УДК 517.9

О. В. Іващук (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ В НЕФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

We obtain conditions for the existence of a periodic solution of a system with impulses at variable times.

Получены условия существования периодического решения системы с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени.

Ідею застосування методу усереднення до дослідження рівняння з імпульсною дією, що була запропонована М. М. Криловим та М. М. Боголюбовим [1], згодом було розвинено в роботах А. М. Самойленка, Ю. О. Митропольського, М. О. Перестюка та ін. і поширено на широкий клас систем з імпульсною дією. Зокрема, в роботах А. М. Самойленка, М. О. Перестюка [2–4] розглядалося питання про існування граничного розривного циклу імпульсної системи з однією точкою розриву, було встановлено умови існування періодичних розв'язків імпульсних систем, що розглядалися, та обґрунтовано використання методу усереднення Крилова – Боголюбова при дослідженні даних імпульсних систем.

Основний результат даної роботи полягає в тому, що для імпульсної системи з двома точками розриву в нефіксовані моменти часу встановлено умови на коефіцієнти та функції системи, при яких дана система має 2π-періодичнй розв'язок. При дослідженні використовувався метод усереднення Крилова – Боголюбова та результати з теорії чисельно-аналітичних методів дослідження періодичних розв'язків [5].

Розглянемо систему

$$\dot{x} = \lambda H x + \varepsilon X(x), \quad \|x\| \neq r_0, \tag{1}$$

з умовою

$$\Delta\|x\|\Big|_{\|x\|=r_0} = \begin{cases} \varepsilon I_1(x_1, x_2), & x_2 \leq 0, \\ \varepsilon I_2(x_1, x_2), & x_2 > 0, \end{cases} \tag{2}$$

де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $X(x) = \begin{pmatrix} X_1(x_1, x_2) \\ X_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $I_k(x_1, x_2) \colon \mathbb{R}^2 \to \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $\lambda > 0$.

Нехай для $X_1(x)$, $X_2(x)$ в області $D = B_R(0)$, $R > r_0$, виконуються такі умови:

A) $|X_1(x)| \leq M_1$, $|X_2(x)| \leq M_2$;

B) $X_1(x)$, $X_2(x)$ неперервні та задовольняють умову Ліпшиця по x зі сталими K_1, K_2 відповідно.

Наша задача — вказати умови на коефіцієнти системи (1), (2), при яких породжуються 2π-періодичні розв'язки цієї системи.

Виконавши заміну

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi, \\ x_2 &= -r\sin\varphi, \end{aligned} \tag{3}$$

від системи (1) перейдемо до рівняння

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varepsilon F(r,\varphi)}{\lambda + \varepsilon G(r,\varphi)}, \quad r \neq r_0, \tag{4}$$

де

$$F(r,\varphi) = X_1(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\cos\varphi - \varepsilon X_2(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\sin\varphi,$$

$$G(r,\varphi) = \frac{-1}{r}(X_1(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\sin\varphi + \varepsilon X_2(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\cos\varphi).$$

Умова (2) після заміни набере вигляду

$$\Delta r\Big|_{r=r_0} = \begin{cases} \varepsilon I_1(r\cos\varphi, -r\sin\varphi), & \varphi \in [2\pi n, \pi + 2\pi n], \\ \varepsilon I_2(r\cos\varphi, -r\sin\varphi), & \varphi \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{5}$$

Оскільки імпульсна дія відбувається при $r = r_0$, то, позначивши $\tilde{I}_k(\varphi) = I_k(r_0\cos\varphi, -r_0\sin\varphi)$, $k = 1, 2$, отримаємо

$$\Delta r\Big|_{r=r_0} = \begin{cases} \varepsilon \tilde{I}_1(\varphi), & \varphi \in [2\pi n, \pi + 2\pi n], \\ \varepsilon \tilde{I}_2(\varphi), & \varphi \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{6}$$

Припустимо, що система (4), (6) має 2π-періодичний розв'язок $r = r(\varphi)$, який на $[0, 2\pi]$ має рівно два виходи на $r = r_0$ в моменти $\varphi = \varphi_1 \in [0, \pi]$ та $\varphi = \varphi_2 \in (\pi, 2\pi)$. Це означає, що на відрізку $[0, 2\pi]$ 2π-періодичний розв'язок системи (4), (6) складається з трьох частин:

1) при $\varphi \in [0, \varphi_1]$ $r = r(\varphi, 0, C)$ — розв'язок рівняння (4) з початковою умовою $r(0) = C$, який в момент $\varphi = \varphi_1$ набуває значення $r = r_0$;

2) при $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2]$ $r = r(\varphi, \varphi_1, r_0 + \varepsilon\tilde{I}_1(\varphi_1))$ — розв'язок рівняння (4) з початковою умовою $r(\varphi_1) = r_0 + \varepsilon\tilde{I}_1(\varphi_1)$, який в момент $\varphi = \varphi_2$ набуває значення $r = r_0$;

3) при $\varphi \in (\varphi_2, 2\pi]$ $r = r(\varphi, \varphi_2, r_0 + \varepsilon\tilde{I}_2(\varphi_2))$ — розв'язок рівняння (4) з початковою умовою $r(\varphi_2) = r_0 + \varepsilon\tilde{I}_2(\varphi_2)$, який в момент $\varphi = 2\pi$ набуває значення $r = C$.

Тобто 2π-періодичний розв'язок системи (4), (6), якщо він існує, повинен задовольняти умови:

a) $\exists\varphi_1 \in [0, \pi]\colon r(\varphi_1, 0, C) = r_0$,

b) $\exists\varphi_2 \in (\pi, 2\pi)\colon r(\varphi_2, \varphi_1, r_0 + \varepsilon\tilde{I}_1(\varphi_1)) = r_0$,

c) $r(2\pi, \varphi_2, r_0 + \varepsilon\tilde{I}_2(\varphi_2)) = C$.

Рівняння (4) має розв'язок, який можна записати у вигляді

$$r = (\varphi, \varphi_0, \rho_0) = \rho_0 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} F(\rho_0, \tau)d\tau + \varepsilon^2 \ldots. \tag{7}$$

Підставивши цей розв'язок в систему a) – c), отримаємо систему рівнянь, після розв'язання якої знайдемо значення φ_1, φ_2, C:

$$C + \frac{\varepsilon}{\lambda} \int\limits_0^{\varphi_1} F(C, \tau) d\tau + \varepsilon^2 \ldots = r_0,$$

$$r_0 + \varepsilon \tilde{I}_1(\varphi_1) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r_0 + \varepsilon \tilde{I}_1(\varphi_1), \tau) d\tau + \varepsilon^2 \ldots = r_0, \tag{8}$$

$$r_0 + \varepsilon \tilde{I}_2(\varphi_2) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} F(r_0 + \varepsilon \tilde{I}_2(\varphi_2), \tau) d\tau + \varepsilon^2 \ldots = C.$$

З останнього рівняння видно, що C можна подати у вигляді розкладу по степенях ε:

$$C = r_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \varepsilon^k,$$

$$r_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \varepsilon^k + \frac{\varepsilon}{\lambda} \int\limits_0^{\varphi_1} F(C, \tau) d\tau + \varepsilon^2 \ldots = r_0,$$

$$r_0 + \varepsilon \tilde{I}_1(\varphi_1) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r_0 + \varepsilon \tilde{I}_1(\varphi_1), \tau) d\tau + \varepsilon^2 \ldots = r_0, \tag{9}$$

$$r_0 + \varepsilon \tilde{I}_2(\varphi_2) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} F(r_0 + \varepsilon \tilde{I}_2(\varphi_2), \tau) d\tau + \varepsilon^2 \ldots = r_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \varepsilon^k.$$

Звідси, розклавши по степенях ε функцію $F\left(r_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \varepsilon^k, \tau\right)$, отримаємо

$$C_1 + \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{\varphi_1} F(r_0, \tau) d\tau + \varepsilon \ldots = 0,$$

$$\tilde{I}_1(\varphi_1) + \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r_0, \tau) d\tau + \varepsilon \ldots = 0, \tag{10}$$

$$-C_1 + \tilde{I}_2(\varphi_2) + \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} F(r_0, \tau) d\tau + \varepsilon \ldots = 0.$$

Розглянемо систему (10) при $\varepsilon = 0$ у вигляді

$$C_1 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\varphi_1} F(r_0,\tau)d\tau = 0,$$

$$-C_1 + \tilde{I}_2(\varphi_2) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} F(r_0,\tau)d\tau = 0, \tag{11}$$

$$\tilde{I}_1(\varphi_1) + \tilde{I}_2(\varphi_2) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{2\pi} F(r_0,\tau)d\tau = 0.$$

Оскільки рівняння (10) є неперервними по C_1, φ_1, φ_2, ε, то для існування розв'язків C_1, φ_1, φ_2 системи (10) при малих ε достатньо, щоб система (11) мала розв'язок C_1, $\varphi_1 \in [0,\pi]$, $\varphi_2 \in (\pi, 2\pi)$ і цей розв'язок не перетворював на нуль якобіан функцій, що утворюють праві частини рівнянь системи (11), тобто

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial}{\partial\varphi_1}\int\limits_0^{\varphi_1} F(r_0,\tau)d\tau & 0 \\ -1 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial\varphi_2}\tilde{I}_2(\varphi_2) + \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial}{\partial\varphi_2}\int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} F(r_0,\tau)d\tau \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial\varphi_1}\tilde{I}_1(\varphi_1) & \dfrac{\partial}{\partial\varphi_2}\tilde{I}_2(\varphi_2) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{12}$$

Остання умова рівносильна такій:

$$\frac{1}{\lambda}\tilde{I}_2'(\varphi_2)F(r_0,\varphi_1) - \tilde{I}_1'(\varphi_1)\left(\tilde{I}_2'(\varphi_2) - \frac{1}{\lambda}F(r_0,\varphi_2)\right) \neq 0. \tag{13}$$

Отже, якщо існують C_1, $\varphi_1 \in [0,\pi]$, $\varphi_2 \in (\pi,2\pi)$ — розв'язки системи (11) — і виконується (13), то існують близькі до них розв'язки системи (10).

Знайшовши таким чином C_1, φ_1, φ_2, можна від умови (6) перейти до умови

$$\Delta r\big|_{r=r_0} = \begin{cases} \varepsilon\tilde{I}_1(\varphi_1), & \varphi = \varphi_1 + 2\pi n, \\ \varepsilon\tilde{I}_2(\varphi_2), & \varphi = \varphi_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{14}$$

2π-Періодичний розв'язок системи (4), (14) буде розв'язком системи (4), (6).

Від задачі (4), (14) перейдемо до рівняння

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varepsilon F(r,\varphi)}{\lambda + \varepsilon G(r,\varphi)} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varepsilon\tilde{I}_1(\varphi_1)\delta(\varphi - \varphi_1 - 2\pi k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varepsilon\tilde{I}_2(\varphi_2)\delta(\varphi - \varphi_2 - 2\pi k).$$

Використавши формулу

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\varphi + 2\pi k) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\cos k\varphi\right),$$

останнє рівняння зведемо до вигляду

$$\frac{dr}{d\varphi} = \varepsilon\left(\frac{F(r,\varphi)}{\lambda+\varepsilon G(r,\varphi)} + \frac{\tilde{I}_1(\varphi_1)}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\cos k(\varphi-\varphi_1)\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\tilde{I}_2(\varphi_2)}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\cos k(\varphi-\varphi_2)\right)\right), \quad \varphi \neq \varphi_i + 2\pi k, \quad i = 1,2, \quad k \geq 1. \tag{15}$$

У рівнянні (15) виконаємо заміну

$$r = \rho + \varepsilon\left(\frac{\tilde{I}_1(\varphi_1)}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_1)}{k} - \frac{\tilde{I}_2(\varphi_2)}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_2)}{k} + \frac{1}{\lambda}\widetilde{F}(\rho,\varphi)\right),$$

де $\widetilde{F}(\rho,\varphi)$ — розв'язок рівняння $\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{F}(\rho,\varphi) = F(\rho,\varphi) - \overline{F(\rho,\varphi)}$, $\overline{F(\rho,\varphi)} = F_0(\rho) = = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\rho,\varphi)d\varphi$. Розклавши праву частину по степенях ε, отримаємо рівняння

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \varepsilon\left(\frac{1}{\lambda}F_0(\rho) + \frac{\tilde{I}_1(\varphi_1)+\tilde{I}_2(\varphi_2)}{2\pi}\right) + \varepsilon^2 F_1(\rho,\varphi,\varepsilon), \quad \varphi \neq \varphi_i + 2\pi k, \quad i = 1,2, \quad k \geq 1. \tag{16}$$

Тут $F_1(\rho,\varphi,\varepsilon)$ — неперервна по ρ і кусково-неперервна по φ функція з точками розриву першого роду в $\varphi = \varphi_i + 2\pi k$, $i = 1,2$, $k \geq 1$.

Рівняння першого наближення для (16) має вигляд

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \varepsilon\left(\frac{1}{\lambda}F_0(\rho) + \frac{\tilde{I}_1(\varphi_1)+\tilde{I}_2(\varphi_2)}{2\pi}\right). \tag{17}$$

Кожен розв'язок рівняння (16) буде знаходитися в ε-околі деякого розв'язку рівняння (17). Якщо рівняння (17) має 2π-періодичний розв'язок, то рівняння (16) теж має близький до нього 2π-періодичний розв'язок.

Для дослідження рівняння (17) застосуємо чисельно-аналітичний метод. Накладемо на функцію $F(r,\varphi)$ додаткову умову:

C) $\dfrac{d}{dr}F_0(r_0) \neq 0$.

Тоді, згідно з [5], при виконанні умов A) – C) рівняння (17) на деякому відрізку $D = [\alpha,\beta]$, $0 < \alpha < \beta$, має 2π-періодичний розв'язок $\rho = r_0$. Отже, існує 2π-періодичний розв'язок $\rho = \rho_0$ рівняння (16), близький до $\rho = r_0$, а значить, система (4), (6) теж має 2π-періодичний розв'язок, перше наближення якого можна подати у вигляді

$$r = \rho_0 + \varepsilon\left(\frac{I_1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_1)}{k} - \frac{I_2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_2)}{k} + \frac{1}{\lambda}\widetilde{F}(\rho_0,\varphi)\right),$$

$$r = r_0 + \varepsilon C_1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} F(r_0,\tau)d\tau + \frac{\tilde{I}_1(\varphi_1)}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_1)}{k} - \frac{\tilde{I}_2(\varphi_2)}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_2)}{k}\right).$$

Тепер можна сформулювати наступну теорему.

Теорема. *Нехай для системи*

$$\dot{x} = \lambda H x + \varepsilon X(x), \quad \|x\| \neq r_0,$$

з умовою

$$\Delta\|x\|\Big|_{\|x\|=r_0} = \begin{cases} \varepsilon I_1, & x_2 \leq 0, \\ \varepsilon I_2, & x_2 > 0, \end{cases}$$

де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $X(x) = \begin{pmatrix} X_1(x_1, x_2) \\ X_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$, $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$, *виконуються в деякій області* $D = \{x | \alpha < \|x\| < \beta\}$ *наступні умови*:

1) $X_1(x)$, $X_2(x)$ *неперервні, обмежені та задовольняють умову Ліпшиця по* x, $I_1(x)$, $I_2(x)$ *неперервні,*

2) *існують* C_1, $\varphi_1 \in [0, \pi]$ *та* $\varphi_2 \in (\pi, 2\pi)$ — *розв'язки системи рівнянь*

$$C_1 + \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{\varphi_1} F(r_0, \tau) d\tau = 0,$$

$$- C_1 + \tilde{I}_2(\varphi_2) + \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} F(r_0, \tau) d\tau = 0,$$

$$\tilde{I}_1(\varphi_1) + \tilde{I}_2(\varphi_2) + \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{2\pi} F(r_0, \tau) d\tau = 0,$$

де $F(r, \varphi) = X_1(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\cos\varphi - X_2(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)\sin\varphi$;

3) $\dfrac{d}{dr} F_0(r_0) \neq 0$, *де* $F_0(r) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} F(r, \varphi) d\varphi$.

Тоді система має 2π*-періодичний розв'язок.*

Як приклад розглянемо рівняння Ван дер Поля з імпульсною дією

$$\frac{d^2x}{dx^2} + x = \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt}, \quad \|(x, \dot{x})\| \neq 1, \tag{18}$$

$$\Delta\|(x, \dot{x})\|\Big|_{\|(x, \dot{x})\|=1} = \begin{cases} -\varepsilon \dfrac{3\pi}{4} x^2, & \dot{x} \leq 0, \\ -\varepsilon \dfrac{\pi}{2} \dot{x}^2, & \dot{x} > 0. \end{cases} \tag{19}$$

Виконавши у (18) заміну $x = x_1$, $\dfrac{dx}{dt} = x_2$, перейдемо до системи

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= -x_1 + \varepsilon x_2(1 - x_1^2), \quad \|x\| \neq 1, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\Delta\|(x_1,x_2)\|\Big|_{\|(x_1,x_2)\|=1}=\begin{cases}-\varepsilon\dfrac{3\pi}{4}x_1^2, & x_2\le 0,\\[2mm] -\varepsilon\dfrac{\pi}{2}x_2^2, & x_2>0.\end{cases}\tag{21}$$

Для системи (20), (21) $X_1(x_1,x_2)=0$, $X_2(x_1,x_2)=x_2(1-x_1^2)$ і для будь-якого $R>r_0$ в області $D=B_R(0)$ виконуються умови A), B).

Після заміни (3) отримаємо рівняння

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{\varepsilon\left(\dfrac{r(4-r^2)}{8}-\dfrac{r}{2}\cos 2\varphi+\dfrac{r^3}{8}\cos 4\varphi\right)}{1+\varepsilon\left(\dfrac{r(2-r^2)}{4}\sin 2\varphi-\dfrac{r^3}{8}\sin 4\varphi\right)},\quad r\ne 1.\tag{22}$$

Умова (21) після заміни набере вигляду

$$\Delta r\Big|_{r=1}=\begin{cases}-\varepsilon\dfrac{3\pi}{4}\cos^2\varphi, & \varphi\in[0,\pi],\\[2mm] -\varepsilon\dfrac{\pi}{2}\sin^2\varphi, & \varphi\in(\pi,2\pi).\end{cases}\tag{23}$$

Розв'язок рівняння (22) з точністю до ε^2 має вигляд

$$r=r(\varphi,\varphi_0,1-\varepsilon C_0)=1-\varepsilon\left(C_0+\frac{3}{8}(\varphi-\varphi_0)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}(\sin 2\varphi-\sin 2\varphi_0)+\frac{1}{32}(\sin 4\varphi-\sin 4\varphi_0)\right).$$

Цей розв'язок повинен задовольняти умови:

a) $\exists\varphi_1\in[0,\pi]\colon r(\varphi_1,0,1-C_0\varepsilon)=1$,

b) $\exists\varphi_2\in(\pi,2\pi)\colon r\left(\varphi_2,\varphi_1,1-\dfrac{3\pi}{4}\cos^2\varphi_1\varepsilon\right)=1$,

c) $r\left(2\pi,\varphi_2,1-\dfrac{\pi}{2}\sin^2\varphi_2\varepsilon\right)=1-C_0\varepsilon$.

Система рівнянь для знаходження C_0 та моментів $\varphi=\varphi_1\in[0,\pi]$, $\varphi=\varphi_2\in(\pi,2\pi)$ виходу розв'язку задачі (22), (23) на $r=1$ має вигляд

$$-C_0+\frac{3}{8}\varphi_1-\frac{1}{4}\sin 2\varphi_1+\frac{1}{32}\sin 4\varphi_1=0,$$

$$-\frac{3\pi}{4}\cos^2\varphi_1+\frac{3}{8}(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)+\frac{1}{32}(\sin 4\varphi_2-\sin 4\varphi_1)=0,$$

$$-C_0-\frac{\pi}{2}\sin^2\varphi_2+\frac{3}{8}(2\pi-\varphi_2)+\frac{1}{4}\sin 2\varphi_2-\frac{1}{32}\sin 4\varphi_2=0.$$

Її розв'язком будуть $C_0=-0,036$, $\varphi_1=0,751$, $\varphi_2=4,13$.

Умови теореми виконуються і система (20), (21) має 2π-періодичний розв'язок, перше наближення якого має вигляд

$$r(\varphi)=1+\varepsilon\left(-C_0+\frac{3}{4}\cos^2\varphi_1\frac{\pi-\varphi_1}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\varphi_2\frac{\pi-\varphi_2}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi+\frac{1}{32}\sin 4\varphi-\right.$$

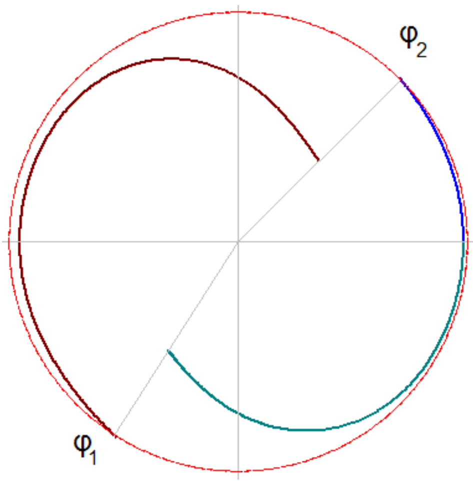
$$-\frac{3}{4}\cos^2\varphi_1\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_1)}{k}-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_2)}{k}\Bigg).$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin k\varphi}{k}$ є рядом Фур'є функції $\frac{\pi-\varphi}{2}$ при $\varphi\in(0,2\pi)$, то

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_i)}{k}=\begin{cases}-\dfrac{\pi-(\varphi_i-\varphi)}{2}, & \varphi\in[0,\varphi_i),\\ 0, & \varphi=\varphi_i,\\ \dfrac{\pi-(\varphi-\varphi_i)}{2}, & \varphi\in(\varphi_i,2\pi], \quad i=\overline{1,2}.\end{cases}$$

Отже, перше наближення розв'язку (20), (21) на $[0,2\pi]$ можна подати у вигляді (див. рисунок)

$$r(\varphi)=\begin{cases}1+\varepsilon\left(-C_0+\dfrac{3}{8}\varphi-\dfrac{1}{4}\sin 2\varphi+\dfrac{1}{32}\sin 4\varphi\right), & \varphi\in[0,\varphi_1),\\ 1+\varepsilon\left(-C_0-\dfrac{3}{4}\cos^2\varphi_1+\dfrac{3}{8}\varphi-\dfrac{1}{4}\sin 2\varphi+\dfrac{1}{32}\sin 4\varphi\right), & \varphi\in[\varphi_1,\varphi_2),\\ 1+\varepsilon\left(-C_0-\dfrac{3}{4}\cos^2\varphi_1-\dfrac{1}{2}\sin^2\varphi_2+\dfrac{3}{8}\varphi-\dfrac{1}{4}\sin 2\varphi+\dfrac{1}{32}\sin 4\varphi\right), & \varphi\in[\varphi_2,2\pi].\end{cases}$$



1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937. – 321 с.
2. *Самойленко А. М.* К вопросу обоснования метода усреднения для исследования колебаний в системах, подверженных импульсному воздействию // Укр. мат. журн. – 1967. – **19**, № 5. – С. 96 – 104.
3. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. – 1971. – Вып. 9. – С. 63 – 96.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* О методе усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1974. – **24**, № 5. – С. 411 – 418.
5. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк., 1976. – 184 с.
6. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1963. – 410 с.

Одержано 02.09.11