Багатоточкова задача для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами // Доп. НАН України. – 2009. – № 12. – С. 7 – 12.
14. *Мартинюк О. В., Городецький В. В.* Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь з необмеженими за часом коефіцієнтами // Доп. НАН України. – 2012. – № 2. – С. 19 – 23.
15. *Мартинюк О. В.* Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. I // Математичне та комп’ютерне моделювання. Фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Поділ. нац. ун-т, 2011. – Вип. 5. – С. 179 – 192.
16. *Мартинюк О. В.* Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. II // Математичне та комп’ютерне моделювання. Фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Поділ. нац. ун-т, 2012. – Вип. 6. – С. 162 – 176.
17. *Левитан Б. И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, вып. 2. – С. 102 – 143.
18. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Мат. сб. – 1955. – **36**, № 2. – С. 299 – 310.
19. *Корн Т., Корн Г.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
20. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

Одержано 05.06.12