КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

УДК 517.984

Н. М. Асланова, М. Байрамоглы (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку)

ОБ ОБОБЩЕННОМ РЕГУЛЯРИЗОВАННОМ СЛЕДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ*

We deduce a formula for the trace of the boundary-value problem with unbounded operator coefficient and boundary conditions depending on the parameter.

Отримано формулу сліду для крайової задачі з необмеженим операторним коефіцієнтом і граничними умовами, що залежать від параметра.

В пространстве $L_2\left((0,\pi),H\right)$, где H — сепарабельное гильбертово пространство, рассмотрим задачу

$$y^{IV}(x)+Ay(x)+p(x)y(x)=\lambda y(x), \tag{1}$$

$$y(0)=0, \tag{2}$$

$$y'(\pi)+hy(\pi)=0, \tag{3}$$

$$y''(0)=0, \tag{4}$$

$$y'''(\pi)+hy''(\pi)=0, \quad h>0, \tag{5}$$

где $A=A^*>E$, E — тождественный оператор в H, $A^{-1}\in\sigma_\infty$.

Обозначим собственные значения и ортонормированные собственные функции оператора A через $\gamma_1\le\gamma_2\le\ldots$ и $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ соответственно.

Предположим, что операторная функция $p(x)$ действует при каждом x в H, слабо измерима и удовлетворяет условиям:

1) $p(x)$ имеет вторую слабую производную, $\left[p^{(l)}(x)\right]^*=p^{(l)}(x)$, $l=\overline{0,2}$ и $\left\|p^{(l)}(x)\right\|<\text{const}$ для любого $x\in[0,\pi]$;

2) $\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(p^{(l)}(x)\varphi_j,\varphi_j\right)\right|<\text{const}$, $l=\overline{0,2}$;

3) $p'(0)=p'(\pi)=0$;

4) $\int_0^\pi (p(x)f,f)\,dx=0\ \ \forall f\in H$.

Отметим, в частности, что если $p^{(l)}(x)$ из σ_1 (σ_1 — класс ядерных операторов), то условие 2 принимает вид $\left\|p^{(l)}(x)\right\|_{\sigma_1}<\text{const}$, $l=\overline{0,2}$, $\forall x\in[0,\pi]$.

При $p(x)\equiv 0$ с задачей (1)–(4) в пространстве $L_2\left((0,\pi),H\right)$ можно связать самосопряженный оператор L_0 с областью определения

* Выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики (грант № EIF-2011-1(3)-82/14-1-M-15).

$$D(L_0) = \Big\{ y(x) / \ y^{IV}(x) + Ay \in L_2\left((0,\pi), H\right),\ y(0) = 0,$$

$$y'(\pi) + hy(\pi) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(\pi) + hy'(\pi) = 0 \Big\},$$

действующий как

$$L_0 y\,(x) = y^{IV}\,(x) + Ay\,(x)\,.$$

При $p(x) \not\equiv 0$ соответствующий оператор обозначим через L: $L = L_0 + p$.

Цель настоящей работы — получить формулу первого регуляризованного следа оператора L. Следы для операторов высокого порядка изучались, например, в работах [1 – 4]. В работах [2, 4] изучены формулы следов для оператора высокого порядка с условиями Дирихле на концах отрезка. В [3] получены абстрактные формулы следов для эллиптических гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях. В работе [2] вычислен регуляризованный след для двучленного дифференциального оператора четвертого порядка с ограниченным операторным потенциалом. В данной работе изучается дифференциальный оператор четвертого порядка с неограниченным операторным потенциалом и граничными условиями, содержащими параметр. Более полную библиографию можно найти в [5].

Согласно теореме 1 из [6], оператор L_0 имеет дискретный спектр. Из условия 1 и соотношения для резольвент

$$R_\lambda(L_0) = R_\lambda(L) + R_\lambda(L) p R_\lambda(L_0)$$

следует, что L также имеет дискретный спектр. По теореме 1 из [6] если собственные числа оператора A удовлетворяют условию

$$\gamma_k \sim r k^\alpha, \qquad r > 0, \quad \alpha > 0, \tag{6}$$

то собственные числа операторов L_0 и L, обозначенные через μ_n и λ_n соответственно, ведут себя как

$$\lambda_n \sim \mu_n \sim d n^\delta, \qquad d > 0, \quad \delta = \frac{4\alpha}{4+\alpha}.$$

Поскольку оператор L_0 допускает разделение переменных, его спектр состоит из собственных значений $\lambda_{k,m} = \gamma_k + \alpha_m^4$, где α_m — решение уравнения

$$z \cos z\pi + h \sin z\pi = 0,$$

и имеет асимптотику

$$\alpha_m = \frac{1}{2} + m + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{7}$$

Ортонормированными собственными функциями являются

$$\psi_{m,k}(x) = \sqrt{\frac{4\alpha_m}{2\alpha_m\pi - \sin 2\alpha_m\pi}}\,\sin(\alpha_m x)\varphi_k.$$

Аналогично теореме 2.1 из [1] можно доказать, что при $\alpha > \dfrac{4}{3}$

$$\lim_{n_m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}\left(\lambda_n-\mu_n-(p\psi_n,\psi_n)_{L_2}\right)=0, \tag{8}$$

где $\{n_m\}$ — некоторая подпоследовательность натурального ряда.

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *При выполнении условий* $1-3$ *справедливо*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{2\alpha_m}{2\alpha_m\pi-\sin 2\alpha_m\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos\left(2\alpha_m x\right)\left(p\left(x\right)\varphi_k,\varphi_k\right)dx\right|<\infty.$$

Доказательство. Обозначим

$$(p(x)\varphi_k,\varphi_k)=p_k\left(x\right).$$

Интегрируя дважды по частям и учитывая условие 3, имеем

$$\int\limits_0^{\pi}\cos(2\alpha_m x)p_k(x)dx=\frac{1}{2\alpha_m}\sin(2\alpha_m\pi)p_k(\pi)-\frac{1}{4\alpha_m^2}\int\limits_0^{\pi}\cos(2\alpha_m x)p_k''(x)dx. \tag{9}$$

Из условия 2, асимптотики (7) и соотношения (9) получаем сходимость ряда в (8), что доказывает лемму.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть собственные числа оператора* A *удовлетворяют условию* (6), *где* $\alpha > \dfrac{4}{3}$. *Если операторная функция* $p(x)$ *удовлетворяет условиям* $1-4$, *то справедлива формула*

$$\lim_{n_m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\lambda_n-\mu_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k\left(\pi\right)-p_k\left(0\right)}{4}.$$

Доказательство. Согласно соотношению (8) и лемме 1

$$\lim_{n_m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\lambda_n-\mu_n)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\alpha_m}{2\alpha_m\pi-\sin 2\alpha_m\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin^2(\alpha_m x)p_k\left(x\right)dx=$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\alpha_m}{2\alpha_m\pi-\sin 2\alpha_m\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(2\alpha_m x)p_k(x)dx. \tag{10}$$

Обозначим

$$S_N(x)=\sum_{k=1}^{N}\frac{2\alpha_m\cos(2\alpha_m x)}{(2\alpha_m\pi-\sin(2\alpha_m\pi))}.$$

Рассмотрим комплекснозначную функцию

$$g(z) = -\frac{z\cos 2zx}{\sin^2 z\pi (z \operatorname{ctg} z\pi + h)},$$

имеющую полюсы в точках α_m и m. Вычеты в этих точках равны соответственно

$$\frac{2\alpha_m \cos 2\alpha_m x}{(2\alpha_m \pi - \sin 2\alpha_m \pi)} \qquad \text{и} \qquad -\frac{\cos 2mx}{\pi}.$$

Проинтегрируем $g\,(z)$ по прямоугольнику с вершинами в точках $\pm iB$, $A_N \pm iB$, где $B > 0$ и $A_N = N + \dfrac{1}{4}$. При таком выборе A_N имеем $\alpha_N < A_N < \alpha_{N+1}$, $N < A_N < N+1$ при больших N, где B и A_N впоследствии стремятся в бесконечность.

Поскольку $g(z)$ — нечетная функция, интеграл по части контура, находящейся на мнимой оси, равен нулю. Возьмем $z = u + i\vartheta$, тогда при больших $|\vartheta|$ и $u \geq 0$ $g(z)$ будет иметь порядок $O\left(e^{(2x-2\pi)|\vartheta|}\right)$, так что интегралы по верхней и нижней сторонам также стремятся к нулю при $B \to \infty$.

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{B\to\infty} \int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} g\,(z)\,dz = S_N\,(x) - L_N(x), \tag{11}$$

где $L_N(x) = \sum_{m=1}^{N} \dfrac{\cos 2mx}{\pi}$.

При $N \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{B\to\infty} \int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} g(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{2\cos 2zx}{\sin 2z\pi} dz + \psi(A_N, x),$$

где

$$\psi(A_N x) = O\left(\lim_{B\to\infty} \int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{\cos 2zx}{z\cos^2 z\pi} dz \right).$$

Далее,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{\cos 2zx}{\sin 2z\pi} dz = -\frac{2}{\pi} \cos 2xA_N \int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} 2xv}{\operatorname{ch} 2\pi v} dv = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos 2xA_N}{\cos \dfrac{x}{2}}.$$

Оценим $\psi(A_N x)$:

$$\int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{\cos 2zx}{z\cos^2 z\pi} dz = \int\limits_{-B}^{B} \frac{\cos(2xA_N + 2xiv)}{(A_N + iv)(1 + \cos 2\pi(A_N + iv))} idv =$$

$$= \int\limits_{-B}^{B} \frac{(A_N - iv)\cos(2xA_N + 2xiv)}{(A_N^2 + v^2)\left(1 + \dfrac{\operatorname{sh} 2v}{i}\right)} idv =$$

$$= \int\limits_{-B}^{B} \frac{(A_N - iv)\left(1 - \dfrac{\operatorname{sh} 2v}{i}\right)\cos(2xA_N + 2xiv)}{(A_N^2 + v^2)(1 + \operatorname{sh}^2 2v\pi)} idv =$$

$$= 2\int\limits_0^B \frac{A_N \cos 2xA_N \operatorname{ch} 2xv}{\left(A_N^2 + v^2\right)(1 + \operatorname{ch} 4v\pi)} idv + 2\int\limits_0^B \frac{v\cos 2xA_N \operatorname{ch} 2xv}{(A_N^2 + v^2)(1 + \operatorname{ch} 4v\pi)} dv -$$

$$-2\int\limits_0^B \frac{A_N \operatorname{sh} 2v \sin(2xA_N)\operatorname{sh} 2xv}{(A_N^2 + v^2)(1 + \operatorname{ch} 4v\pi)} dv - 2\int\limits_0^B \frac{v\sin(2xA_N)\operatorname{sh} 2xv}{(A_N^2 + v^2)(1 + \operatorname{ch} 4v\pi)} dv. \tag{12}$$

Имеем

$$\left|\int\limits_0^B \frac{A_N \cos 2xA_N \operatorname{ch} 2xv}{\left(A_N^2 + v^2\right)(1 + \operatorname{ch} 4v\pi)} dv\right| < \frac{1}{A_N}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh} 2xv}{\operatorname{ch} 4v\pi} dv < \frac{1}{A_N}\frac{\pi}{8}\sec\frac{\pi x}{4}, \tag{13}$$

$$\left|\int\limits_0^B \frac{v\cos 2xA_N \operatorname{ch} 2xv}{\left(A_N^2 + v^2\right)(1 + \operatorname{ch} 4v\pi)} dv\right| < \int\limits_0^B \frac{v\cos 2xA_N \operatorname{ch} 2xv}{2A_N v(1 + \operatorname{ch} 4v\pi)} dv <$$

$$< \frac{1}{2A_N}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch} 2xv}{\operatorname{ch} 4v\pi} dv = \frac{1}{2A_N}\frac{1}{8}\sec\frac{x}{4}, \tag{14}$$

$$\left|\int\limits_0^B \frac{v\sin(2xA_N)\operatorname{sh} 2xvdv}{\left(A_N^2 + v^2\right)(1 + \operatorname{ch} 4v\pi)} dv\right| < \frac{\mathrm{const}}{A_N}\sec\frac{x}{4}. \tag{15}$$

Взяв $B = \sqrt{A_N}$, получим

$$\left|\int\limits_0^B \frac{A_N \operatorname{sh} 2v \sin(2xA_N)\operatorname{sh} 2xv}{(A_N^2 + v^2)(1 + \operatorname{ch} 4v\pi)} dv\right| < \int\limits_0^B \frac{A_N}{A_N^2 + v^2} dv = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{A_N}}. \tag{16}$$

Из (12) – (16) получаем, что

$$\lim_{N\to\infty} \psi(A_N x) = 0. \tag{17}$$

Из соотношения [7, с. 157]

$$\int \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx = 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\frac{\sin 2kx}{2^k} + (-1)^n x \tag{18}$$

имеем

$$\int \frac{\cos\left(4N+1\right)\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}dx = 4\sum_{k=1}^{2N}(-1)^{2N-k}\frac{\sin kx}{2^k} + x,$$

так что

$$\lim_{N\to\infty} -\int_0^{\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{\cos 2xA_N}{\cos\dfrac{x}{2}}p_k(x)dx = -\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos\left(2N+\dfrac{1}{2}\right)x}{\cos\dfrac{x}{2}}p_k(x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos(4N+1)\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}\big[p_k(x)-p_k(\pi)+p_k(\pi)\big]dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{(x-\pi)\cos(4N+1)\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}\ \frac{p_k(x)-p_k(\pi)}{x-\pi}dx -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos(4N+1)\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}p_k(\pi)dx. \tag{19}$$

Из условия 1 получаем

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{(x-\pi)\cos(4N+1)\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}\ \frac{p_k(x)-p_k(\pi)}{x-\pi}dx = 0,$$

а из (18) имеем

$$-\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos(4N+1)\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}\ p_k(\pi)dx = -\frac{1}{2}p_k(\pi). \tag{20}$$

С другой стороны,

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}L_N(x)p_k(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos 2mx}{\pi}p_k(x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cos m\cdot 0\int_0^{\pi}p_k(x)\cos mx\,dx + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cos m\pi\int_0^{\pi}p_k(x)\cos mx\,dx\right) =$$

$$= \frac{p_k(0)+p_k(\pi)}{4}. \tag{21}$$

Учитывая (17), (19), (20), (21) в (11), находим

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi S_N\,(x)\,p_k(x)dx=\frac{p_k(0)+p_k(\pi)}{4}-\frac{p_k(\pi)}{2}=\frac{p_k(0)-p_k(\pi)}{4}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty\frac{2\alpha_m}{2\alpha_m\pi-\sin 2\alpha_m\pi}\int\limits_0^\pi\cos 2\alpha_m x p_k(x)dx=\sum_{k=1}^\infty\frac{p_k(0)-p_k(\pi)}{4}. \tag{22}$$

Итак, с учетом (22) в (10) для регуляризованного следа оператора L получим формулу

$$\lim_{n_m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\lambda_n-\mu_n)=\sum_{k=1}^\infty\left[\frac{p_k(\pi)-q_k(0)}{4}\right]. \tag{23}$$

Теорема доказана.

Замечание. В частности, если $p(0),\,p(\pi)\in\sigma_1$, то формула (23) принимает вид

$$\lim_{n_m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\lambda_n-\mu_n)=\frac{\operatorname{tr}p\,(\pi)-\operatorname{tr}p(0)}{4}.$$

1. *Байрамоглы М.* О регуляризованном следе дифференциального оператора $2n$-го порядка с неограниченным операторным коэффициентом // Спектральная теория дифференциальных операторов и ее применение. – 1987. – № 8. – С. 15 – 40.
2. *Erdal Cul.* The trace formula for a differential operator of fourth order with bounded operator coefficients and two terms // Turk. J. Math. – 2004. – **28**. – P. 231 – 254.
3. *Дубровский В. В.* Абстрактные формулы регуляризованных следов эллиптических гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 12. – С. 2164 – 2166.
4. *Алмамедов М. С., Байрамоглы М., Катанова В. И.* Формулы следов для дифференциального уравнения четного порядка с неограниченным операторным коэффицентом // Докл. АН СССР. – 1991. – **317**, № 3. – С. 521 – 529.
5. *Садовничий В. А., Подольский В. Б.* Следы операторов // Успехи мат. наук. – 2006. – **61**, № 5. – С. 89 – 156.
6. *Горбачук В. И.* Об асимптотике собственных значений граничных для дифференциальных уравнений в пространстве вектор-функций // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 5. – С. 657 – 663.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

Получено 20.12.12