

АСИМПТОТИКА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n -ГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Existence conditions and asymptotic (as $t \uparrow \omega$ ($\omega \leq +\infty$)) representations are obtained for one class of monotone solutions of an n th-order differential equation whose right-hand side contains a sum of terms with regularly varying nonlinearities.

Встановлено умови існування та асимптотичні при $t \uparrow \omega$ ($\omega \leq +\infty$) зображення одного класу монотонних розв'язків диференціального рівняння n -го порядку, що містить у правій частині суму доданків із правильно змінними нелінійностями.

1. Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}), \quad (1.1)$$

где $n \geq 2$, $\alpha_k \in \{-1; 1\}$, $p_k: [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$, $k = \overline{1, m}$, — непрерывные функции, $\varphi_{kj}: \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$, $k = \overline{1, m}$; $j = \overline{0, n-1}$, — непрерывные и правильно меняющиеся при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$ функции порядков σ_{kj} , $-\infty < a < \omega \leq +\infty^1$, Δ_{Y_j} — односторонняя окрестность Y_j , Y_j равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Согласно определению правильно меняющейся функции (см. [1, с. 9, 10], гл. 1, п. 1.1) имеют место представления

$$\varphi_{kj}(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_{kj}} L_{kj}(y^{(j)}), \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (1.2)$$

где $L_{kj}: \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ — непрерывные и медленно меняющиеся при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$ функции, т. е. такие, для которых при любом $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{L_{kj}(\lambda y^{(j)})}{L_{kj}(y^{(j)})} = 1, \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (1.3)$$

Кроме того, известно (см. [1, с. 10–15], гл. 1, п. 1.2), что предельные соотношения (1.3) выполняются равномерно по λ на любом промежутке $[c, d] \subset]0, +\infty[$ (свойство M_1) и существуют непрерывно дифференцируемые медленно меняющиеся при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$ функции $L_{0kj}: \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ (свойство M_2) такие, что

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{L_{kj}(y^{(j)})}{L_{0kj}(y^{(j)})} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{y^{(j)} L'_{0kj}(y^{(j)})}{L_{0kj}(y^{(j)})} = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (1.4)$$

В силу (1.2) и указанных свойств медленно меняющихся функций дифференциальное уравнение (1.1) является асимптотически близким при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$, $j = \overline{0, n-1}$, к уравнению со степенными нелинейностями

¹ Считаем, что $a > 1$ при $\omega = +\infty$ и $\omega - 1 < a < \omega$ при $\omega < +\infty$.

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}|^{\sigma_{kj}}.$$

В этом уравнении нелинейности $|y^{(j)}|^{\sigma_{kj}}$ являются правильно меняющимися функциями как при $y^{(j)} \rightarrow 0$, так и при $y^{(j)} \rightarrow \pm\infty$. Асимптотическое поведение решений этого уравнения исследовано в работах [2–7].

В настоящей статье, отказываясь от предположения, что функции $\varphi_{kj}(y^{(j)})$, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{0, n-1}$, являются степенными, предполагаем, что они близки к степенным в окрестностях точек Y_j в смысле определения правильно меняющихся функций. При таких нелинейностях асимптотика решений исследовалась (см. работы [8–18]) лишь для следующих трех частных случаев уравнения (1.1):

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \varphi(y), \quad y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_1(y) \varphi_2(y'), \quad y'' = \sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \varphi_{k0}(y) \varphi_{k1}(y'),$$

причем для двух последних из этих уравнений при более жестких, чем в (1.1), исходных ограничениях на коэффициенты и нелинейности.

Решение y уравнения (1.1) будем называть $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решением, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет условиям

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (1.5)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n)}(t)y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0. \quad (1.6)$$

Целью настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий существования $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений уравнения (1.1) в особых случаях, когда $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_0 = \pm\infty$, а также асимптотики при $t \uparrow \omega$ таких решений и их производных до порядка $n - 1$ включительно.

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases} \quad \beta = \text{sign } \pi_\omega(t). \quad (1.7)$$

В силу результатов из [19] изучаемые решения уравнения (1.1) имеют следующие априорные асимптотические свойства.

Лемма 1.1. Пусть $y: [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решение уравнения (1.1). Тогда:

1) если $\lambda_0 = 1$, то

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{y''(t)}{y'(t)} \sim \dots \sim \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \pm\infty; \quad (1.8)$$

2) если $\lambda_0 = \pm\infty$, то имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические соотношения

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-k}}{(n-k)!} y^{(n-1)}(t), \quad k = 1, \dots, n-1, \quad y^{(n)}(t) = o\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right). \quad (1.9)$$

2. Формулировка основных результатов. Чтобы сформулировать установленные для уравнения (1.1) теоремы, введем некоторые вспомогательные обозначения и одно определение.

Выберем числа $b_j \in \Delta_{Y_j}$, $j = \overline{0, n-1}$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$|b_j| < 1 \quad \text{при} \quad Y_j = 0, \quad b_j > 1 \quad (b_j < -1) \quad \text{при} \quad Y_j = +\infty \quad (Y_j = -\infty), \quad (2.1)$$

и положим

$$\Delta_{Y_j}(b_j) = \begin{cases} [b_j, Y_j[, & \text{если } \Delta_{Y_j} \text{ — левая окрестность } Y_j, \\]Y_j, b_j], & \text{если } \Delta_{Y_j} \text{ — правая окрестность } Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (2.2)$$

Из определения $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решения уравнения (1.1) ясно, что каждое такое решение и все его производные до порядка n включительно отличны от нуля на некотором промежутке $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$, причем на этом промежутке $(j+1)$ -я ($j \in \{0, \dots, n-1\}$) производная данного решения положительна, если Δ_{Y_j} — левая окрестность Y_j , и отрицательна — в противном случае. Учитывая этот факт и выбор b_j , вводим числа

$$\nu_{0j} = \text{sign } b_j, \quad \nu_{1j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta_{Y_j} \text{ — левая окрестность } Y_j, \\ -1, & \text{если } \Delta_{Y_j} \text{ — правая окрестность } Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (2.3)$$

определяющие соответственно знаки j - и $(j+1)$ -й производных $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решения. При этом заметим, что для $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решения уравнения (1.1) выполняются условия

$$\nu_{0j}\nu_{1j} < 0, \quad \text{если } Y_j = 0, \quad \nu_{0j}\nu_{1j} > 0, \quad \text{если } Y_j = \pm\infty, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (2.4)$$

Далее, введем вспомогательные обозначения, положив

$$\begin{aligned} \gamma_k &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{kj}, & \mu_{kn} &= \sum_{j=0}^{n-2} \sigma_{kj}(n-j-1), & k &= \overline{1, m}, \\ J_{k0}(t) &= \int_{A_{k0}}^t p_k(s) ds, & J_{k00}(t) &= \int_{A_{k00}}^t J_{k0}(s) ds, & k &= \overline{1, m}, \\ J_{kn}(t) &= \int_{A_{kn}}^t p_k(s) |\pi_\omega(s)|^{\mu_{kn}} \prod_{j=0}^{n-2} L_{kj} (\nu_{0j} |\pi_\omega(s)|^{n-j-1}) ds, & k &= \overline{1, m}, \end{aligned}$$

где каждый из пределов интегрирования A_{km} , A_{kmm} , $m \in \{0, 1\}$, выбирается равным точке $a_0 \in [a, \omega[$ (справа от которой, т. е. при $t \in [a_0, \omega[$, подынтегральная функция непрерывна), если при этом значении предела интегрирования соответствующий интеграл стремится к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, и равным ω , если при таком значении предела интегрирования он стремится к нулю при $t \uparrow \omega$.

Определение 2.1. Будем говорить, что медленно меняющаяся при $z \rightarrow Z_0$ функция $L : \Delta_{Z_0} \rightarrow]0, +\infty[$, где Z_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$ и Δ_{Z_0} — односторонняя окрестность Z_0 , удовлетворяет условию S_0 , если

$$L\left(\nu e^{[1+o(1)] \ln |z|}\right) = L(z)[1 + o(1)] \quad \text{при } z \rightarrow Z_0 \quad (z \in \Delta_{Z_0}),$$

где $\nu = \text{sign } z$.

Замечание 2.1. Если медленно меняющаяся при $z \rightarrow Z_0$ функция $L : \Delta_{Z_0} \rightarrow]0, +\infty[$ удовлетворяет условию S_0 , то для любой медленно меняющейся при $z \rightarrow Z_0$ функции $l : \Delta_{Z_0} \rightarrow]0, +\infty[$

$$L(zl(z)) = L(z)[1 + o(1)] \quad \text{при } z \rightarrow Z_0 \quad (z \in \Delta_{Z_0}).$$

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из теоремы о представлении (см. [1, с. 10], гл. 1, § 1.2) медленно меняющейся функции l и свойства M_1 функции L .

Замечание 2.2 (см. [12]). Если медленно меняющаяся при $z \rightarrow Z_0$ функция $L : \Delta_{Z_0} \rightarrow]0, +\infty[$ удовлетворяет условию S_0 , а функция $y : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}$ непрерывно дифференцируема и такая, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} [r + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

где r — отличная от нуля вещественная постоянная, ξ — непрерывно дифференцируемая в некоторой левой окрестности ω вещественная функция, для которой $\xi'(t) \neq 0$, то

$$L(y(t)) = L(\nu |\xi(t)|^r) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

где $\nu = \text{sign } y(t)$ в левой окрестности ω .

Замечание 2.3. Если медленно меняющаяся при $z \rightarrow Z_0$ функция $L : \Delta_{Z_0} \rightarrow]0, +\infty[$ удовлетворяет условию S_0 , а функция $r : \Delta_{Z_0} \times K \rightarrow \mathbb{R}$, где K — компакт в \mathbb{R}^m , такова, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} r(z, v) = 0 \quad \text{равномерно по } v \in K,$$

то

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} \frac{L(\nu e^{[1+r(z,v)] \ln |z|})}{L(z)} = 1 \quad \text{равномерно по } v \in K, \quad \text{где } \nu = \text{sign } z.$$

В самом деле, если бы это было не так, то существовали бы последовательность $\{v_n\} \in K$ и последовательность $\{z_n\} \in \Delta_{Z_0}$, сходящаяся к Z_0 , такие, что выполнялось бы неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{L(\nu e^{[1+r(z_n, v_n)] \ln |z_n|})}{L(z_n)} - 1 \right| > 0.$$

При этом ясно, что существует функция $v : \Delta_{Z_0} \rightarrow K$ такая, что $v(z_n) = v_n$. Для этой функции, очевидно, $\lim_{\substack{z \rightarrow Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} r(z, v(z)) = 0$ и поэтому

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} \frac{L(\nu e^{[1+r(z, v(z))] \ln |z|})}{L(z)} = 1,$$

что противоречит приведенному выше неравенству.

Теорема 2.1. Пусть для некоторого $s \in \{1, \dots, m\}$ выполняется неравенство $\gamma_s \neq 0$ и существует непрерывная функция $b_s: [a, \omega[\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такая, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t) b_s(t)| = +\infty \quad \text{и} \quad \limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta_s \int_a^t b_s(\tau) d\tau} < \beta_s(\gamma_k - \gamma_s) \quad (2.5)$$

при всех $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$,

где $\beta_s = \text{sign } b_s(t)$. Тогда для существования $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$ -решений дифференциального уравнения (1.1), для которых

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim b_s(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \quad (2.6)$$

необходимо, а если алгебраическое относительно ρ уравнение

$$(1 + \rho)^n = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{sj} (1 + \rho)^j \quad (2.7)$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы

$$b_s(t) \sim \frac{p_s(t)}{\gamma_s J_{s0}(t)}, \quad \frac{p_s(t)}{J_{s0}(t)} \sim \frac{J_{s0}(t)}{J_{s00}(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \quad (2.8)$$

$$\nu_{0j} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s} = Y_j, \quad j = \overline{0, n-1},$$

выполнялись неравенства (2.4) и неравенства

$$\alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s J_{s0}(t) > 0, \quad \nu_{0j} \nu_{0n-1} (\gamma_s J_{s0}(t))^{n-j-1} > 0, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[. \quad (2.9)$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y^{(j)}(t) = \left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) [1 + o(1)], \quad j = \overline{0, n-2}, \quad (2.10)$$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{sj} \left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) \right)} = \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s J_{s0}(t) \left| \frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s00}(t)} \right|^{\mu_{sn}} [1 + o(1)], \quad (2.11)$$

причем решений с такими представлениями существует l -параметрическое семейство, если среди корней алгебраического уравнения (2.7) имеется l корней, действительные части которых имеют знак, противоположный знаку $\alpha_s \nu_{0n-1}$.

Замечание 2.4. Алгебраическое уравнение (2.7) заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если $\sum_{j=0}^{n-2} |\sigma_{sj}| < |1 - \sigma_{sn-1}|$.

Замечание 2.5. В силу второго из условий (2.8) и свойства M_1 медленно меняющихся функций в представлениях (2.10) и (2.11) отношение $\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}$ может быть заменено на $\frac{\gamma_s J_{s0}(t)}{p_s(t)}$.

Замечание 2.6. Из второго условия в (2.8) также следует, что функции J_{s0}, J_{s00} являются (см. [1]) быстро меняющимися при $t \uparrow \omega$ и имеет место соотношение

$$\ln p_s(t) \sim \ln |J_{s0}(t)| \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому функция p_s не может быть правильно меняющейся при $t \uparrow \omega$.

В теореме 2.1 асимптотические представления для $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$ -решений уравнения (1.1) даются в неявном виде. Частично данную проблему решает следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть выполняются условия теоремы 2.1 и медленно меняющиеся функции $L_{sj}, j = \overline{0, n-1}$, удовлетворяют условию S_0 . Тогда для каждого $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$ -решения со свойством (2.6) уравнения (1.1) имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y^{(j)}(t) \sim \nu_{0n-1} \left(\frac{\gamma_s J_{s0}(t)}{p_s(t)} \right)^{n-j-1} \left| \gamma_s J_{s0}(t) \left| \frac{\gamma_s J_{s0}(t)}{p_s(t)} \right|^{\mu_{sn}} \prod_{j=0}^{n-1} L_{sj} \left(\nu_{0j} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s} \right) \right|^{1/\gamma_s}, \quad (2.12)$$

$$j = \overline{0, n-1}.$$

Для $P_\omega(Y_1, \dots, y_{n-1}, \pm\infty)$ -решений уравнения (1.1) имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.3. Пусть для некоторого $s \in \{1, \dots, m\}$ выполняются неравенство $\gamma_s \neq 0$, условия

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-1) \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\} \quad (2.13)$$

и медленно меняющиеся при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$ функции $L_{sj}, j = \overline{0, n-2}$, удовлетворяют условию S_0 . Тогда для существования $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решений уравнения (1.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства (2.4), неравенства

$$\nu_{0j} \nu_{0n-1} \pi_\omega^{n-j-1}(t) > 0, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s J_{sn}(t) > 0 \quad (2.14)$$

в некоторой левой окрестности ω и условия

$$\nu_{0j} \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} = Y_j, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad \nu_{0n-1} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{sn}(t)|^{1/\gamma_s} = Y_{n-1},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{sn}(t)}{J_{sn}(t)} = 0. \quad (2.15)$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y^{(j-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j}}{(n-j)!} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)], \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (2.16)$$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{L_{sn-1}(y^{(n-1)}(t))} = \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_{sj}} J_{sn}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (2.17)$$

причем таких решений в случае, когда $\omega = +\infty$, существует n -параметрическое семейство, если $J_{sn}(t) > 0$ при $t \in [a_0, \omega[$, и $(n-1)$ -параметрическое семейство, если $J_{sn}(t) < 0$ при $t \in [a_0, \omega[$, а в случае, когда $\omega < +\infty$ и $J_{sn}(t) > 0$ при $t \in [a_0, \omega[$, существует однопараметрическое семейство таких решений.

Теорема 2.4. Пусть выполняются условия теоремы 2.3 и медленно меняющиеся при $y^{(n-1)} \rightarrow Y_{n-1}$ функции L_{sn-1} удовлетворяют условию S_0 . Тогда для каждого $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решения уравнения (1.1) имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.16) и

$$y^{(n-1)}(t) = \nu_{0n-1} \left| \gamma_s \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_{sj}} J_{sn}(t) L_{sn-1} \left(\nu_{0n-1} |J_{sn}(t)|^{1/\gamma_s} \right) \right|^{1/\gamma_s} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (2.18)$$

3. Доказательства теорем. Доказательство теоремы 2.1. Необходимость. Пусть $y: [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$ -решение уравнения (1.1), для которого имеет место асимптотическое соотношение (2.6). Тогда существует $t_1 \in [a, \omega[$ такое, что $y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j}(b_j)$, $j = \overline{0, n-1}$, при $t \in [t_1, \omega[$, выполняются неравенства (2.4) и в силу леммы 1.1, а также первого из условий (2.5)

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} \sim b_s(t) \quad \text{при } k = \overline{1, n} \quad \text{и} \quad \beta \beta_s \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = +\infty. \quad (3.1)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\ln |y^{(k-1)}(t)| \sim \int_a^t b_s(\tau) d\tau \rightarrow \pm\infty, \quad k = \overline{1, n}, \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.2)$$

Учитывая эти асимптотические соотношения, представления (1.2) и условия

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{\ln L_{kj}(y^{(j)})}{\ln |y^{(j)}|} = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (3.3)$$

которые выполняются в силу свойств медленно меняющихся функций (см. [1, с. 24], гл. 1, п. 1.5), находим

$$\ln \varphi_{kj} \left(y^{(j)}(t) \right) = \sigma_{kj} \ln |y^{(j)}(t)| + \ln L_{kj}(y^{(j)}(t)) = [\sigma_{kj} + o(1)] \ln |y^{(j)}(t)| =$$

$$= [\sigma_{kj} + o(1)] \int_a^t b_s(\tau) d\tau, \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому для любого $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$

$$\begin{aligned} \ln \left[\frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} \right] &= \ln \frac{p_k(t)}{p_s(t)} + \sum_{j=0}^{n-1} [\ln \varphi_{kj}(y^{(j)}(t)) - \ln \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))] = \\ &= \ln \frac{p_k(t)}{p_s(t)} + \int_a^t b_s(\tau) d\tau \sum_{j=0}^{n-1} [\sigma_{kj} - \sigma_{sj} + o(1)] = \\ &= \left| \int_a^t b_s(\tau) d\tau \right| \left[\frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta_s \int_a^t b_s(\tau) d\tau} + \beta_s(\gamma_s - \gamma_k) + o(1) \right] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Поскольку выражение, стоящее в этом соотношении справа, в силу (3.2) и (2.5) стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$, то

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} = 0 \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}. \quad (3.4)$$

Тогда из (1.1) следует, что для данного решения имеет место асимптотическое соотношение

$$y^{(n)}(t) = \alpha_s p_s(t) [1 + o(1)] \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t)) \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.5)$$

Согласно (1.2) и свойству M_2 медленно меняющихся функций существуют непрерывно дифференцируемые правильно меняющиеся при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$ функции $\varphi_{0sj}: \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ порядков σ_{sj} , $j = \overline{0, n-1}$, такие, что

$$\varphi_{sj}(y^{(j)}) \sim \varphi_{0sj}(y^{(j)}) \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad \lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{y^{(j)} \varphi'_{0sj}(y^{(j)})}{\varphi_{0sj}(y^{(j)})} = \sigma_{sj}, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (3.6)$$

В силу (3.6) и (3.1)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{y^{(k-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} \right)' = \\ &= \frac{y^{(k)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} \left[1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(k-1)}(t) y^{(j+1)}(t)}{y^{(k)}(t) y^{(j)}(t)} \frac{y^{(j)}(t) \varphi'_{0sj}(y^{(j)}(t))}{\varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{y^{(k)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} [\gamma_s + o(1)], \quad k = 1, \dots, n, \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.7)$$

Отсюда при $k = n$ следует, что (3.5) может быть представлено в виде

$$\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} \right)' = \alpha_s \gamma_s p_s(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t , получаем

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} = C + \alpha_s \gamma_s J_{s0}(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

где C — некоторая вещественная постоянная.

В случае, когда в функции J_{s0} предел интегрирования $A_{s0} = a$, $J_{s0}(t) \rightarrow +\infty$ при $t \uparrow \omega$ и полученное соотношение представимо в виде

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} = \alpha_s \gamma_s J_{s0}(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.8)$$

Покажем, что в случае $A_{s0} = \omega$, когда $J_{s0}(t) \rightarrow 0$ при $t \uparrow \omega$, постоянная $C = 0$. Предположим противное, т. е. что в этом случае $C \neq 0$. Тогда

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} = C + o(1) \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

но это невозможно, так как

$$\ln \left| \frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} \right| = \int_a^t b_s(\tau) d\tau [\gamma_s + o(1)] \rightarrow \pm\infty \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Значит, при $A_{s0} = \omega$ также имеет место представление (3.8).

Аналогично из (3.8) с использованием (3.7) при $k = n - 1$ получим

$$\frac{y^{(n-2)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} = \alpha_s \gamma_s^2 J_{s00}(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.9)$$

Из (3.5), (3.8) и (3.9) с учетом (3.6) имеем

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{p_s(t)}{\gamma_s J_{s0}(t)} [1 + o(1)], \quad \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} = \frac{J_{s0}(t)}{\gamma_s J_{s00}(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому в силу (1.8) и (2.6) выполняются условия (2.8) и согласно тождествам

$$y^{(j)}(t) = \frac{y^{(j)}(t)}{y^{(j+1)}(t)} \cdots \frac{y^{(n-2)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} y^{(n-1)}(t), \quad j = \overline{0, n-2},$$

имеют место асимптотические представления (2.10). Кроме того, из (3.8) и (2.10) следует, что выполняются неравенства (2.9).

Используя теперь приведенные выше тождества, представления (2.10) и свойство M_1 медленно меняющихся при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$ функций $L_{0sj}(y^{(j)}) = \frac{\varphi_{0sj}(y^{(j)})}{|y^{(j)}|^{\sigma_{sj}}}$, $j = \overline{0, n-1}$, находим

$$\begin{aligned} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t)) &= |y^{(j)}(t)|^{\sigma_{sj}} L_{0sj}(y^{(j)}(t)) \sim \\ &\sim \left| \left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) \right|^{\sigma_{sj}} L_{0sj} \left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) [1 + o(1)] \right) \sim \\ &\sim \left| \frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right|^{(n-j-1)\sigma_{sj}} |y^{(n-1)}(t)|^{\sigma_{sj}} L_{0sj} \left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) \right), \\ & \qquad \qquad \qquad j = \overline{0, n-1}, \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

В силу этих соотношений из (3.8) получаем представление

$$\frac{|y^{n-1}(t)|^{\gamma_s} \left| \frac{J_{s0}(t)}{\gamma_s J_{s00}(t)} \right|^{\mu_{sn}}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj} \left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) \right)} = \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s J_{s0}(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

из которого с учетом первых из соотношений (1.4) следует представление (2.11).

Достаточность. Пусть выполняются условия (2.4), (2.6), (2.8), (2.9) и алгебраическое уравнение (2.7) не имеет корней с нулевой действительной частью. Тогда в силу условий (2.5), (2.8) и (2.9) также выполняются неравенства

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\gamma_s [\ln p_k(t) - \ln p_s(t)]}{\alpha_s \nu_{0n-1} \ln |J_{s0}(t)|} < \alpha_s \nu_{0n-1} (\gamma_k - \gamma_s) \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}. \quad (3.10)$$

Покажем, что в данном случае существуют $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$ -решения уравнения (1.1), допускающие при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.10), (2.11), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Сначала рассмотрим соотношение

$$\frac{|Y|^{\gamma_s}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj} \left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} Y \right)} = Q_s(t) (1 + v_n), \quad (3.11)$$

где $L_{0sj} : \Delta_{Y_j}(b_j) \rightarrow]0, +\infty[$, $j = \overline{0, n-1}$, — непрерывно дифференцируемые медленно меняющиеся при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$ функции, удовлетворяющие условиям (1.4) (при $k = s$), существующие в силу свойства M_2 медленно меняющихся функций, и

$$Q_s(t) = \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s J_{s0}(t) \left| \frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right|^{\mu_{sn}}.$$

Положим

$$d = \frac{1}{2|\gamma_s|}, \quad \mathbb{R}_d = \{z \in \mathbb{R}: |z| \leq d\}, \quad \mathbb{R}_{1/2} = \left\{v_n \in \mathbb{R}: |v_n| \leq \frac{1}{2}\right\}$$

и покажем, что соотношение (3.11) однозначно определяет заданную на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2}$, $t_0 \in [a, \omega[$, непрерывно дифференцируемую неявную функцию $Y = Y(t, v_n)$ вида

$$Y(t, v_n) = \nu_{0n-1} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s + z(t, v_n)}, \quad (3.12)$$

где функция z такова, что

$$\begin{aligned} |z(t, v_n)| &\leq d \quad \text{при} \quad (t, v_n) \in [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2}, \\ \lim_{t \uparrow \omega} z(t, v_n) &= 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{1/2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Полагая в (3.11)

$$Y = \nu_{0n-1} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s + z} \quad (3.14)$$

и затем логарифмируя полученное при этом соотношение, после элементарных преобразований находим

$$z = a(t) + b(t, v_n) + Z(t, z), \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\gamma_s} \left(\frac{\ln Q_s(t)}{\ln |J_{s0}(t)|} - 1 \right), \quad b(t, v_n) = \frac{\ln(1 + v_n)}{\gamma_s \ln |J_{s0}(t)|}, \\ Z(t, z) &= \frac{1}{\gamma_s \ln |J_{s0}(t)|} \sum_{j=0}^{n-1} \ln L_{0s} \left(\nu_{0n-1} \left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s + z} \right). \end{aligned}$$

В силу последних из неравенств (2.9), а также второго и третьего из условий (2.8)

$$\begin{aligned} \nu_{0n-1} \lim_{t \uparrow \omega} \left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s + z} &= \nu_{0j} \lim_{t \uparrow \omega} \left| \frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right|^{n-j-1} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s + z} = \\ &= \nu_{0j} \lim_{t \uparrow \omega} \exp \left(\ln |J_{s0}(t)| \left[\frac{1}{\gamma_s} + z + (n-j-1) \left(\frac{\ln |\gamma_s J_{s00}(t)|}{\ln |J_{s0}(t)|} - 1 \right) \right] \right) = \\ &= \nu_{0j} \lim_{t \uparrow \omega} \exp \left(\ln |J_{s0}(t)| \left[\frac{1}{\gamma_s} + z + o(1) \right] \right) = \nu_{0j} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s} = Y_j, \end{aligned}$$

$$j = \overline{0, n-1}, \quad \text{при} \quad |z| \leq d.$$

Поэтому правая часть в (3.15) непрерывно дифференцируема на множестве $[t_1, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2} \times \mathbb{R}_d$, где t_1 — некоторое число из промежутке $[a, \omega[$.

Кроме того, в силу второго и третьего из условий (2.8), а также вторых из условий (1.4) и условий (3.3) (при $k = s$) имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} a(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} b(t, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по } v_n \in \mathbb{R}_{1/2}, \quad (3.16)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} Z(t, z) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\partial Z(t, z)}{\partial z} = 0 \quad \text{равномерно по } z \in \mathbb{R}_d. \quad (3.17)$$

Согласно этим условиям существует число $t_2 \in [t_1, \omega[$ такое, что на множестве $[t_2, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2} \times \mathbb{R}_d$ выполняются неравенство

$$|a(t) + b(t, v_1, v_2) + Z(t, z)| \leq d \quad (3.18)$$

и условие Липшица

$$|Z(t, z_1) - Z(t, z_2)| \leq \frac{1}{2} |z_1 - z_2| \quad \text{при } t \in [t_2, \omega[\quad \text{и } z_1, z_2 \in \mathbb{R}_d. \quad (3.19)$$

Подобрав таким образом число t_2 , обозначим через \mathbf{B} банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega = [t_2, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2}$ функций $z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|z\| = \sup \{|z(t, v_n)|: (t, v_n) \in \Omega\}.$$

Выделим из него подпространство \mathbf{B}_0 тех функций из \mathbf{B} , для которых $\|z\| \leq d$, и рассмотрим на \mathbf{B}_0 , выбрав предварительно произвольным образом число $\nu \in (0, 1)$, оператор

$$\Phi(z)(t, v_n) = z(t, v_n) - \nu [z(t, v_n) - a(t) - b(t, v_n) - Z(t, z(t, v_n))]. \quad (3.20)$$

Для любого $z \in \mathbf{B}_0$ в силу условия (3.18) имеем

$$|\Phi(z)(t, v_n)| \leq (1 - \nu)|z(t, v_n)| + \nu d \leq d \quad \text{при } (t, v_n) \in \Omega.$$

Следовательно, $\|\Phi(z)\| \leq d$, т. е. $\Phi(\mathbf{B}_0) \subset \mathbf{B}_0$.

Пусть теперь $z_1, z_2 \in \mathbf{B}_0$. Тогда в силу (3.19) при $(t, v_n) \in \Omega$

$$\begin{aligned} |\Phi(z_1)(t, v_n) - \Phi(z_2)(t, v_n)| &\leq (1 - \nu)|z_1(t, v_n) - z_2(t, v_n)| + \nu|Z(t, z_1(t, v_n)) - Z(t, z_2(t, v_n))| \leq \\ &\leq (1 - \nu)|z_1(t, v_n) - z_2(t, v_n)| + \frac{\nu}{2}|z_1(t, v_n) - z_2(t, v_n)| \leq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \|z_1 - z_2\|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\| \leq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \|z_1 - z_2\|$.

Тем самым показано, что оператор Φ отображает пространство \mathbf{B}_0 в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная функция $z \in \mathbf{B}_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (3.20) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением уравнения (3.15), удовлетворяющим условию $\|z\| \leq d$. Из (3.15) с учетом этого условия и (3.16), (3.17) следует, что данное решение стремится к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $v_n \in \mathbb{R}_{1/2}$. Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2}$, где t_0 — некоторое число из промежутка $[t_2, \omega[$, непосредственно следует из известной локальной теоремы о существовании неявной функции, определяемой соотношением (3.15). В силу замены (3.14) полученной функции z соответствует непрерывно дифференцируемая на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2}$ функция Y вида (3.12), которая является решением уравнения (3.11) и удовлетворяет условиям

$$\nu_{0j} \left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} Y(t, v_n) \in \Delta_{Y_j}, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \text{при } (t, v_n) \in [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2}, \quad (3.21)$$

$$\nu_{0j} \lim_{t \uparrow \omega} \left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} Y(t, v_n) = Y_j, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \text{равномерно по } v_n \in \mathbb{R}_{1/2}.$$

Теперь, применяя к дифференциальному уравнению (1.1) преобразование

$$\frac{y^{(j)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} [1 + v_{j+1}(\tau)], \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (3.22)$$

$$y^{(n-1)}(t) = Y(t, v_n(\tau)), \quad \tau = \alpha_s \nu_{0n-1} \ln |J_{s00}(t)|^{1/\gamma_s},$$

и учитывая, что функция $y^{(n-1)}(t) = Y(t, v_n(\tau))$ при $t \in [t_0, \omega[$ и $v_n(\tau) \in \mathbb{R}^{1/2}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj} \left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) \right)} = Q_s(t)[1 + v_n(\tau)],$$

получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} v'_i &= \alpha_s \nu_{0n-1} \left(1 + v_{i+1} - (n-j-1)\gamma_s[1-h(\tau)](1+v_i) - \right. \\ &\quad \left. - h(\tau) \frac{(1+v_i) \prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n} G(\tau, v_1, \dots, v_n) \right), \quad i = \overline{1, n-2}, \\ v'_{n-1} &= \alpha_s \nu_{0n-1} \left(1 - \gamma_s[1-h(\tau)](1+v_{n-1}) - \right. \\ &\quad \left. - h(\tau) \frac{(1+v_{n-1}) \prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n} G(\tau, v_1, \dots, v_n) \right), \quad (3.23) \\ v'_n &= \alpha_s \nu_{0n-1} \left(\gamma_s h(\tau) \prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}} G(\tau, v_1, \dots, v_n) - \right. \\ &\quad \left. - H(\tau, v_1, \dots, v_n)(1+v_n) - \gamma_s q(\tau)(1+v_n) \right), \end{aligned}$$

в которой

$$\begin{aligned}
 h(\tau(t)) &= \frac{p_s(t)J_{s00}(t)}{J_{s0}^2(t)}, & q(\tau) &= h(\tau) + \mu_{sn}[1 - h(\tau)], \\
 G(\tau(t), v_1, \dots, v_n) &= \frac{L_{sn-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} L_{sj} \left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} Y(t, v_n)(1 + v_{j+1}) \right)}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj} \left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} Y(t, v_n) \right)} \times \\
 &\times \frac{\sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \varphi_{kn-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_{kj} \left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} Y(t, v_n)(1 + v_{j+1}) \right)}{\alpha_s p_s(t) \varphi_{sn-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_{sj} \left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} Y(t, v_n)(1 + v_{j+1}) \right)}, \\
 H(\tau(t), v_1, \dots, v_n) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} Y(t, v_n) L'_{0sj} \left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} Y(t, v_n) \right)}{L_{0sj} \left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} Y(t, v_n) \right)} \times \\
 &\times \left(\gamma_s(n-j-1)[1 - h(\tau(t))] + h(\tau) \frac{\prod_{j=0}^{n-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1 + v_n} G(\tau, v_1, \dots, v_n) \right).
 \end{aligned}$$

В силу (2.8) и (2.9) функция $\tau(t) = \alpha_s \nu_{0n-1} \ln |J_{s00}(t)|^{1/\gamma_s}$ имеет свойства

$$\tau'(t) > 0 \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \tau(t) = +\infty$$

и существует $t_1 \in [t_0, \omega[$ такое, что на множестве

$$[\tau_1, +\infty[\times \mathbb{R}_{1/2}^n, \quad \text{где } \tau_1 = \tau(t_1), \quad \mathbb{R}_{1/2}^n = \left\{ (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : |v_i| \leq \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1, n} \right\},$$

правые части системы уравнений (3.23) непрерывны. Согласно второму из условий (2.8)

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h(\tau) = \lim_{t \uparrow \omega} h(\tau(t)) = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} q(\tau) = 1. \tag{3.24}$$

Далее, таким же образом, каким при доказательстве необходимости были установлены предельные соотношения (3.4), показываем с использованием условий (3.21) и неравенств (3.10), что вторая дробь в представлении функции G стремится к единице при $t \uparrow \omega$ равномерно по $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{1/2}^n$. Кроме того, в силу условий (3.21), свойства M_1 медленно меняющихся функций, условий (1.4) и (3.24) равномерно по $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{1/2}^n$ первая дробь в представлении функции G стремится к единице и функция H стремится к нулю при $t \uparrow \omega$. Поэтому систему дифференциальных уравнений (3.23) можно записать в виде

$$v'_i = \alpha_s \nu_{0n-1} \left(f_i(\tau, v_1, \dots, v_n) + 1 + v_{i+1} - \frac{(1+v_i) \prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n} \right), \quad i = \overline{1, n-2},$$

$$v'_{n-1} = \alpha_s \nu_{0n-1} \left(f_{n-1}(\tau, v_1, \dots, v_n) + 1 - \frac{(1+v_{n-1}) \prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n} \right),$$

$$v'_n = \alpha_s \nu_{0n-1} \left(f_n(\tau, v_1, \dots, v_n) + \gamma_s \prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}} - \gamma_s(1+v_n) \right),$$

где

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} f_i(\tau, v_1, \dots, v_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{равномерно по } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{1/2}^n.$$

Выделяя теперь линейные части в слагаемых, стоящих после функций f_i , $i = \overline{1, n}$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$v'_i = \alpha_s \nu_{0n-1} \left(f_i(\tau, v_1, \dots, v_n) + \sum_{k=1}^n p_{ik} v_k + V_i(v_1, \dots, v_n) \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.25)$$

в которой

$$p_{ii} = -1 - \sigma_{si-1}, \quad p_{ii+1} = 1 - \sigma_{si}, \quad p_{ik} = -\sigma_{sk-1}$$

$$\text{при } k \neq i, i+1, n, \quad p_{in} = 1, \quad i = \overline{1, n-2},$$

$$p_{n-1k} = -\sigma_{sk-1} \quad \text{при } k = \overline{1, n-2}, \quad p_{n-1n-1} = -1 - \sigma_{sn-2}, \quad p_{n-1n} = 1,$$

$$p_{nk} = \gamma_s \sigma_{sk-1} \quad \text{при } k = \overline{1, n-1}, \quad p_{nn} = -\gamma_s,$$

$$V_i(v_1, \dots, v_n) = -\frac{(1+v_i) \prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n} - v_n +$$

$$+(1 + \sigma_{si-1})v_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n-1} \sigma_{sk-1} v_k, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$V_n(v_1, \dots, v_n) = \gamma_s \prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}} - \gamma_s \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{sk-1} v_k.$$

Здесь

$$\lim_{|v_1| + \dots + |v_n| \rightarrow 0} \frac{\partial V_i(v_1, \dots, v_n)}{\partial v_k} = 0, \quad i, k = \overline{1, n},$$

и характеристическое уравнение $\det[P - \rho E] = 0$, где $P = (p_{ik})_{i,k=1}^n$ и E — единичная матрица размерности $n \times n$, имеет вид (2.7). В силу условий теоремы это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Тем самым показано, что для системы (3.25) выполнены все условия теоремы 2.2 из работы [20]. Согласно этой теореме данная система имеет по крайней мере одно решение $(v_i)_{i=1}^n : [\tau_2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau_2 \geq \tau_1$, стремящееся к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$, причем таких решений существует l -параметрическое семейство, если среди корней алгебраического уравнения (2.7) имеется l корней (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку числа $\alpha_s \nu_{0n-1}$. Каждому такому решению в силу замены (3.22) и первых из условий (1.4) соответствует решение $y : [t_2, \omega[\rightarrow \mathbb{R}$, $t_2 \in [a, \omega[$, дифференциального уравнения (1.1), которое допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.10) и (2.11). Используя эти представления, условия (2.8), (2.9) и (3.10), нетрудно проверить, что каждое такое решение уравнения (1.1) является $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$ -решением.

Теорема доказана.

Замечание 3.1. Если во вторых из условий (2.5) хотя бы для одного $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$ имеет место противоположное неравенство с заменой в нем \limsup на \liminf , то, как следует из доказательства необходимости, для этого k предел, стоящий в (3.4) слева, будет равен $+\infty$. Поэтому условия

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\gamma_s [\ln p_k(t) - \ln p_s(t)]}{\alpha_s \nu_{0n-1} \ln |J_{s0}(t)|} \leq \alpha_s \nu_{0n-1} (\gamma_k - \gamma_s) \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\} \quad (3.26)$$

в случае существования (конечных или равных $\pm\infty$) пределов, стоящих слева, являются необходимыми для того, чтобы на каждом $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$ -решении дифференциального уравнения (1.1) имело место соотношение (3.5), т. е. чтобы главным в правой части (1.1) было s -е слагаемое. В случае одного слагаемого $\alpha_s p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)})$, стоящего в правой части уравнения (1.1), теорема 2.1, очевидно, остается в силе без предположения о существовании функции $b_s : [a, \omega[\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, удовлетворяющей условиям (2.5), и без условий, где фигурирует эта функция.

Доказательство теоремы 2.2. Пусть дифференциальное уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$ -решение $y : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}$ со свойством (2.6). Тогда согласно теореме 2.1 выполняются условия (2.4), (2.8), (2.9) и это решение допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.10), (2.11). Кроме того, из доказательства необходимости данной теоремы следует, что выполняются условия (3.1). Поскольку функции L_{sj} , $j = \overline{0, n-1}$, удовлетворяют условию S_0 и в силу (2.8) и (3.1)

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)} \right)'}{\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)} \right)} = (n-j-1) \left[\frac{J_{s0}(t)}{J_{s00}(t)} - \frac{p_s(t)}{J_{s0}(t)} \right] + \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \\ & = (n-j-1) [1 - h(\tau(t))] \frac{J_{s0}(t)}{J_{s00}(t)} + \frac{J_{s0}(t)}{\gamma_s J_{s00}(t)} [1 + o(1)] = \frac{J_{s0}(t)}{J_{s00}(t)} \left[\frac{1}{\gamma_s} + o(1) \right], \end{aligned}$$

согласно замечанию 2.2 имеют место представления

$$L_{sj} \left(\left(\frac{\gamma_s J_{s0}(t)}{p_s(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) \right) = \\ = L_{sj} \left(\nu_{0j} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s} \right) [1 + o(1)], \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому из (2.11) имеем

$$|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s} = \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s J_{s0}(t) [1 + o(1)] \left| \frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)} \right|^{\mu_{sn}} \prod_{j=0}^{n-1} L_{sj} \left(\nu_{0j} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s} \right) \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Отсюда с учетом (2.8)–(2.10) следует, что имеют место асимптотические представления (2.12).

Доказательство теоремы 2.3. Необходимость. Пусть y – произвольное $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решение дифференциального уравнения (1.1). Тогда существует $t_1 \in [a, \omega[$ такое, что $y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j}(b_j)$, $j = \overline{0, n-1}$, при $t \in [t_1, \omega[$, выполняются неравенства (2.4) и в силу леммы 1.1 имеют место асимптотические соотношения (1.9). Из (1.9) непосредственно следуют асимптотические представления (2.16) и первые из знаковых условий (2.14). Кроме того, из (1.9) следует, что

$$\frac{y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = \frac{n-j-1+o(1)}{\pi_\omega(t)}, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.27)$$

В силу этих соотношений

$$\ln |y^{(j)}(t)| = [n-j-1+o(1)] \ln |\pi_\omega(t)|, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (3.28)$$

и поэтому выполняется первое из условий (2.15). При этом ясно, что существует число $a_0 \in [t_1, \omega[$ такое, что $\nu_{0j} |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} \in \Delta_{Y_j}(b_j)$, $j = \overline{0, n-2}$, при $t \in [a_0, \omega[$.

Учитывая асимптотические соотношения (3.28), представления (1.2) и условия (3.3), находим

$$\ln \varphi_{kj} \left(y^{(j)}(t) \right) = \sigma_{kj} \ln |y^{(j)}(t)| + \ln L_{kj} \left(y^{(j)}(t) \right) = [\sigma_{kj} + o(1)] \ln |y^{(j)}(t)| = \\ = [\sigma_{kj} + o(1)] [n-j-1+o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| = \\ = [(n-j-1)\sigma_{kj} + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)|, \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому для любого $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$

$$\ln \left[\frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj} \left(y^{(j)}(t) \right)}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj} \left(y^{(j)}(t) \right)} \right] = \ln \frac{p_k(t)}{p_s(t)} + \sum_{j=0}^{n-1} \left[\ln \varphi_{kj} \left(y^{(j)}(t) \right) - \ln \varphi_{sj} \left(y^{(j)}(t) \right) \right] = \\ = \ln \frac{p_k(t)}{p_s(t)} - \ln |\pi_\omega(t)| \sum_{j=0}^{n-1} [(\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-1) + o(1)] =$$

$$= \beta \ln |\pi_\omega(t)| \left[\frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} - \beta \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-1) + o(1) \right] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

где число β определено в (1.7). Поскольку выражение, стоящее в этом соотношении справа, в силу условий (2.13) стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$, выполняются условия (3.4) и поэтому имеет место асимптотическое соотношение (3.5).

Так как функции L_{sj} , $j = \overline{0, n-2}$, удовлетворяют условию S_0 и имеют место соотношения (3.27), согласно замечанию 2.2

$$L_{sj}(y^{(j)}(t)) = L_{sj}(\nu_{0j}|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}) [1 + o(1)], \quad j = 0, \dots, n-2, \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Кроме того, в силу (1.9)

$$|y^{(j)}(t)|^{\sigma_{sj}} = \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_{sj}} |\pi_\omega(t)|^{\sigma_{sj}(n-j-1)} |y^{(n-1)}(t)|^{\sigma_{sj}} [1 + o(1)],$$

$$j = \overline{0, n-2}, \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому из (3.5) с учетом (1.2) получим при $t \uparrow \omega$ асимптотическое соотношение вида

$$\frac{y^{(n)}(t)|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s-1}}{L_{sn-1}(y^{(n-1)}(t))} =$$

$$= \alpha_s \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_{sj}} p_s(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_{sn}} \prod_{j=0}^{n-2} L_{sj}(\nu_{0j}|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}) [1 + o(1)]. \quad (3.29)$$

Заменяя здесь функцию L_{sn-1} функцией L_{0sn-1} , удовлетворяющей условиям (1.4) при $k = s$ и $j = n-1$, которая существует в силу свойства M_2 медленно меняющихся функций, и замечая, что

$$\left(\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{L_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))} \right)' = \frac{\nu_{0n-1}y^{(n)}(t)|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s-1}}{L_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))} \left[\gamma_s - \frac{y^{(n-1)}(t)L'_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))}{L'_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))} \right] =$$

$$= \frac{\nu_{0n-1}y^{(n)}(t)|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s-1}}{L_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))} [\gamma_s + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

имеем

$$\left(\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{L_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))} \right)' =$$

$$= \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_{sj}} p_s(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_{sn}} \prod_{j=0}^{n-2} L_{sj}(\nu_{0j}|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}) [1 + o(1)],$$

откуда после интегрирования на промежутке от a_0 до t и использования первого из условий (1.4) (при $k = s$ и $j = n-1$) получаем с учетом второго из условий (1.5) асимптотическое представление (2.17). В силу этого представления выполняется второе из знаковых условий (2.15).

Кроме того, из (3.29) и (2.17) следует, что

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{J'_{sn}(t)}{\gamma_s J_{sn}(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.30)$$

Отсюда непосредственно следует второе из предельных условий (2.15) и в силу последнего из условий (1.9) — третье из предельных условий (2.15).

Достаточность. Пусть выполняются условия (2.14), (2.15). Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (1.1) имеет решения, допускающие при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.16), (2.17), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Сначала, учитывая первое из условий (2.15), подберем число $a_0 \in [a, \omega[$ так, чтобы $\nu_{0j} |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} \in \Delta_{Y_j}(b_j)$, $j = \overline{0, n-2}$, при $t \in [a_0, \omega[$, и рассмотрим соотношение

$$\frac{|Y|^{\gamma_s}}{L_{0sn-1}(Y)} = \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_{sj}} J_{sn}(t) [1 + v_n],$$

в котором L_{0sn-1} — функция, удовлетворяющая условиям (1.4) при $k = s$ и $j = n-1$, существующая в силу свойства M_2 медленно меняющихся функций. Точно таким же образом, как при доказательстве достаточности теоремы 2.1, устанавливаем, что оно однозначно определяет заданную на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2}$, где $t_0 \in [a_0, \omega[$ и $\mathbb{R}_{1/2} = \left\{ v_n \in \mathbb{R} : |v_n| \leq \frac{1}{2} \right\}$, непрерывно дифференцируемую функцию вида

$$Y(t, v_n) = \nu_{0n-1} |J_{sn}(t)|^{1/\gamma_s + z(t, v_n)}. \quad (3.31)$$

Здесь

$$|z(t, v_n)| < \frac{1}{2|\gamma_s|} \quad \text{при } (t, v_n) \in [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} z(t, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по } v_n \in \mathbb{R}_{1/2}.$$

Далее, применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\frac{y^{(j-1)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j}}{(n-j)!} [1 + v_j(\tau)], \quad j = \overline{1, n-1}, \quad (3.32)$$

$$y^{(n-1)}(t) = Y(t, v_n(\tau)), \quad \tau(t) = \beta \ln |\pi_\omega(t)|,$$

и учитывая, что функция $y^{(n-1)}(t) = Y(t, v_n(\tau))$ при $t \in [t_0, \omega[$ и $|v_n(\tau)| \leq \frac{1}{2}$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{L_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))} = \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_{sj}} J_{sn}(t) [1 + v_n(\tau)],$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$v'_j = \beta \left[(n-j)v_{j+1} - (n-j)v_j - \frac{h(\tau)}{\gamma_s} G(\tau, v_1, \dots, v_n) \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{(1 + v_j) \prod_{i=0}^{n-2} |1 + v_{i+1}|^{\sigma_{si}}}{1 + v_n} \Big], \quad j = \overline{1, n-2}, \\ v'_{n-1} &= \beta \left[-v_{n-1} - \frac{h(\tau)}{\gamma_s} G(\tau, v_1, \dots, v_n) \frac{(1 + v_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-2} |1 + v_{i+1}|^{\sigma_{si}}}{1 + v_n} \right], \quad (3.33) \\ v'_n &= \beta h(\tau) \left(-1 - v_n + G(\tau, v_1, \dots, v_n) \prod_{i=0}^{n-2} |1 + v_{i+1}|^{\sigma_{si}} [1 - H(\tau, v_n)] \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h(\tau(t)) &= \frac{\pi_\omega(t) J'_{sn}(t)}{J_{sn}(t)}, \quad H(\tau(t), v_n) = \frac{Y(t, v_n) L'_{0sn-1}(Y(t, v_n))}{\gamma_s L_{0sn-1}(Y(t, v_n))}, \\ G(\tau(t), v_1, \dots, v_n) &= \frac{L_{sn-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} L_{sj} \left(Y^{[j]}(t, v_{j+1}, v_n) \right)}{L_{0sn-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} L_{sj} (\nu_{0j} |\pi_\omega(t)|^{n-j-1})} \times \\ & \times \frac{\sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \varphi_{kn-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_{kj} \left(Y^{[j]}(t, v_{j+1}, v_n) \right)}{\alpha_s p_s(t) \varphi_{sn-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_{sj} \left(Y^{[j]}(t, v_{j+1}, v_n) \right)}, \\ Y^{[j]}(t, v_{j+1}, v_n) &= \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} (1 + v_{j+1}) Y(t, v_n), \quad j = \overline{0, n-2}. \end{aligned}$$

В силу (2.14) и первых двух из условий (2.15) существует $t_1 \in [t_0, \omega[$ такое, что

$$Y(t, v_n) \in \Delta_{Y_{n-1}}(b_{n-1}), \quad Y^{[j]}(t, v_{j+1}, v_n) \in \Delta_{Y_j}(b_j), \quad j = \overline{1, n-2},$$

$$\text{при } t \in [t_1, \omega[\quad \text{и} \quad (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{1/2}^n.$$

Следовательно, правые части системы дифференциальных уравнений непрерывны на множестве $[\tau_1, +\infty[\times \mathbb{R}_{1/2}^n$, где $\tau_1 = \beta \ln |\pi_\omega(t_1)|$. Кроме того, согласно третьему из условий (2.15)

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h(\tau) = \lim_{t \uparrow \omega} h(\tau(t)) = 0,$$

а согласно (1.4), (3.31) и второму из условий (2.15)

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} H(\tau, v_n) = \lim_{t \uparrow \omega} H(\tau(t), v_n) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{L_{sn-1}(Y(t, v_n))}{L_{0sn-1}(Y(t, v_n))} = 1$$

равномерно по $v_n \in \mathbb{R}_{1/2}$.

Поскольку в силу (1.2), (3.3), (3.31), правила Лопиталья и третьего из условий (2.15)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln \varphi_{kn-1}(Y(t, v_n))}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\sigma_{kn-1} \ln |Y(t, v_n) + \ln L_{kn-1}(Y(t, v_n))|}{\ln |\pi_\omega(t)|} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \uparrow \omega} \left[\sigma_{kn-1} + \frac{\ln L_{kn-1}(Y(t, v_n))}{\ln |Y(t, v_n)|} \right] \frac{\ln |Y(t, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \\
&= \lim_{t \uparrow \omega} \left[\sigma_{kn-1} + \frac{\ln L_{kn-1}(Y(t, v_n))}{\ln |Y(t, v_n)|} \right] \left[\frac{1}{\gamma_s} + z(t, v_n) \right] \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |J_{sn}(t)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \\
&= \lim_{t \uparrow \omega} \left[\sigma_{kn-1} + \frac{\ln L_{kn-1}(Y(t, v_n))}{\ln |Y(t, v_n)|} \right] \left[\frac{1}{\gamma_s} + z(t, v_n) \right] \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{sn}(t)}{J_{sn}(t)} = 0, \quad k = \overline{1, m},
\end{aligned}$$

равномерно по $v_n \in \mathbb{R}_{1/2}$ и

$$\begin{aligned}
\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln \varphi_{kj}(Y^{[j]}(t, v_{j+1}, v_n))}{\ln |\pi_\omega(t)|} &= \lim_{t \uparrow \omega} \left[\sigma_{kj} + \frac{\ln L_{kj}(Y^{[j]}(t, v_{j+1}, v_n))}{\ln |Y^{[j+1]}(t, v_{j+1}, v_n)|} \right] \frac{\ln |Y^{[j]}(t, v_{j+1}, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \\
&= \lim_{t \uparrow \omega} \left[\sigma_{kj} + \frac{\ln L_{kj}(Y^{[j]}(t, v_{j+1}, v_n))}{\ln |Y^{[j+1]}(t, v_{j+1}, v_n)|} \right] \left[n - j - 1 + \frac{\ln \frac{1+v_{j+1}}{(n-j-1)!}}{\ln |\pi_\omega(t)|} + \frac{\ln |Y(t, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} \right] = \\
&= \sigma_{kj}(n - j - 1) \quad \text{равномерно по } v_j, v_n \in \mathbb{R}_{12}, \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-2},
\end{aligned}$$

повторяя рассуждения из доказательства необходимости с использованием неравенства (2.13), устанавливаем, что для любого $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t) \varphi_{kn-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_{kj}(Y^{[j]}(t, v_{j+1}, v_n))}{p_s(t) \varphi_{sn-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_{sj}(Y^{[j]}(t, v_{j+1}, v_n))} = 0$$

равномерно по $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{1/2}^n$.

В силу установленных предельных соотношений систему дифференциальных уравнений (3.33) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
v'_j &= \beta[f_j(\tau, v_1, \dots, v_n) - (n-j)v_j + (n-j)v_{j+1}], \quad j = \overline{1, n-2}, \\
v'_{n-1} &= \beta[f_{n-1}(\tau, v_1, \dots, v_n) - v_{n-1}],
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$v'_n = \beta h(\tau) \left[f_n(\tau, v_1, \dots, v_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{si-1} v_i - v_n + V(v_1, \dots, v_{n-1}) \right],$$

где функции $f_j: [\tau_1, +\infty[\times \mathbb{R}_{1/2}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, непрерывны и таковы, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} f_j(\tau, v_1, \dots, v_n) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \text{равномерно по } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{1/2}^n,$$

а V — функция вида

$$V(v_1, \dots, v_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} |1 + v_i|^{\sigma_{si-1}} - 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{si-1} v_i.$$

Теперь выберем число $\delta > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\delta \sum_{i=1}^{n-1} |\sigma_{si-1}| < 1,$$

и систему (3.34) с помощью дополнительного преобразования

$$v_j = \delta w_j, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad v_n = w_n, \tag{3.35}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} w'_j &= \beta \left[\frac{1}{\delta} f_j(\tau, \delta w_1, \dots, \delta w_{n-1}, w_n) - (n-j)w_j + (n-j)w_{j+1} \right], \quad j = \overline{1, n-2}, \\ w'_{n-1} &= \beta \left[\frac{1}{\delta} f_{n-1}(\tau, \delta w_1, \dots, \delta w_{n-1}, w_n) - w_{n-1} \right], \\ w'_n &= \beta h(\tau) \left[f_n(\tau, \delta w_1, \dots, \delta w_{n-1}, w_n) + \delta \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{si-1} w_i - v_n + V(\delta w_1, \dots, \delta w_{n-1}) \right]. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Для этой системы уравнений выполнены все условия теоремы 2.1 из работы [20]. Согласно этой теореме данная система имеет по крайней мере одно решение $(w_j)_{j=1}^n : [\tau_2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau_2 \geq \tau_1$, стремящееся к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$, причем в случае, когда $\beta > 0$, таких решений существует n -параметрическое семейство, если $J_{sn}(t) > 0$ при $t \in]a_0, \omega[$, и $(n-1)$ -параметрическое семейство, если $J_{sn}(t) < 0$ при $t \in]a_0, \omega[$, а в случае, когда $\beta < 0$, существует однопараметрическое семейство таких решений, если $J_{sn}(t) > 0$ при $t \in]a_0, \omega[$. Каждому такому решению в силу замен (3.35) и (3.32) соответствует $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решение дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.16), (2.17).

Теорема доказана.

Замечание 3.2. Если в условиях (2.13) хотя бы для одного $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$ имеет место противоположное неравенство с заменой в нем \limsup на \liminf , то, как следует из доказательства необходимости, для этого k предел, стоящий в (3.4) слева, будет равен $+\infty$. Поэтому условия

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} \leq \beta \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-1) \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$$

в случае существования (конечных или равных $\pm\infty$) пределов, стоящих слева, являются необходимыми для того, чтобы на каждом $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решении дифференциального уравнения (1.1) имело место соотношение (3.5), т. е. чтобы главным в правой части (1.1) было s -е слагаемое. В случае одного слагаемого $\alpha_s p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)})$, стоящего в правой части уравнения (1.1), теорема 2.3, очевидно, остается в силе без предположения о выполнении неравенств (2.13).

Доказательство теоремы 2.4. Пусть дифференциальное уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решение $y: [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}$. Тогда согласно теореме 2.3 выполняются условия (2.14), (2.15) и это решение допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.16), (2.17). Кроме того, из доказательства необходимости данной теоремы следует, что имеет место асимптотическое соотношение (3.30). Поскольку функция L_{sn-1} удовлетворяет условию S_0 и имеет место (3.30), в силу замечания 2.2

$$L_{sn-1} \left(y^{(n-1)}(t) \right) = L_{sn-1} \left(\nu_{0n-1} |J_{sn}(t)|^{1/\gamma_s} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому из (2.17) имеем

$$|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s} = \alpha_s \nu_{0n-1}^{\gamma_s} \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_{sj}} \times \\ \times J_{sn}(t) L_{sn-1} \left(\nu_{0n-1} |J_{sn}(t)|^{1/\gamma_s} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

и имеет место асимптотическое представление (2.18).

4. Пример уравнения с правильно меняющимися при $t \uparrow \omega$ коэффициентами. Предположим, что в дифференциальном уравнении (1.1) непрерывные функции $p_k: [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$, $k = \overline{1, m}$, являются правильно меняющимися при $t \uparrow \omega$ порядков ϱ_k , $k = \overline{1, m}$. В этом случае

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t)}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \varrho_k \quad (4.1)$$

и при любом значении $s \in \{1, \dots, m\}$ для любой непрерывной функции $b_s: [a, \omega[\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, удовлетворяющей условию $\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) b(t) = \pm\infty$, имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\int_a^t b(\tau) d\tau} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\ln |\pi_\omega(t)|} \frac{\ln |\pi_\omega(t)|}{\int_a^t b(\tau) d\tau} = 0.$$

Отсюда ясно, что всегда существует $s \in \{1, \dots, m\}$ и β_s — знак b_s такие, что выполняются неравенства

$$\beta_s (\gamma_k - \gamma_s) \geq 0 \quad \text{при } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\},$$

которые в силу замечания 3.1 являются необходимыми условиями существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, 1)$ -решений дифференциального уравнения (1.1), на которых главным в правой части уравнения является s -е слагаемое. При этом в силу (2.8) необходимо, чтобы

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{s0}(t)}{J_{s0}(t)} = \lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) b_s(t) = \pm\infty.$$

Однако это условие выполняться не может, так как в силу свойств правильно меняющихся функций

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{s0}(t)}{J_{s0}(t)} = 1 + \varrho_s.$$

Значит, дифференциальное уравнение (1.1) с правильно меняющимися при $t \uparrow \omega$ коэффициентами не может иметь $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$ -решений, на которых главным в правой части уравнения (1.1) является какое-либо из слагаемых.

Замечание 4.1. В случае быстро меняющихся при $t \uparrow \omega$ коэффициентов уравнения (1.1) у него могут существовать $P_\omega(Y_0, \dots, y_{n-1}, 1)$ -решения.

Теперь с использованием теоремы 2.3 выясним вопрос о наличии у рассматриваемого здесь дифференциального уравнения $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решений, на которых главным в правой части уравнения является s -е слагаемое, где $s \in \{1, \dots, m\}$. В силу (4.1) и замечания 3.2 для их существования прежде всего необходимо выполнение неравенств

$$\beta(\varrho_k - \varrho_s) \leq \beta \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-1) \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}. \quad (4.2)$$

Кроме того, необходимо выполнение неравенств (2.4), (2.14) и условий (2.15).

Поскольку в интеграле J_{sn} подынтегральная функция является правильно меняющейся при $t \uparrow \omega$ порядка $\varrho_s + \mu_{sn}$, то

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{sn}(t)}{J_{sn}(t)} = 1 + \varrho_s + \mu_{sn}.$$

Поэтому в силу последнего из условий (2.15) должно выполняться равенство

$$\varrho_s = -1 - \mu_{sn}. \quad (4.3)$$

На основании изложенного выше из теоремы 2.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.1. Пусть в дифференциальном уравнении (1.1) непрерывные функции $p_k: [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$, $k = \overline{1, m}$, являются правильно меняющимися при $t \uparrow \omega$ порядков ϱ_k , $k = \overline{1, m}$, $\gamma_s \neq 0$ при некотором $s \in \{1, \dots, m\}$ и медленно меняющиеся при $y^{[j]} \rightarrow Y_j$ функции L_{sj} , $j = \overline{0, n-2}$, удовлетворяют условию S_0 . Тогда для существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решений уравнения (1.1), для которых имеют место предельные соотношения (3.4), необходимо, чтобы выполнялись неравенства (2.4), (2.14), (4.2), условие (4.3) и два первых из условий (2.15), причем для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.16), (2.17). Если же наряду с (2.4), (2.14), (4.3) и первыми двумя из условий (2.15) выполняются строгие неравенства

$$\beta(\varrho_k - \varrho_s) < \beta \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-1) \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}, \quad (4.4)$$

то существуют $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решения уравнения (1.1). Более того, таких решений в случае, когда $\omega = +\infty$, существует n -параметрическое семейство, если $J_{sn}(t) > 0$ при $t \in [a_0, \omega[$, и $(n-1)$ -параметрическое семейство, если $J_{sn}(t) < 0$ при $t \in [a_0, \omega[$, а в случае, когда $\omega < +\infty$ и $J_{sn}(t) > 0$ при $t \in [a_0, \omega[$, существует однопараметрическое семейство таких решений.

Данный результат существенно может быть уточнен в ситуации конкретного вида функций p_s и φ_{sj} , $j = \overline{0, n-1}$.

Допустим, например, что $\omega = +\infty$ и

$$p_s(t) = t^{\varrho_s} \ln^{r_s} t, \quad \varphi_{sj} = |y^{(j)}|^{\sigma_{sj}} \left| \ln |y^{(j)}| \right|^{\lambda_{sj}}, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (4.5)$$

В этом случае $\pi_\omega(t) = t$, $\beta = 1$, функции $L_{sj}(y^{[j]}) = |\ln |y^{(j)}||^{\lambda_{sj}}$, $j = \overline{1, n-1}$, удовлетворяют условию S_0 . Кроме того, в силу (4.3)

$$p_s(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_{sn}} \prod_{j=0}^{n-2} L_{sj}(\nu_{0j}|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}) = \left(\prod_{j=0}^{n-2} |n-j-1|^{\lambda_{sj}} \right) t^{-1} (\ln t)^{r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj}},$$

и поэтому при $t \rightarrow +\infty$

$$J_{sn}(t) \sim \begin{cases} \frac{\prod_{j=0}^{n-2} |n-j-1|^{\lambda_{sj}}}{1 + r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj}} (\ln t)^{1+r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj}}, & \text{если } r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} \neq -1, \\ \left(\prod_{j=0}^{n-2} |n-j-1|^{\lambda_{sj}} \right) \ln \ln t, & \text{если } r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} = -1. \end{cases}$$

В силу этих соотношений условия (2.14) принимают вид

$$\nu_{0j}\nu_{0n-1} > 0, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad (4.6)$$

$$\alpha_s \nu_{0n-1} = \begin{cases} \text{sign } \gamma_s \left(1 + r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} \right), & \text{если } r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} \neq -1, \\ \text{sign } \gamma_s, & \text{если } r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} = -1. \end{cases}$$

Из второго из этих условий сначала определяется знак $(n-1)$ -й производной $P_{+\infty}(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решения, а из первого — знаки этого решения и его производных до порядка $n-2$ включительно.

Первые два из условий (2.15) запишутся в виде

$$\nu_{0j}Y_j = +\infty, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad (4.7)$$

$$\nu_{0n-1}Y_{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma_s \left(1 + r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} \right) < 0, \\ 0, & \text{если } \gamma_s < 0, \quad r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} = -1, \\ +\infty, & \text{если } \gamma_s \left(1 + r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} \right) > 0, \\ +\infty, & \text{если } \gamma_s > 0, \quad r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} = -1. \end{cases}$$

Из них определяются предельные значения при $t \uparrow \omega$ для $P_{+\infty}(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решения и его производных до порядка $n-1$ включительно.

Поскольку в рассматриваемом случае все функции L_{sj} , $j = \overline{0, n-1}$, удовлетворяют условию S_0 , то согласно теореме 2.4 для $P_{+\infty}(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решений допустимы при $t \uparrow \omega$ представления (2.16), (2.18). Здесь они примут вид

$$y^{(k-1)}(t) = C_{1k} t^{n-k} (\ln t)^{\frac{1+r_s+\sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj}}{\gamma_s}} (\ln \ln t)^{\lambda_{sn-1}/\gamma_s} [1 + o(1)], \quad k = \overline{1, n}, \tag{4.8_1}$$

если $r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} \neq -1,$

$$y^{(k-1)}(t) = C_{2k} t^{n-k} (\ln \ln t)^{1/\gamma_s} (\ln \ln \ln t)^{\lambda_{sn-1}/\gamma_s} [1 + o(1)], \quad k = \overline{1, n}, \tag{4.8_2}$$

если $r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} = -1,$

где

$$C_{1k} = \frac{\nu_{0n-1}}{(n-k)!} \left| \frac{1+r_s+\sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj}}{\gamma_s} \right|^{\frac{\lambda_{sn-1}-1}{\gamma_s}} \prod_{j=0}^{n-2} \frac{(n-j-1)^{\lambda_{sj}/\gamma_s}}{|(n-j-1)!|^{\sigma_{sj}/\gamma_s}},$$

$$C_{2k} = \frac{\nu_{0n-1}}{(n-k)!} |\gamma_s|^{1/\gamma_s} \prod_{j=0}^{n-2} \frac{(n-j-1)^{\lambda_{sj}/\gamma_s}}{|(n-j-1)!|^{\sigma_{sj}/\gamma_s}}.$$

Таким образом, из следствия 4.1 и теоремы 2.4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.2. Пусть в дифференциальном уравнении (1.1) непрерывные функции $p_k : [a, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, $k = \overline{1, m}$, являются правильно меняющимися при $t \rightarrow +\infty$ порядков ϱ_k , $k = \overline{1, m}$, $\gamma_s \neq 0$ при некотором $s \in \{1, \dots, m\}$ и функции $p_s, \varphi_{sj}, j = \overline{0, n-1}$, имеют вид (4.5). Тогда для существования $P_{+\infty}(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решений уравнения (1.1), на которых главным в правой части уравнения является s -е слагаемое, необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\varrho_k - \varrho_s \leq \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-1) \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$$

и условия (4.3), (4.6), (4.7), причем для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (4.8_k), $k \in \{1, 2\}$. Если же наряду с (4.3), (4.6), (4.7) выполняются строгие неравенства

$$\varrho_k - \varrho_s < \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-1) \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\},$$

то существуют $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -решения уравнения (1.1). Более того, таких решений существует n -параметрическое семейство, если $1 + r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} \geq 0$, и $(n-1)$ -параметрическое семейство – в противном случае.

5. Выводы. В данной работе для дифференциального уравнения n -го порядка вида (1.1) с правильно меняющимися при $y^{(j)} \rightarrow Y_j, j = \overline{0, n-1}$, нелинейностями $\varphi_{kj}, k = \overline{1, m}$, получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений в

особых случаях, когда $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_0 = \pm\infty$, и установлены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ таких решений и их производных до порядка $n - 1$ включительно.

В теоремах 2.1 и 2.3 представление для $(n - 1)$ -й производной дается в неявной форме, но при некоторых дополнительных ограничениях (см. теоремы 2.2 и 2.4) оно может быть записано в явном виде.

Следует также обратить внимание на то, что в силу произвольности выбора $Y_0 \in \{\pm\infty; 0\}$ и $\omega \leq +\infty$ установленные результаты позволяют описывать асимптотику не только правильных решений, стремящихся либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, но и различного типа сингулярных решений уравнения (1.1).

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
2. *Кизурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
3. *Костин А. В.* Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 524–526.
4. *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений n -го порядка // Докл. расш. зас. сем. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа. – 1988. – **3**, № 3. – С. 62–65.
5. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера n -го порядка // Докл. АН России. – 1992. – **234**, № 2. – С. 258–260.
6. *Евтухов В. М.* Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n -го порядка типа Эмдена–Фаулера // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – **145**, № 2. – С. 269–273.
7. *Evtukhov V. M., Shebanina E. V.* Asymptotic behaviour of solutions of n -th order differential equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. Tbilisi. – 1998. – **13**. – P. 150–153.
8. *Wong P. K.* Existence and asymptotic behavior of proper solutions of a class of second-order nonlinear differential equations // Pacif. J. Math. – 1963. – **13**. – P. 737–760.
9. *Marić V., Tomić M.* Asymptotic properties of solutions of the equation $y'' = f(x)\Phi(y)$ // Math. Z. – 1976. – **149**. – S. 261–266.
10. *Talliaferro S. D.* Asymptotic behavior of the solutions of the equation $y'' = \Phi(t)f(y)$ // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – **12**, № 6. – P. 47–59.
11. *Marić V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. – 2000. – 127 p.
12. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 5. – С. 628–650.
13. *Евтухов В. М., Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 3. – С. 310–331.
14. *Белозерова М. А.* Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. студ. – 2008. – **29**, № 1. – С. 52–62.
15. *Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, близкими к степенным // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 1. – С. 3–15.
16. *Евтухов В. М., Козьма А. А.* Признаки существования и асимптотика некоторых классов решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 924–938.
17. *Козьма А. А.* Условия существования и асимптотика одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. студ. – 2011. – **36**, № 2. – С. 176–187.
18. *Козьма А. А.* Асимптотическое поведение одного класса решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 4. – С. 468–481.
19. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. . . д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1998. – 295 с.
20. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52–80.

Получено 25.04.12