УДК 512.544

О. Ю. Дашкова (Днепропетр. нац. ун-т)

ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ AFA-ГРУППЫ

Let A be an $\mathbf{R}G$-module, where $\mathbf{R}$ is a ring, G is a locally solvable group, $C_G(A) = 1$, and each proper subgroup H of G for which $A/C_A(H)$ is not an Artinian $\mathbf{R}$-module is finitely generated. It is proved that a locally solvable group G that satisfies these conditions is hyperabelian if $\mathbf{R}$ is a Dedekind ring. We describe the structure of G in the case where G is a finitely generated solvable group, $A/C_A(G)$ is not an Artinian $\mathbf{R}$-module and $\mathbf{R}$ is a Dedekind ring.

Досліджується $\mathbf{R}G$-модуль A такий, що $\mathbf{R}$ — кільце, G — локально розв'язна група, $C_G(A) = 1$ та кожна власна підгрупа H групи G, для якої фактор-модуль $A/C_A(H)$ не є артиновим $\mathbf{R}$-модулем, скінченно породжена. Доведено, що локально розв'язна група G, яка задовольняє ці умови, гіперабелева, та описано структуру групи G у випадку, коли G є скінченнопородженою розв'язною групою, $A/C_A(G)$ не є артиновим $\mathbf{R}$-модулем та $\mathbf{R}$ є дедекіндовим кільцем.

1. Введение. Пусть A — векторное пространство над полем F. Подгруппы группы $GL(F, A)$ всех автоморфизмов пространства A называются линейными группами. Если A имеет конечную размерность над полем F, $GL(F, A)$ можно рассматривать как группу невырожденных $(n \times n)$-матриц, где $n = \dim_F A$. Конечномерные линейные группы являются важным объектом исследования и изучались достаточно много. В случае, когда пространство A имеет бесконечную размерность над полем F, ситуация кардинально меняется. Бесконечномерные линейные группы исследовались мало. Изучение этого класса групп требует дополнительных ограничений. К таким ограничениям относятся различные условия конечности. Одним из условий конечности, которое достойно особого внимания, является финитарность линейной группы. Группа G называется финитарной, если для каждого ее элемента g подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в A (см., например, [1, 2]). Финитарные линейные группы изучались многими алгебраистами, и в этом направлении был получен ряд интересных результатов [2].

В [3] авторы ввели в рассмотрение антифинитарные линейные группы. Пусть $G \leq GL(F, A)$, $A(wFG)$ — фундаментальный идеал группового кольца FG. Авторы полагают $\operatorname{aug}\dim_F(G) = \dim_F(A(wFG))$. Линейная группа G называется антифинитарной, если каждая собственная подгруппа H группы G, для которой размерность $\operatorname{aug}\dim_F(H)$ бесконечна, конечно порождена. В [3] исследовались антифинитарные локально разрешимые линейные группы.

Если $G \leq GL(F, A)$, то A можно рассматривать как FG-модуль. Естественным обобщением этого случая является рассмотрение $\mathbf{R}G$-модуля A, где $\mathbf{R}$ — кольцо. Б. А. Ф. Верфриц ввел в рассмотрение артиново-финитарные группы автоморфизмов модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ и нетерово-финитарные группы автоморфизмов модуля M над кольцом $\mathbf{R}$, являющиеся аналогами финитарных линейных групп [4–6]. Группа автоморфизмов $F_1\mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}M$ модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ называется артиново-финитарной, если $M(g-1)$ является артиновым $\mathbf{R}$-модулем для любого элемента $g \in F_1\mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}M$. Группа автоморфизмов $F\mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}M$ модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ называется нетерово-финитарной, если $M(g-1)$ является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем для любого элемента $g \in F\mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}M$. Б. А. Ф. Верфриц исследовал связь между группами $F_1\mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}M$ и $F\mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}M$ [6].

При изучении модулей над групповыми кольцами с различными условиями конечности важную роль играет понятие коцентрализатора подгруппы H в модуле A, введенное в [7].

Определение 1.1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Если $H \leq G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле.*

В настоящей работе рассматривается аналог антифинитарных линейных групп в теории модулей над групповыми кольцами.

Определение 1.2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Будем говорить, что группа G является* AFA*-группой, если любая собственная подгруппа H группы G, коцентрализатор которой в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, конечно порождена.*

В работе изучаются локально разрешимые AFA-группы. Всюду рассматривается $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $C_G(A) = 1$. Основные результаты работы — теоремы 3.2 и 3.3 — доказаны в случае, когда кольцо $\mathbf{R}$ является дедекиндовым кольцом. Напомним, что кольцо $\mathbf{R}$ называется дедекиндовым, если выполняются следующие условия: 1) $\mathbf{R}$ — область целостности; 2) $\mathbf{R}$ — нетерово кольцо; 3) каждый ненулевой простой идеал кольца $\mathbf{R}$ является максимальным идеалом; 4) кольцо $\mathbf{R}$ целозамкнуто.

В теореме 3.2 установлена гиперабелевость локально разрешимой AFA-группы, а в теореме 3.3 описана структура конечнопорожденной разрешимой AFA-группы G в случае, когда коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

2. Предварительные результаты. В настоящем пункте мы сформулируем элементарные результаты, которые будут использоваться при доказательстве основных теорем. Всюду далее, если специально не оговорено, рассматривается $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $\mathbf{R}$ — произвольное ассоциативное кольцо.

Лемма 2.1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль.*

1. *Если $L \leq H \leq G$ и коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, то и коцентрализатор подгруппы L в модуле A — артинов $\mathbf{R}$-модуль.*

2. *Если $L, H \leq G$ и коцентрализаторы подгрупп L и H в модуле A являются артиновыми $\mathbf{R}$-модулями, то коцентрализатор подгруппы $\langle L, H\rangle$ в модуле A — артинов $\mathbf{R}$-модуль.*

***Следствие* 2.1.** *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль. Множество $AD(G)$ всех элементов $x \in G$ таких, что коцентрализатор группы $\langle x\rangle$ в модуле A — артинов $\mathbf{R}$-модуль, является нормальной подгруппой группы G.*

Доказательство. Из леммы 2.1 следует, что $AD(G)$ является подгруппой группы G. Поскольку $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех $x, g \in G$, подгруппа $AD(G)$ нормальна в G.

Следствие доказано.

***Следствие* 2.2.** *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFA*-группой. Если группа G содержит две собственные бесконечнопорожденные подгруппы K и L, то коцентрализатор подгруппы $\langle K, L\rangle$ в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.*

Лемма 2.2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFA*-группой. Пусть $H \leq G$, K — нормальная подгруппа H такая, что $H/K = Dr_{\lambda\in\Lambda}(H_\lambda/K)$, $H_\lambda \neq K$ для каждого $\lambda \in \Lambda$, и* *множество индексов Λ бесконечно. Тогда коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.*

Доказательство. Фактор-группу H/K можно представить в виде прямого произведения $H/K = H_1/K \times H_2/K$ такого, что фактор-группы H_1/K и H_2/K бесконечно порождены. Поскольку G является AFA-группой, коцентрализаторы подгрупп H_1 и H_2 в модуле A являются артиновыми $\mathbf{R}$-модулями. Так как $H = \langle H_1, H_2 \rangle$, по лемме 2.1 коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

Лемма доказана.

***Следствие* 2.3.** *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFA*-группой. Пусть $H \leq G$, K — нормальная подгруппа H такая, что $H/K = Dr_{\lambda \in \Lambda}(H_\lambda/K)$, $H_\lambda \neq K$ для каждого $\lambda \in \Lambda$, и множество индексов Λ бесконечно. Если g — элемент группы G такой, что подгруппа H_λ является $\langle g \rangle$-инвариантной для каждого $\lambda \in \Lambda$, то $g \in AD(G)$.*

Доказательство. Отметим, что подгруппа K — $\langle g \rangle$-инвариантна. Поскольку множество индексов Λ бесконечно, $Dr_{\lambda \in \Lambda}(H_\lambda/K)\langle gK \rangle = (H_1/K)((H_2/K)\langle gK \rangle)$, где фактор-группы H_1/K и $(H_2/K)\langle gK \rangle$ — собственные и бесконечно порождены. Следовательно, коцентрализатор подгруппы $\langle H, g \rangle$ в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. По лемме 2.1 коцентрализатор подгруппы $\langle g \rangle$ в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

Следствие доказано.

***Следствие* 2.4.** *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFA*-группой. Пусть $H \leq G$, K — нормальная подгруппа H такая, что $H/K = Dr_{\lambda \in \Lambda}(H_\lambda/K)$, $H_\lambda \neq K$ для каждого $\lambda \in \Lambda$, и множество индексов Λ бесконечно. Если H_λ — G-инвариантная подгруппа для каждого $\lambda \in \Lambda$, то $G = AD(G)$.*

***Следствие* 2.5.** *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFA*-группой. Пусть $H \leq G$ и K — нормальная подгруппа H такая, что H/K — бесконечная элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p. Если g — элемент группы G такой, что подгруппы H и K $\langle g \rangle$-инвариантны, и $g^k \in C_G(H/K)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $g \in AD(G)$.*

Доказательство. Пусть $1 \neq h_1K \in H/K, H_1/K = \langle h_1K \rangle^{\langle gK \rangle}$. Поскольку элемент g индуцирует на фактор-группе H/K автоморфизм конечного порядка, фактор-группа H_1/K конечна. Так как фактор-группа H/K элементарная абелева, справедливо равенство $H/K = H_1/K \times C_1/K$. Отметим, что множество $\{C_1^y | y \in \langle g \rangle\}$ конечно. Пусть $\{C_1^y | y \in \langle g \rangle\} = \{U_1, \ldots, U_m\}$. Тогда $\langle g \rangle$-инвариантная подгруппа

$$D_1 = U_1 \cap \ldots \cap U_m = \mathrm{Core}_{\langle g \rangle}(C_1)$$

имеет конечный индекс в подгруппе H. Поскольку подгруппа K является $\langle g \rangle$-инвариантной, $K \leq D_1$. Пусть $1 \neq h_2K \in D_1/K, H_2/K = \langle h_2K \rangle^{\langle gK \rangle}$. Тогда $\langle H_1/K, H_2/K \rangle = H_1/K \times H_2/K$. Следовательно, $H/K = (H_1/K \times H_2/K) \times C_2/K$ для некоторой подгруппы C_2. Продолжив рассуждения аналогичным образом, мы построим бесконечное семейство $\{H_n/K | n \in \mathbb{N}\}$ неединичных $\langle g \rangle$-инвариантных подгрупп такое, что $\langle H_n/K | n \in \mathbb{N} \rangle = Dr_{n \in \mathbb{N}} H_n/K$. По следствию 2.3 $g \in AD(G)$.

Следствие доказано.

3. Локально разрешимые AFA-группы. Напомним, что группа G имеет конечный 0-ранг $r_0(G) = r$, если G обладает конечным субнормальным рядом с r бесконечными циклическими факторами, все остальные факторы которого периодические. 0-Ранг группы не зависит от выбора ряда и является числовым инвариантом.

Лемма 3.1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFA*-группой. Если группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что фактор-группа G/K абелева и имеет бесконечный* 0*-ранг, то коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.*

Доказательство. Пусть B/K — свободная абелева подгруппа фактор-группы G/K такая, что фактор-группа G/B периодическая. Если $\pi(G/B)$ бесконечно, то по лемме 2.2 коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Предположим, что множество $\pi(G/B)$ конечно. Выберем такое простое число q, что $q \notin \pi(G/B)$. Пусть $C/K = (B/K)^q$. Тогда B/C — силовская q-подгруппа фактор-группы G/C. Если P/C — силовская q'-подгруппа G/C, то G/P является бесконечной элементарной абелевой q-группой, и по лемме 2.2 коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

Лемма доказана.

***Следствие* 3.1.** *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFA*-группой. Предположим, что группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что фактор-группа G/K почти абелева и имеет бесконечный* 0*-ранг. Тогда коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.*

Доказательство. Пусть L/K — нормальная абелева подгруппа фактор-группы G/K такая, что G/L конечна. Тогда ранг $r_0(L/K)$ бесконечен. Выберем элемент $g \in G\backslash L$. Пусть B/K — свободная абелева подгруппа фактор-группы L/K такая, что фактор-группа L/B периодическая. Ранг $r_0(B/K)$ бесконечен. Выберем элемент $a_1 \in B\backslash K$. Пусть $A_1/K = (\langle a_1\rangle K/K)^{\langle gK\rangle}$. Поскольку фактор-группа G/L конечна, A_1/K — конечнопорожденная абелева группа. Следовательно, подгруппа $A_1/K \cap B/K$ конечно порождена. Выберем максимальную подгруппу C_1/K фактор-группы B/K, удовлетворяющую условию $(A_1/K \cap B/K) \cap C_1/K = \langle 1\rangle$. Тогда фактор-группа L/C_1 имеет конечный 0-ранг. Так как фактор-группа G/L конечна, множество $\{(C_1/K)^{yK} | y \in \langle g\rangle\}$ конечно. Пусть $\{(C_1/K)^{yK} | y \in \langle g\rangle\} = \{D_1/K, \ldots, D_n/K\}$ и $E/K = D_1/K \cap \ldots \cap D_n/K$. Тогда фактор-группа $E/K \leq B/K$, E/K — $\langle g\rangle$-инвариантна, и по теореме Ремака L/E имеет конечный 0-ранг. В частности, E/K имеет бесконечный 0-ранг. Выберем элемент $a_2 \in E\backslash K$. Пусть $A_2/K = (\langle a_2\rangle K/K)^{\langle gK\rangle}$. Тогда $A_2/K \leq E/K$, $(A_1/K) \cap (A_2/K) = 1$. Продолжив рассуждения аналогичным образом, построим множество $\{A_n/K | n \in \mathbb{N}\}$ $\langle g\rangle$-инвариантных подгрупп такое, что $\langle A_n/K | n \in \mathbb{N}\rangle = Dr_{n\in\mathbb{N}}(A_n/K)$. Согласно следствию 2.3 $g \in AD(G)$. Тогда можно выбрать конечнопорожденную подгруппу $F \leq G$ такую, что $G/K = (FK/K)(L/K)$, и каждый элемент g подгруппы F содержится в $AD(G)$. Поскольку подгруппа F конечно порождена, $F \leq AD(G)$. По лемме 3.1 коцентрализатор подгруппы L в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Поскольку $G = FL$, по лемме 2.1 коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

Следствие доказано.

Лемма 3.2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFA*-группой. Предположим, что группа G содержит подгруппы $L \leq K \leq H$ такие, что L и K — нормальные подгруппы H, K/L — делимая черниковская группа, H/K — почти полициклическая группа. Если коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, то $H = G$. Более того, либо*

$G = K$, и тогда фактор-группа G/L — квазициклическая p-группа для некоторого простого числа p, либо G/K — циклическая q-группа для некоторого простого числа q.

Доказательство. Предположим сначала, что фактор-группа H/L конечно порождена. По теореме Ф. Холла (теорема 5.34 [9]) H/L удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп. В частности, K/L удовлетворяет условию $\max - H$. Получили противоречие с тем, что K/L — делимая черниковская группа. Следовательно, фактор-группа H/L бесконечно порождена, и поэтому подгруппа H бесконечно порождена. Поскольку коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, то $H = G$.

Пусть $G \neq K$. Тогда $G = \langle K, M \rangle$ для некоторого конечного множества M. Поскольку множество M конечно, можно выбрать подмножество S множества M такое, что $G = \langle K, S \rangle$ и $G \neq \langle K, X \rangle$ для любого собственного подмножества X множества S. Пусть $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Если $m > 1$, то $\langle K, x_1, \ldots, x_{m-1} \rangle$ и $\langle K, x_m \rangle$ — собственные бесконечнопорожденные подгруппы группы G. Так как G является AFA-группой, коцентрализаторы подгрупп $\langle K, x_1, \ldots, x_{m-1} \rangle$ и $\langle K, x_m \rangle$ в модуле A являются артиновыми $\mathbf{R}$-модулями. Поскольку $G = \langle \langle K, x_1, \ldots, x_{m-1} \rangle, \langle K, x_m \rangle \rangle$, по лемме 2.1 коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Противоречие. Следовательно, $m = 1$, и поэтому $G/K = \langle xK \rangle$ — циклическая фактор-группа. Если G/K бесконечна, то группу G можно представить в виде произведения двух собственных бесконечнопорожденных подгрупп. Противоречие с леммой 2.1. Если фактор-группа G/K конечна, но $|\pi(G/K)| > 1$, вновь получаем противоречие с леммой 2.1. Следовательно, G/K — циклическая q-группа для некоторого простого числа q.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFA*-группой. Пусть H — нормальная подгруппа группы G такая, что G/H — бесконечная почти абелева периодическая фактор-группа. Если коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, то либо G/H — квазициклическая p-группа для некоторого простого числа p, либо группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что G/K — циклическая q-группа для некоторого простого числа q, $H \leq K$, и K/H — делимая черниковская p-группа для некоторого простого числа p.*

Доказательство. Пусть L/H — нормальная абелева подгруппа фактор-группы G/H такая, что фактор-группа G/L конечна. Если множество $\pi(L/H)$ бесконечно, то по лемме 2.2 коцентрализатор подгруппы L в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. По следствию 2.4 $G = AD(G)$. Поскольку фактор-группа G/L конечна, с учетом леммы 2.1 коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Противоречие. Следовательно, множество $\pi(L/H)$ конечно. Тогда существует простое число p такое, что силовская p-подгруппа P/H фактор-группы L/H бесконечна. Пусть F/H — силовская p'-подгруппа L/H. Существует конечная фактор-группа S/H такая, что $G/H = (L/H)(S/H)$. Если фактор-группа F/H бесконечна, то фактор-группы $(P/H)(S/H)$ и $(F/H)(S/H)$ бесконечно порождены, и поэтому коцентрализаторы подгрупп PS и FS в модуле A являются артиновыми $\mathbf{R}$-модулями. По лемме 2.1 коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Противоречие. Следовательно, фактор-группа F/H конечна. Пусть $B/H = (P/H)^p$. Если фактор-группа P/B бесконечна, то P/B бесконечно порождена, и коцентрализатор подгруппы P в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. По следствию 2.5 $G = AD(G)$. Поскольку фактор-группа G/P конечна, по лемме 2.1 коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Снова получаем противоречие. Следовательно, фактор-группа $(P/H)/(B/H)$ конечна. По лемме 3 [11] $P/H = (V/H) \times (D/H)$, где D/H — делимая подгруппа, а V/H конечна. Подгруппа D является G-инвариантной. Положим $K = D$. Так как фактор-группа G/D конечна, применим лемму 3.2.

Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFA-*группой. Предположим, что группа G содержит нормальные подгруппы $K \leq H$ такие, что фактор-группа G/H конечна, а H/K — абелева группа без кручения. Если коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, то H/K конечно порождена.*

Доказательство. По следствию 3.1 фактор-группа H/K имеет конечный 0-ранг. Пусть B/K — свободная абелева подгруппа фактор-группы H/K такая, что фактор-группа H/B периодическая. В силу конечности ранга $r_0(H/K)$ фактор-группа B/K конечно порождена. Предположим, что фактор-группа H/K бесконечно порождена. Так как G/H конечна, фактор-группа $C/K = (B/K)^{G/K}$ конечно порождена. По лемме 3.3 $|\pi(G/C)| \leq 2$. Выберем два различных простых числа r, s такие, что $r, s \notin \pi(G/C)$. Пусть $D/K = (C/K)^{rs}$. Тогда G/D — бесконечнопорожденная периодическая почти абелева группа. По построению $|\pi(G/D)| \geq 3$. Получили противоречие с леммой 3.3. Следовательно, фактор-группа H/K конечно порождена.

Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFA-*группой. Предположим, что группа G содержит нормальные подгруппы $K \leq H$ такие, что фактор-группа G/H конечна, а H/K абелева и бесконечно порождена. Если коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, то H/K черниковская.*

Доказательство. По следствию 3.1 фактор-группа H/K имеет конечный 0-ранг. Пусть T/K — периодическая часть фактор-группы H/K. По лемме 3.4 H/T конечно порождена. Тогда H/K имеет конечнопорожденную подгруппу B/K такую, что фактор-группа H/B периодическая. Поскольку G/H конечна, фактор-группа $C/K = (B/K)^{G/K}$ конечно порождена. По лемме 3.3 G/C черниковская. Отсюда следует, что фактор-группа T/K также черниковская. Пусть D/K — делимая часть фактор-группы T/K. Тогда G/D — конечнопорожденная почти абелева группа. Применим лемму 3.2.

Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — разрешимая* AFA-*группа, не являющаяся квазициклической p-группой для некоторого простого числа p. Тогда фактор-группа $G/AD(G)$ является полициклической.*

Доказательство. Пусть $D = AD(G)$. Если коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, то $G = AD(G)$. Предположим, что $G \neq AD(G)$. Пусть $D = D_0 \leq \leq D_1 \leq \ldots \leq D_n = G$ — субнормальный ряд группы G с абелевыми факторами. Рассмотрим фактор D_j/D_{j-1}, $j < n$. Если этот фактор бесконечно порожден, то подгруппа D_j также бесконечно порождена, и поэтому коцентрализатор подгруппы D_j в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. В частности, $D_j \leq AD(G)$. Отсюда следует, что фактор D_j/D_{j-1} конечно порожден для каждого $j = 1, \ldots, n-1$. Пусть $K = D_{n-1}$. Если фактор-группа G/K конечно порождена, то G/D — полициклическая. Предположим, что фактор-группа G/K бесконечно порождена. По лемме 3.5 G/K — черниковская группа. Пусть P/K — делимая часть G/K. Если $P/K \neq G/K$, то P — собственная бесконечнопорожденная подгруппа группы G. Следовательно, коцентрализатор подгруппы P в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Поэтому $P \leq AD(G)$, и фактор-группа G/P конечна. Противоречие. Следовательно, $G/K = P/K$, и тогда G/K — квазициклическая p-группа для некоторого простого числа p. Пусть $g \in G \backslash K$. Так как $g \notin AD(G)$, подгруппа $\langle g, K \rangle$ конечно порождена. Из конечности фактор-группы $\langle g \rangle K/K$ следует, что подгруппа K конечно порождена (теорема 1.41 [9]). Так как группа G не является квазициклической p-группой, $K \neq 1$. Следовательно, K содержит собственную G-инвариантную подгруппу L конечного индекса такую, что фактор-группа G/L черниковская и не является делимой. Ранее было доказано, что в этом случае фактор-группа $G/AD(G)$ конечна.

Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — бесконечнопорожденная разрешимая* AFA-*группа, $\mathbf{R}$ является либо кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, либо кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Если коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, а коцентрализатор каждой собственной конечнопорожденной подгруппы группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, то G изоморфна квазициклической q-группе для некоторого простого числа q.*

Доказательство. Поскольку G — AFA-группа, коцентрализатор каждой собственной бесконечнопорожденной подгруппы группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Следовательно, коцентрализатор каждой собственной подгруппы группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. В случае, когда $\mathbf{R}$ является кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, справедливость доказываемой теоремы следует из теоремы 1.3 [14].

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{R}$ является кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Покажем, что G не имеет собственных подгрупп конечного индекса. Предположим противное. Пусть N — собственная подгруппа группы G и индекс $|G : N|$ конечен. Тогда можно выбрать конечнопорожденную подгруппу M так, чтобы выполнялось равенство $G = MN$. Поскольку M и N — собственные подгруппы группы G, их коцентрализаторы в модуле A являются артиновыми $\mathbb{Z}$-модулями. Отсюда с учетом леммы 2.1 получаем, что коцентрализатор группы G в модуле A — артинов $\mathbb{Z}$-модуль. Противоречие. Следовательно, группа G не имеет собственных подгрупп конечного индекса.

Пусть D — коммутант группы G. Поскольку группа G не имеет собственных подгрупп конечного индекса, фактор-группа G/D бесконечна. Из леммы 2.1 следует, что абелева фактор-группа G/D не может порождаться двумя собственными подгруппами. Пусть фактор-группа G/D не является периодической и T/D — периодическая часть G/D. Тогда фактор-группа G/T порождается двумя собственными подгруппами. Получили противоречие с леммой 2.1. Следовательно, фактор-группа G/D периодическая, и поэтому G/D является квазициклической q-группой для некоторого простого числа q [15, с. 152]. Пусть H/D — произвольная конечная подгруппа G/D. Так как H — собственная подгруппа группы G, коцентрализатор подгруппы H в модуле является артиновым $\mathbb{Z}$-модулем. Следовательно, $A/C_A(H)$ — артинов $\mathbb{Z}$-модуль. Отсюда следует, что $A/C_A(H)$ — абелева группа с условием минимальности для подгрупп, и поэтому $A/C_A(H)$ является черниковской группой. Следовательно, фактор-группа $A/C_A(H)$ является объединением конечных подгрупп $A_n/C_A(H)$, $n = 1, 2, \ldots$, и для каждого $n = 1, 2, \ldots$ фактор-группа $G/C_G(A_n/C_A(H))$ конечна. Поскольку группа G не имеет собственных подгрупп конечного индекса, $G = C_G(A_n/C_A(H))$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $[G, A_n] \leq C_A(H)$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, и поэтому $[G, A] \leq C_A(H)$. Из выбора H вытекает, что $[G, A] \leq C_A(G)$, и поэтому G действует тривиально в каждом факторе ряда $0 \leq C_A(G) \leq A$. По теореме Калужнина [16, с. 144] группа G абелева. Поэтому группа G изоморфна квазициклической q-группе для некоторого простого числа q.

Теорема доказана.

Лемма 3.7 (лемма 4.1 [10])**.** *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — локально разрешимая группа, $\mathbf{R}$ — дедекиндово кольцо. Если коцентрализатор группы G в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, то группа G разрешима.*

Теорема 3.2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — локально разрешимая* AFA*-группа, $\mathbf{R}$ — дедекиндово кольцо. Тогда группа G гиперабелева.*

Доказательство. Предположим, что группа G не является разрешимой. Тогда группа G не является простой (следствие 1 к теореме 5.27 [9]). Пусть M — произвольная собственная подгруппа группы G. Если коцентрализатор подгруппы M в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, то по лемме 3.7 подгруппа M разрешима. Если коцентрализатор подгруппы M в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, M конечно порождена. Следовательно, и в этом случае подгруппа M разрешима. Пусть H — подгруппа, порожденная всеми собственными разрешимыми нормальными подгруппами группы G. Если $H = G$, то группа G гиперабелева. В случае, когда $H \neq G$, подгруппа H разрешима. Из выбора подгруппы H вытекает, что G/H — циклическая группа простого порядка, и поэтому группа G разрешима.

Теорема доказана.

Лемма 3.8. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — конечнопорожденная разрешимая* AFA*-группа. Тогда коцентрализатор подгруппы $AD(G)$ в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.*

Доказательство. Пусть $D = AD(G)$ и $\langle 1 \rangle = D_0 \leq D_1 \leq \ldots \leq D_n = D$ — производный ряд подгруппы D. Если каждый фактор D_{j+1}/D_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, конечно порожден, то подгруппа D полициклическая, и поэтому D конечно порождена. По лемме 2.1 коцентрализатор подгруппы D в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Пусть теперь для некоторого $j = 0, 1, \ldots, n-1$ фактор D_{j+1}/D_j бесконечно порожден и t — такое число, что D_t/D_{t-1} бесконечно порожден, а факторы D_{j+1}/D_j конечно порождены для каждого $j \geq t$. Отсюда следует, что фактор-группа D/D_t — полициклическая. Поскольку группа G конечно порождена, бесконечнопорожденная подгруппа D_t является собственной подгруппой G, и поэтому коцентрализатор D_t в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Поскольку фактор-группа D/D_t полициклическая, $D = KD_t$ для некоторой конечнопорожденной подгруппы K. Из включения $K \leq AD(G)$ следует, что коцентрализатор подгруппы K в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. По лемме 2.1 коцентрализатор подгруппы $AD(G)$ в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

Лемма доказана.

Теорема 3.3. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — конечнопорожденная разрешимая* AFA*-группа, $\mathbf{R}$ — дедекиндово кольцо. Если коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, то справедливы следующие утверждения*:

1) *фактор-группа $G/AD(G)$ является полициклической*;

2) *коцентрализатор подгруппы $AD(G)$ в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем*;

3) *группа G обладает рядом нормальных подгрупп $H \leq N \leq G$, таким, что фактор-группа G/N полициклическая, а фактор-группа N/H и подгруппа H нильпотентны.*

Доказательство. Справедливость первого утверждения следует из леммы 3.6, а второго — из леммы 3.8. Докажем третье утверждение. Пусть $C = C_A(AD(G))$. Так как фактор-модуль A/C является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, по теореме 7.13 [8] A имеет конечный ряд $\mathbf{R}G$-подмодулей $0 = C_0 \leq C_1 = C \leq C_2 \leq C_3 = A$ такой, что C_2/C_1 — делимый $\mathbf{R}$-модуль, представимый в виде прямой суммы конечного числа прюферовых $\mathbf{R}$-модулей, C_3/C_2 — конечнопорожденный $\mathbf{R}$-модуль. Из доказательства следствия 6.6 [8] следует существование ряда $C_2 \leq L_1 \leq L_2 \ldots \leq L_k \leq C_3$ такого, что все факторы $L_1/C_2, L_i/L_{i-1}, i = 2, \ldots, k, C_3/L_k$ — простые $\mathbf{R}G$-модули. Следовательно, A имеет конечный ряд $\mathbf{R}G$-подмодулей

$$0 = S_0 \leq S_1 = C_1 \leq S_2 = C_2 \leq S_3 \leq \ldots \leq S_m = A$$

такой, что каждый фактор $S_{i+1}/S_i, i = 2, \ldots, m-1$, является простым $\mathbf{R}G$-модулем. Согласно предложению 16.16 [12] фактор-группа $G/C_G(S_2/S_1)$ изоморфна некоторой подгруппе $GL(r, \mathbf{R}(\mathbf{P}^\infty))$. Кольцо $\mathbf{R}(\mathbf{P}^\infty)$ является целостным, поэтому $\mathbf{R}(\mathbf{P}^\infty)$ вкладывается в некоторое поле. По теореме А.И.Мальцева (лемма 3.6 [13]) фактор-группа $G/C_G(S_2/S_1)$ является расширением нильпотентной группы с помощью почти абелевой. Поскольку группа G конечно порождена, фактор-группа $G/C_G(S_2/S_1)$ является расширением нильпотентной группы с помощью полициклической. По лемме 3.5 [13] фактор-группы $G/C_G(S_{i+1}/S_i), i = 2, \ldots, m-1$, почти абелевы. Отсюда следует, что фактор-группы $G/C_G(S_{i+1}/S_i), i = 2, \ldots, m-1$, являются полициклическими. Из выбора подгруппы $C_1 = S_1$ следует, что $C_G(S_1) \geq AD(G)$. По лемме 3.6 фактор-группа $G/C_G(S_1)$ является полициклической.

Пусть $H = C_G(S_1) \cap C_G(S_2/S_1) \cap \ldots \cap C_G(S_m/S_{m-1})$. Каждый элемент подгруппы H действует тривиально в каждом факторе $S_{j+1}/S_j, j = 0, 1, \ldots, m-1$. По теореме Калужнина [16, с. 144] подгруппа H нильпотентна. По теореме Ремака

$$G/H \hookrightarrow G/C_G(S_1) \times G/C_G(S_2/S_1) \times \ldots \times G/C_G(S_m/S_{m-1}).$$

Следовательно, фактор-группа G/H является расширением нильпотентной группы N/H с помощью полициклической $(G/H)/(N/H)$, и поэтому группа G имеет ряд нормальных подгрупп $H \leq N \leq G$ такой, что фактор-группа G/N полициклическая, а фактор-группа N/H и подгруппа H нильпотентны.

Теорема доказана.

Пример. Пусть $F = \mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, $A = \oplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$, где A_n изоморфна аддитивной группе поля F для каждого $n \in \mathbb{N}$. Выберем элемент бесконечного порядка $g \in \in U(F)$. Рассмотрим бесконечную диагональную матрицу $\gamma = ||u_{jm}||_{j,m \in \mathbb{N}}$ такую, что $u_{jj} = g^j$ для каждого $j \in \mathbb{N}$ и $u_{jm} = 0$ для каждого $j \neq m$.

Пусть Σ — множество всех матриц $\alpha = ||u_{jm}||_{j,m\in\mathbb{N}}$ таких, что $u_{jm} = 0$, если $(j,m) \notin$ $\notin \{(1,2),(j,j)|j \in \mathbb{N}\}$, и $u_{jj} \neq 0$, $j \in \mathbb{N}$. Пусть $\alpha, \beta \in \Sigma$, $\alpha = ||u_{jm}||_{j,m\in\mathbb{N}}$, $\beta = ||v_{jm}||_{j,m\in\mathbb{N}}$. Тогда $\alpha\beta = ||w_{jm}||_{j,m\in\mathbb{N}}$, где $w_{jj} = u_{jj}v_{jj}, j \in \mathbb{N}$, $w_{12} = u_{11}v_{12} + u_{12}v_{22}$, и $w_{jm} = 0$, если $(j,m) \notin \{(1,2),(j,j)|j,m \in \mathbb{N}\}$. Следовательно, $\alpha\beta \in \Sigma$. Если $\alpha \in \Sigma$, то $\alpha^{-1} = ||y_{jm}||_{j,m\in\mathbb{N}}$, где $y_{jj} = u_{jj}^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$, $y_{12} = -u_{11}^{-1}u_{22}^{-1}u_{12}$, и $y_{jm} = 0$, если $(j,m) \notin \{(1,2),(j,j)|j,m \in \mathbb{N}\}$. Отсюда следует, что Σ — подгруппа $GL(F,A)$.

Рассмотрим теперь подмножество Φ группы Σ, состоящее из матриц $\alpha = ||u_{jm}||_{j,m\in\mathbb{N}}$, для которых $u_{jj} = 1$ для каждого $j \in \mathbb{N}$ и $u_{jm} = 0$ для каждого $(j,m) \neq (1,2), j \neq m$. Пусть $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha = ||u_{jm}||_{j,m\in\mathbb{N}}$, $\beta = ||v_{jm}||_{j,m\in\mathbb{N}}$. Тогда $\alpha\beta = ||w_{jm}||_{j,m\in\mathbb{N}}$, где $w_{jj} = 1$ для каждого $j \in \mathbb{N}$, $w_{12} = v_{12} + u_{12}$, и $w_{jm} = 0$ для каждого $(j,m) \neq (1,2), j \neq m$. Кроме того, $\alpha^{-1} \in \Phi$. Следовательно, Φ — подгруппа Σ, и Φ изоморфна аддитивной группе поля F. Если $\alpha = ||u_{jm}||_{j,m\in\mathbb{N}}$, $\beta = ||v_{jm}||_{j,m\in\mathbb{N}}$, $\alpha \in \Sigma, \beta \in \Phi$, то $\alpha^{-1}\beta\alpha = ||w_{jm}||_{j,m\in\mathbb{N}}$, где $w_{jj} = 1$ для каждого $j \in \mathbb{N}$, $w_{jm} = 0$ для каждого $(j,m) \neq (1,2), j \neq m$, и $w_{12} = u_{11}^{-1}u_{22}v_{12}$. Отсюда следует, что Φ — нормальная подгруппа группы Σ.

В качестве кольца $\mathbf{R}$ рассмотрим кольцо многочленов $\mathbf{R}= F[x]$. Зададим действие кольца $\mathbf{R}$ на A следующим образом. Каждый элемент из A представим в виде последовательности элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_i,\ 0,\ 0, \ldots 0, \ldots)$, где $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Положим для любого элемента $f(x) \in \mathbf{R}$, $f(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ \ldots\ + c_rx^{r-1}$,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_i,\ 0,\ 0, \ldots 0, \ldots)f(x) =$$

$$= ((c_1 + c_2 + \ldots + c_r)a_1,\ \ (c_1 + c_2 + \ldots + c_r)a_2, \ldots$$

$$\ldots, (c_1 + c_2 + \ldots + c_r)a_i, 0, 0, \ldots 0, \ldots).$$

A — $\mathbf{R}$-модуль, который не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

Пусть $\tau = ||u_{jm}||_{j,m\in\mathbb{N}} \in \Phi$, $u_{jj} = 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $u_{12} = 1$ и $u_{jm} = 0$ для всех $(j,m) \neq (1,2)$, $j \neq m$, и $G = \langle\gamma,\tau\rangle$. Тогда G представима в виде полупрямого произведения $G = T \leftthreetimes \langle\gamma\rangle$, где подгруппа T изоморфна подгруппе аддитивной группы поля F, порожденной элементами $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. По построению коцентрализатор подгруппы $\langle\gamma\rangle$ в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Отсюда следует, что коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

Имеет место изоморфизм $\mathbf{R}$-модулей $A/C_A(T) \simeq A_1$, где A_1 — однопорожденный $\mathbf{R}$-модуль. Так как $\mathrm{Ann}_{\mathbf{R}}A_1 = \langle 1-x\rangle$, по следствию 6.3 [17] модуль A_1 имеет конечный композиционный ряд. Отсюда следует, что A_1 — артинов $\mathbf{R}$-модуль, а поэтому $A/C_A(T)$ также является артиновым $\mathbf{R}$-модулем, и коцентрализатор подгруппы T в модуле A — артинов $\mathbf{R}$-модуль.

Пусть L — произвольная собственная подгруппа группы G. Если $L \leq T$, то коцентрализатор L в модуле A является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Если же подгруппа L не содержится в T, то в L можно выбрать элемент $\beta = \gamma^k\alpha, \alpha \in T$, для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Можно считать, что k — наименьшее натуральное число в записи элементов данного вида. T можно рассматривать как $\mathbb{Z}\langle\gamma\rangle$-модуль. Так как $\mathbb{Z}\langle\gamma\rangle$ — нетерово кольцо, каждый циклический $\mathbb{Z}\langle\gamma\rangle$-модуль нетеров. Следовательно, $\mathbb{Z}\langle\gamma\rangle$-модуль T нетеров. Поэтому $\mathbb{Z}\langle\beta\rangle$-модуль $T\cap L$ также нетеров. В частности,

$\mathbb{Z}\langle\beta\rangle$-модуль $T \cap L$ конечно порожден. Так как $L = \langle T \cap L, \beta\rangle$, подгруппа L конечно порождена. Тем самым доказано, что построенная группа G является AFA-группой.

1. *Phillips R. E.* The structure of groups of finitary transformations // J. Algebra. – 1988. – **119**, № 2. – P. 400 – 448.
2. *Phillips R. E.* Finitary linear groups: a survey. "Finite and locally finite groups"// NATO ASI. Ser. C. Math. Phys. Sci. – 1995. – **471**. – P. 111 – 146.
3. *Kurdachenko L. A., Muñoz-Escolano J. M., Otal J.* Antifinitary linear groups // Forum Math. – 2008. – **20**, № 1. – P. 27 – 44.
4. *Wehrfritz B. A. F.* Artinian-finitary groups over commutative rings // Ill. J. Math. – 2003. – **47**, № 1-2. – P. 551 – 565.
5. *Wehrfritz B. A. F.* Artinian-finitary groups over commutative rings and non-commutative rings // J. London Math. Soc. – 2004. – **70**, № 2. – P. 325 – 340.
6. *Wehrfritz B. A. F.* Artinian-finitary groups are locally normal-finitary // J. Algebra. – 2005. – **287**, № 2. – P. 417 – 431.
7. *Курдаченко Л. А.* О группах с минимаксными классами сопряженных элементов // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев, 1993. – С. 160 – 177.
8. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya., Semko N. N.* Insight into modules over Dedekind domains. – Kyiv: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2008. – 119 p.
9. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups // Ergeb. Math. – 1972. – Vols 1, 2.
10. *Dashkova O. Yu.* On modules over group rings of locally soluble groups with rank restrictions on some systems of subgroups // Asian-Eur. J. Math. – 2010. – **3**, № 1. – P. 45 – 55.
11. *Курдаченко Л. А.* Непериодические FC-группы и связанные классы локально нормальных групп и абелевых групп без кручения // Сиб. мат. журн. – 1986. – **27**, № 2. – С. 227 – 236.
12. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Artinian modules over group rings. – Basel etc.: Birkhäuser, 2007. – 248 p.
13. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups // Ergeb. Math. – 1973. – 229 p.
14. *Dashkova O. Yu.* On modules over group rings of locally soluble groups for a ring of p-adic integers // Algebra Discrete Math. – 2009. – № 1. – P. 32 – 43.
15. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
16. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1975. – 240 с.
17. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Modules over Dedekind domains. – Los Angeles: Nat. Univ., 1996. – 76 p.

Получено 06.02.12,
после доработки — 09.12.12