УДК 517.5

В. А. Войтович (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ НАБЛИЖЕНЬ КЛАСІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ АНАЛОГАМИ СУМ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

We obtain two-sided estimates for the exact upper bounds of approximations by the interpolation analogs of the de la Vallée Poussin sums on the classes of 2π-periodic functions $C^{\psi}_{\beta,s}$ specified by the sequences $\psi(k)$ and shifts of the argument β_k under the condition that the sequences $\psi(k)$ satisfy the d'Alembert D_q, $q \in (0,1)$, condition. Similar estimates are obtained for the classes $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ generated by convex moduli of continuity $\omega(t)$. Under the conditions $n-p\to\infty$ and $p\to\infty$, the indicated estimates turn into asymptotic equalities.

Получены двусторонние оценки для точных верхних граней приближений интерполяционными аналогами сумм Валле Пуссена на классах 2π-периодических функций $C^{\psi}_{\beta,s}$ которые задаются последовательностями $\psi(k)$ и сдвигом аргумента β, $\beta\in\mathbb{R}$, при условии, что последовательности $\psi(k)$ удовлетворяют условию Даламбера $\mathcal{D}_q$, $q\in(0,1)$. Аналогичные оценки получены для классов $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, порождаемых выпуклыми модулями непрерывности $\omega(t)$. При условии $n-p\to\infty$ и $p\to\infty$ указанные оценки превращаются в асимптотические равенства.

Позначимо через $L_s,\ 1\leqslant s<\infty$, простір сумовних на $(0,2\pi)$ в s-му степені 2π-періодичних функцій із нормою $\|f\|_s=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^s\,dt\right)^{1/s}$, L_∞ — простір вимірних і істотно обмежених 2π-періодичних функцій з нормою $\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_t|f(t)|$, C — простір неперервних 2π-періодичних функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_C=\max_t|f(t)|$.

Розглянемо класи 2π-періодичних функцій $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, які введені О. І. Степанцем [1, с. 137]. Нехай $\varphi\in L_1$ і

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

— її ряд Фур'є. Розглянемо довільну послідовність дійсних чисел $\psi(k)$ і довільне фіксоване дійсне число β, $\beta\in\mathbb{R}$. Якщо ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\left(a_k\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції f, то цю функцію називають (ψ,β)-інтегралом функції φ і позначають через $\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi$. Множину (ψ,β)-інтегралів усіх функцій $\varphi\in\mathfrak{N}\subset L_1$ позначають через $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Покладемо $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}=L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}\bigcap C$. В даній роботі роль $\mathfrak{N}$ відіграватимуть множини

$$U^0_s=\left\{\varphi\in L_s:\|\varphi\|_s\le 1,\quad\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt=0\right\},\qquad 1\le s\le\infty,$$

а також

$$H^0_\omega=\left\{\varphi\in C\colon\omega(\varphi;t)\le\omega(t),\quad\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt=0\right\},$$

де $\omega(\varphi;\cdot)$ — рівномірний модуль неперервності функції φ, $\omega(\cdot)$ — фіксований опуклий модуль неперервності. Для зручності покладемо $C^{\psi}_{\beta,s} := C^{\psi}_{\beta}U^0_s$ і $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega} := C^{\psi}_{\beta}H^0_{\omega}$.

При кожному фіксованому $q \in (0,1)$ через $\mathcal{D}_q$ позначимо множину всіх послідовностей $\psi(k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, для яких виконується умова

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q.$$

Далі будемо розглядати класи $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ при $\psi(k) \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$. У цьому випадку (див., наприклад, [1, с. 351]) множини $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ складаються з 2π-періодичних функцій f, що допускають регулярне продовження у фіксовану смугу $|\mathrm{Im} z| \le \ln\dfrac{1}{q}$ комплексної площини, тобто з аналітичних функцій. Функції з класів $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset L_1$, $\psi \in D_q$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, можуть бути зображені у вигляді згортки з твірним ядром

$$f(x) = \mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\Psi_{\beta}(t)dt, \qquad \varphi \in \mathfrak{N},$$

де

$$\Psi_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0,1), \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Прикладами ядер $\Psi_{\beta}(t)$, коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умову D_q, є ядро Неймана

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k}\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0,1), \qquad \beta \in \mathbb{R},$$

та полігармонічні ядра Пуассона

$$P_{q,\beta}(m,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_{q,m}(k)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \beta \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де

$$\psi_{q,m}(k) = q^k\left(1 + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{(1-q^2)^j}{j!2^j}\prod_{l=0}^{j-1}(k+2l)\right), \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad q \in (0,1).$$

Зауважимо, що у випадку $m = 1$ ядра вигляду (1) є відомими ядрами Пуассона

$$P_{q,\beta}(t) = P_{q,\beta}(1,t) = \sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0,1), \qquad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Класи $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, що породжуються ядрами (2), є класами інтегралів Пуассона і позначаються через $C^{q}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Нехай f належить C. Через $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку $n-1$, який інтерполює функцію f у точках $x^{(n-1)}_k = \dfrac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\widetilde{S}_{n-1}(f;x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)}), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Як відомо, інтерполяційний тригонометричний поліном $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$ можна записати у вигляді (див., наприклад, [2, с. 13, 14])

$$\widetilde{S}_{n-1}(f;x) = \frac{a_0^{(n-1)}}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k^{(n-1)}\cos kx + b_k^{(n-1)}\sin kx),$$

де

$$a_k^{(n-1)} = \frac{2}{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-2} f(x_j^{(n-1)})\cos kx_j^{(n-1)}, \qquad k = 0,1,\ldots,n-1, \tag{3}$$

$$b_k^{(n-1)} = \frac{2}{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-2} f(x_j^{(n-1)})\sin kx_j^{(n-1)}, \qquad k = 1,2,\ldots,n-1, \tag{4}$$

— коефіцієнти Фур'є – Лагранжа функції f, по системі вузлів $x_k^{(n-1)}$.

Розглянемо поліноми

$$\widetilde{V}_{n,p}(f;x) = \frac{a_0^{(n-1)}}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}(a_k^{(n-1)}\cos kx + b_k^{(n-1)}\sin kx),$$

де

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant k \leqslant n-p, \\ 1 - \dfrac{k-n+p}{p}, & n-p+1 \leqslant k \leqslant n, \end{cases}$$

$p \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le n$, а $a_k^{(n-1)}$ і $b_k^{(n-1)}$ визначені за допомогою (3) та (4) відповідно. Ці поліноми називають (див., наприклад, [3, с. 65]) інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена з параметрами n та p. При $p = 1$ поліноми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ є інтерполяційними тригонометричними поліномами $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$.

У загальному випадку поліноми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ записуються у вигляді

$$\widetilde{V}_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}\widetilde{S}_k^{(n-1)}(f;x),$$

де

$$\widetilde{S}_k^{(n-1)}(f;x) = \frac{a_0^{(n-1)}}{2} + \sum_{j=1}^{k}(a_j^{(n-1)}\cos jx + b_j^{(n-1)}\sin jx)$$

— частинна сума порядку k тригонометричного інтерполяційного полінома $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$. Зазначимо, що звичайні суми Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ з параметрами n та p виражаються через частинні суми ряду Фур'є $S_k(f;x)$ порядку k за допомогою рівностей

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_k(f;x).$$

Метою даної роботи є відшукання двосторонніх оцінок величин

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,s}; \widetilde{V}_{n,p}; x\right) = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,s}} \left|f(x) - \widetilde{V}_{n,p}(f;x)\right| \tag{5}$$

та

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; \widetilde{V}_{n,p}; x\right) = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}} \left|f(x) - \widetilde{V}_{n,p}(f;x)\right| \tag{6}$$

при досить великих $n,$ якщо $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$. Отримані результати показують порядок спадання величин (5) та (6) при $n - p \to \infty$.

Дослідження апроксимативних характеристик сум $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ для періодичних функцій починається з роботи С. Н. Бернштейна [4], в якій було встановлено нерівність

$$\left|f(x) - \widetilde{V}_{n,p}(f;x)\right| \le \left(1 + \sqrt{\frac{2n-p}{p}}\right) E_{n-p}(f),$$

де $E_{n-p}(f)$ — найкраще наближення функції f поліномами порядку $n-p-1$. У подальшому цими питаннями займалися С. М. Нікольський [5], Й. М. Ганзбург [6]. С. М. Нікольський встановив, що має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\left(W^r_{\infty}; \widetilde{S}_{n-1}; x\right) = \frac{8}{\pi^2} K_r \frac{\ln n}{n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| + O(1)n^{-r},$$

де W^r_{∞} — множина неперервних періодичних функцій $f(\cdot)$, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го, $r \in \mathbb{N}$, порядку включно і такі, що майже скрізь $\|f^{(r)}(x)\|_{\infty} \leqslant 1$. Дана оцінка є рівномірною відносно n та x, а K_r — константи Фавара, які означаються рівністю

$$K_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}. \tag{7}$$

Й. М. Ганзбург встановив, що при $n \to \infty$ і $1 \le p \le n\theta,\ \theta < 1$, справджується асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(W^r_{\infty}; \widetilde{V}_{n,p}; x) = \frac{2K_r}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \frac{1}{n^r} \ln\frac{n}{p} + O(1)n^{-r},$$

де K_r — константи Фавара (7), а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно n та x.

Перейдемо до формулювання оцінок величини (5). Для цього введемо наступні позначення:

$$K_{q,p}(u) = 2^{-1/u}\left\|\frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos t + q^2}\right\|_u, \qquad q\in(0,1), \qquad p \in \mathbb{N}, \qquad 1 \le u \le \infty, \tag{8}$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(\psi) = \sup_{k\ge m}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|, \tag{9}$$

$$M^{(k)}(n,p) = M^{(k)}(\psi,s,n,p) = \frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}} K_{q,p}(s')\Big(1 + (-1)^k(q+\varepsilon_{n-p+1})^{p-1}\Big)\times$$

$$\times\left(1 + (-1)^k \max\left\{\frac{1}{\sqrt{n-p+1}}, \sqrt{\varepsilon_{n-p+1}}\right\}\right), \qquad 1 \le s \le \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1, \quad k = 1,2. \tag{10}$$

Теорема 1. *Нехай* $\psi \in D_q$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq s \leq \infty$, n, $p \in \mathbb{N}$, $2 \leq p \leq n$, $\lim_{n\to\infty} n-p=\infty$. *Тоді для довільних* $x \in \mathbb{R}$ *та для всіх* n, *починаючи з деякого* $n_0 = n_0(\psi, p)$, *справджується двостороння оцінка*

$$M^{(1)}(n,p)\frac{\psi(n-p+1)}{p} \leq \mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; \widetilde{V}_{n,p}; x) \leq M^{(2)}(n,p)\frac{\psi(n-p+1)}{p}, \tag{11}$$

де $M^{(k)}(n,p)$, $k=1,2$, *означено рівностями* (10).

***Зауваження* 1.** Оскільки

$$\lim_{n-p\to\infty} M^{(k)}(n,p) = \frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+\frac{1}{s'}}} K_{q,p}(s')(1+(-1)^k q^{p-1}), \qquad k=1,2, \tag{12}$$

то співвідношення (11) дозволяє оцінити порядок спадання величини $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; \widetilde{V}_{n,p}; x)$ при $n-p\to\infty$. Крім того, як видно з (12),

$$\lim_{\substack{n-p\to\infty \\ p\to\infty}} M^{(k)}(n,p) = \frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+\frac{1}{s'}}} K_{q,p}(s'), \qquad k=1,2,$$

і, отже, при $n-p\to\infty$ і $p\to\infty$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; \widetilde{V}_{n,p}; x) \cong \frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+\frac{1}{s'}}} K_{q,p}(s')\frac{\psi(n-p+1)}{p}. \tag{13}$$

Асимптотична формула (13) випливає з асимптотичної рівності (13) роботи [13].

Доведення. Нехай $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset L_1$. З огляду на формулу (47) із роботи [8] для довільних $x \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x) = f(x) - \widetilde{V}_{n,p}(f;x) = \rho_{n,p}(f;x) -$$

$$-\frac{1}{\pi p}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t+x) \sum_{m=n-p}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=\nu(2n-1)-m}^{\nu(2n-1)+m} \psi(k)\cos\left(kt + (2n-1)\nu x + \frac{\beta\pi}{2}\right)dt, \tag{14}$$

де $\rho_{n,p}(f;x) = f(x) - V_{n,p}(f;x)$. Використовуючи зображення (2.2.11) із роботи [7, с. 79], величину $\rho_{n,p}(f;x)$ можна зобразити у вигляді

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi p}\int_{-\pi}^{\pi} \delta_{n-p}(t+x) \sum_{m=n-p}^{n-1} \sum_{k=m+1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dt, \tag{15}$$

де $\delta_{n-p}(\tau) = \varphi(\tau) - t_{n-p}(\tau)$, $t_{n-p}(\tau)$ — довільний тригонометричний поліном порядку $n-p$.

З (14) та (15), враховуючи ортогональність функції

$$\Phi_{n,p,\psi,\beta,x}(t) = \sum_{m=n-p}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=\nu(2n-1)-m}^{\nu(2n-1)+m} \psi(k)\cos\left(kt + (2n-1)\nu x + \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

будь-якому тригонометричному поліному порядку $n-p$ змінної t, отримуємо

$$\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta_{n-p}(t+x) \sum_{m=n-p}^{n-1}\sum_{k=m+1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta_{n-p}(t+x)\sum_{m=n-p}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=\nu(2n-1)-m}^{\nu(2n-1)+m}\psi(k)\cos\left(kt+(2n-1)\nu x+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt. \qquad (16)$$

Далі запишемо (16) у вигляді

$$\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta_{n-p}(t+x) \sum_{m=n-p}^{n-1}\sum_{k=m+1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta_{n-p}(t+x)\sum_{m=n-1}^{n+p-2}\sum_{k=m+1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt+(2n-1)x+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt+R_{n,p}(x), \qquad (17)$$

де

$$R_{n,p}(x) = \frac{1}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta_{n-p}(t+x)\left(\sum_{m=3n-p-1}^{3n-2}\sum_{k=m+1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt+(2n-1)x+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{m=n-p}^{n-1}\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{k=\nu(2n-1)-m}^{\nu(2n-1)+m}\psi(k)\cos\left(kt+(2n-1)\nu x+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)dt.$$

Використовуючи той факт, що $f=\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi$ для довільних $\varphi\in\mathfrak{N}\subset L_1$, з огляду на (15) та (17) можемо записати рівність

$$\widetilde{\rho}_{n,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi;x) = \rho_{n,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi;x) - \rho_{n+p-1,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\gamma}\varphi;x) + R_{n,p}(x), \qquad (18)$$

де $\gamma := \beta + \dfrac{(2n-1)2x}{\pi}$.

Нехай f належить $C^{\psi}_{\beta,s}$. Оцінимо швидкість спадання до нуля величини $|R_{n,p}(x)|$. Позначимо через t^*_{n-p} поліном найкращого наближення порядку $n-p$ функції φ у просторі L_s, тобто такий, що

$$\|\varphi(t)-t^*_{n-p}(t)\|_s = E_{n-p+1}(\varphi)_s = \inf_{t_{n-p}\in\mathcal{T}_{2(n-p)-1}}\|\varphi(t)-t_{n-p}(t)\|_s.$$

Враховуючи нерівність Гельдера (див., наприклад, [3, с. 391])

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)K(t)dt \le \|g\|_s\|K\|_{s'}, \qquad g\in L_s, \qquad K\in L_{s'}, \qquad 1\le s\le\infty, \qquad \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1,$$

та вибираючи в $\delta_{n-p}(\tau)=f(\tau)-t_{n-p}(\tau)$ в якості $t_{n-p}(\tau)$ поліном $t^*_{n-p}(\tau)$, для довільних $x\in\mathbb{R}$ отримуємо

$$|R_{n,p}(x)| \le \frac{1}{\pi} E_{n-p+1}(\varphi)_s \left\| \frac{1}{p} \sum_{m=3n-p-1}^{3n-2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + (2n-1)x + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{p} \sum_{m=n-p}^{n-1} \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{k=\nu(2n-1)-m}^{\nu(2n-1)+m} \psi(k) \cos\left(kt + (2n-1)\nu x + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{s'} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} E_{n-p+1}(\varphi)_s \left(\left\| \frac{1}{p} \sum_{m=3n-p-1}^{3n-2} \sum_{k=3n-p}^{\infty} \psi(k) \right\|_{s'} + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{1}{p} \sum_{m=n-p}^{n-1} \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{k=\nu(2n-1)-n+1}^{\nu(2n-1)+n-1} \psi(k) \right\|_{s'} \right) =$$

$$= \frac{2^{1/s'}}{\pi^{1/s}} E_{n-p+1}(\varphi)_s \left(\sum_{k=3n-p}^{\infty} \psi(k) + \sum_{k=3n-1}^{\infty} \psi(k) \right) \le 4E_{n-p+1}(\varphi)_s \sum_{k=3n-p}^{\infty} \psi(k). \tag{19}$$

З леми 1 роботи [9] випливає, що якщо $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, то виконується нерівність

$$\sum_{k=m}^{\infty} \psi(k) \le \psi(m) \left(\frac{1}{1-q} + \frac{\varepsilon_m}{(1-q)(1-q-\varepsilon_m)} \right), \tag{20}$$

де ε_m — величина, означена формулою (9), і для неї виконується умова $\varepsilon_m < 1-q$. Тому, використовуючи співвідношення (19) та (20), маємо

$$|R_{n,p}(x)| \le 4E_{n-p+1}(\varphi)_s \psi(3n-p) \left(\frac{1}{1-q} + \frac{\varepsilon_{3n-p}}{(1-q)^2} \right). \tag{21}$$

Послідовність ε_m монотонно не зростає і прямує до нуля при $m \to \infty$. Тому при достатньо великих n, починаючи з деякого $n_1 = n_1(\psi; p)$,

$$\varepsilon_{3n-p} \le \varepsilon_{n-p+1} < \frac{1-q}{2}. \tag{22}$$

Оскільки $E_{n-p+1}(\varphi)_s \le 1$ при $\|\varphi\|_s \le 1$, то з (21) та (22) при всіх $n > n_1$ отримуємо

$$|R_{n,p}(x)| \le 6 \frac{\psi(3n-p)}{1-q}. \tag{23}$$

Отже, з (18) та (23) випливає, що для всіх $n > n_1$ виконуються нерівності

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi; x)| \le |\rho_{n,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi; x) - \rho_{n+p-1,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\gamma}\varphi; x)| + 6\frac{\psi(3n-p)}{1-q}, \tag{24}$$

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi; x)| \ge |\rho_{n,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi; x) - \rho_{n+p-1,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\gamma}\varphi; x)| - 6\frac{\psi(3n-p)}{1-q}. \tag{25}$$

Теорема 2 з роботи [10] стверджує, що коли $\psi \in D_q$, $0 < q < 1$, $1 \le s \le \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, m, $p \in \mathbb{N}$ і $2 \le p \le m$, то має місце асимптотична при $m - p \to \infty$ рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\alpha,s};V_{m,p})=\sup_{\varphi\in U^0_s}|\rho_{m,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\alpha}\varphi;x)|=\frac{\psi(m-p+1)}{p}\Bigg(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s')+$$

$$+O(1)\left(\frac{1}{(m-p+1)(1-q)^3}+\frac{\varepsilon_{m-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p,\frac{1}{1-q}\right\}\right)\Bigg), \tag{26}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів. Зазначимо, що рівності (26) у випадку, коли $\psi(k)=q^k$, тобто для класів інтегралів Пуассона, встановлено в роботі [11].

Легко бачити, що мають місце співвідношення

$$\sup_{\varphi\in U^0_s}|\rho_{n,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi;x)|-\sup_{\varphi\in U^0_s}|\rho_{n+p-1,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\gamma}\varphi;x)|\le$$

$$\le\sup_{\varphi\in U^0_s}|\rho_{n,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi;x)-\rho_{n+p-1,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\gamma}\varphi;x)|\le$$

$$\le\sup_{\varphi\in U^0_s}|\rho_{n,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi;x)|+\sup_{\varphi\in U^0_s}|\rho_{n+p-1,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\gamma}\varphi;x)|. \tag{27}$$

Знайдемо спочатку оцінку зверху величини $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s};\widetilde{V}_{n,p};x)$. Переходячи в обох частинах (24) до точних верхніх меж по класах U^0_s з урахуванням (26) та (27), отримуємо

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s};\widetilde{V}_{n,p};x)\le\frac{\psi(n-p+1)+\psi(n)}{p}\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s')+$$

$$+K\frac{\psi(n-p+1)+\psi(n)}{p}\left(\frac{1}{(n-p+1)(1-q)^3}+\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p,\frac{1}{1-q}\right\}\right). \tag{28}$$

Тут і далі K є абсолютною сталою, різною в різних співвідношеннях.

Неважко переконатися, що величина

$$\frac{1}{n-p+1}+\varepsilon_{n-p+1} \tag{29}$$

є нескінченно малою більш високого порядку мализни відносно

$$g_{n-p+1}(\psi)=\max\left\{\frac{1}{\sqrt{n-p+1}},\sqrt{\varepsilon_{n-p+1}}\right\} \tag{30}$$

при $n-p\to\infty$. Тому існує $n_3'=n_3'(\psi;p)\ge n_2$ таке, що для всіх $n\ge n_3'$ з (28) випливає оцінка

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s};\widetilde{V}_{n,p};x)\le$$

$$\le\frac{\psi(n-p+1)}{p}\left(1+\frac{\psi(n)}{\psi(n-p+1)}\right)\Big(1+g_{n-p+1}(\psi)\Big)\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s'), \tag{31}$$

де величини $K_{q,p}(s')$ та $g_m(\psi)$ означено формулами (8) та (30) відповідно.

Оцінимо величину $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s};\widetilde{V}_{n,p};x)$ знизу. Переходячи в обох частинах (25) до точних верхніх меж по класах U^0_s з урахуванням (26) та (27), отримуємо

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s};\widetilde{V}_{n,p};x) \geq \frac{\psi(n-p+1)-\psi(n)}{p}\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s') -$$

$$-K\frac{\psi(n-p+1)+\psi(n)}{p}\left(\frac{1}{(n-p+1)(1-q)^3}+\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p,\frac{1}{1-q}\right\}\right). \qquad (32)$$

Оскільки величина (29) є нескінченно малою відносно (30) при $n-p\to\infty$, то існує $n''_3 = n''_3(\psi;p) \geq n_2$ таке, що для всіх $n \geq n''_3$ з (32) випливає

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s};\widetilde{V}_{n,p};x) \geq$$

$$\geq \frac{\psi(n-p+1)}{p}\left(1-\frac{\psi(n)}{\psi(n-p+1)}\right)\Big(1-g_{n-p+1}(\psi)\Big)\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s'), \qquad (33)$$

де величини $K_{q,p}(s')$ та $g_m(\psi)$ означено формулами (8) та (30) відповідно.

З (31) та (33) випливає, що існує номер $n_3 = n_3(\psi;p) = \max\{n'_3, n''_3\}$ такий, що для всіх $n \geq n_3$ справджується двостороння оцінка

$$\frac{\psi(n-p+1)}{p}\left(1-\frac{\psi(n)}{\psi(n-p+1)}\right)\Big(1-g_{n-p+1}(\psi)\Big)\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s') \leq$$

$$\leq \mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s};\widetilde{V}_{n,p};x) \leq$$

$$\leq \frac{\psi(n-p+1)}{p}\left(1+\frac{\psi(n)}{\psi(n-p+1)}\right)\Big(1+g_{n-p+1}(\psi)\Big)\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s'), \qquad (34)$$

де величини $K_{q,p}(s')$ та $g_m(\psi)$ означено формулами (8) та (30) відповідно.

Насамкінець оцінимо величину $\dfrac{\psi(n)}{\psi(n-p+1)}$. Для всіх n, починаючи з деякого n_1, має місце оцінка

$$\frac{\psi(n)}{\psi(n-p+1)} = \prod_{k=n-p+1}^{n-1}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \leq \prod_{k=n-p+1}^{n-1}(q+\varepsilon_k) \leq \prod_{k=n-p+1}^{n-1}(q+\varepsilon_{n-p+1}) =$$

$$= (q+\varepsilon_{n-p+1})^{p-1}. \qquad (35)$$

Таким чином, використовуючи (34), (35) та позначення (10), отримуємо, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ та всіх $n > n_0(\psi;p) \geq n_3$ має місце (11).

Теорему доведено.

Розглянемо тепер оцінки величини (6). Для формулювання результату введемо такі позначення:

$$e_m = \int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{m}\right)\sin t dt, \qquad (36)$$

$$M^{(k)}(n,p) = M^{(k)}(n,p,\psi) = \frac{4}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)\Big(1+(-1)^k(q+\varepsilon_{n-p+1})^{p-1}\Big)\times$$

$$\times\left(1+(-1)^k\max\left\{\frac{1}{\sqrt{(n-p+1)\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)}},\sqrt{\varepsilon_{n-p+1}}\right\}\right),\qquad k=3,4,\tag{37}$$

де $\mathbf{K}(\rho)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2 t}}$ — повний еліптичний інтеграл першого роду.

Теорема 2. *Нехай $\psi\in D_q$, $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $n,\ p\in\mathbb{N}$, $2\le p\le n$, $\lim_{n\to\infty}n-p=\infty$ і $\omega(t)$ — опуклий догори модуль неперервності, що задовольняє умову $\lim_{t\to 0}\dfrac{\omega(t)}{t}=\infty$. Тоді для довільних $x\in\mathbb{R}$ та всіх n, починаючи з деякого $n_0'=n_0'(\psi,p)$, справджується двостороння оцінка*

$$M^{(3)}(n,p)\frac{\psi(n-p+1)}{p}e_{n-p+1}\le\mathcal{E}(C^\psi_\beta H_\omega;\widetilde{V}_{n,p};x)\le M^{(4)}(n,p)\frac{\psi(n-p+1)}{p}e_{n-p+1},\tag{38}$$

де величини e_{n-p+1} та $M^{(k)}(n,p)$ означено формулами (36) *та* (37) *відповідно.*

Зауваження 2. Оскільки

$$\lim_{n-p\to\infty}M^{(k)}(n,p)=\frac{4}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)(1+(-1)^kq^{p-1}),\qquad k=3,4,\tag{39}$$

то співвідношення (38) дозволяє оцінити порядок спадання величини $\mathcal{E}(C^\psi_\beta H_\omega;\widetilde{V}_{n,p};x)$ при $n-p\to\infty$. Крім того, як видно з (39),

$$\lim_{\substack{n-p\to\infty\\ p\to\infty}}M^{(k)}(n,p)=\frac{4}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p),\qquad k=3,4,$$

і, отже, при $n-p\to\infty$ і $p\to\infty$

$$\mathcal{E}(C^\psi_\beta H_\omega;\widetilde{V}_{n,p};x)\cong\frac{4}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)\frac{\psi(n-p+1)}{p}.\tag{40}$$

Асимптотична формула (40) випливає з асимптотичної рівності (14) роботи [13].

Доведення. Для довільних $f\in C^\psi_\beta H_\omega$ має місце зображення (18). Знайдемо оцінку величини $|R_{n,p}(x)|$ за умови, що $\varphi\in H^0_\omega$. Позначимо через t^{**}_{n-p} поліном найкращого наближення порядку $n-p$ функції φ у просторі C, тобто такий, що

$$\|\varphi(t)-t^{**}_{n-p}(t)\|_C=E_{n-p+1}(\varphi)_C=\inf_{t_{n-p}\in\mathcal{T}_{2(n-p)-1}}\|\varphi(t)-t_{n-p}(t)\|_C.$$

Вибираючи в $\delta_{n-p}(\tau)=f(\tau)-t_{n-p}(\tau)$ в якості $t_{n-p}(\tau)$ поліном $t^{**}_{n-p}(\tau)$, отримуємо, що для довільних $x\in\mathbb{R}$

$$|R_{n,p}(x)|\le\frac{1}{\pi}E_{n-p+1}(\varphi)_C\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{p}\sum_{m=3n-p-1}^{3n-2}\sum_{k=m+1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt+(2n-1)x+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{p}\sum_{m=n-p}^{n-1}\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{k=\nu(2n-1)-m}^{\nu(2n-1)+m}\psi(k)\cos\left(kt+(2n-1)\nu x+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)dt\right|\le$$

$$\leq 4E_{n-p+1}(\varphi)_C \sum_{k=3n-p}^{\infty} \psi(k). \tag{41}$$

Як показано в [3, с. 261], для будь-якої неперервної функції φ, модуль неперервності якої є опуклим, має місце нерівність Джексона

$$E_m\left(\varphi\right) < \frac{1}{2}\omega\left(\varphi; \frac{\pi}{m+1}\right), \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{42}$$

Використовуючи той факт, що φ належить H_ω^0, з (20), (22), (41) та (42) при всіх $n > n_1$ отримуємо оцінку

$$|R_{n,p}(x)| \leq 12\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\frac{\psi(3n-p)}{1-q}. \tag{43}$$

Для $f \in C_\beta^\psi H_\omega$ з формул (18) та (43) випливає, що для всіх $n > n_1$ виконуються нерівності

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(\mathcal{J}_\beta^\psi\varphi; x)| \leq |\rho_{n,p}(\mathcal{J}_\beta^\psi\varphi; x) - \rho_{n+p-1,p}(\mathcal{J}_\gamma^\psi\varphi; x)| +$$

$$+12\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\frac{\psi(3n-p)}{1-q}, \tag{44}$$

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(\mathcal{J}_\beta^\psi\varphi; x)| \geq |\rho_{n,p}(\mathcal{J}_\beta^\psi\varphi; x) - \rho_{n+p-1,p}(\mathcal{J}_\gamma^\psi\varphi; x)| -$$

$$-12\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\frac{\psi(3n-p)}{1-q}. \tag{45}$$

З теореми 3 роботи [10] маємо, що коли $\psi \in D_q$, $q \in (0,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n, p \in \mathbb{N}$, $2 \leq p \leq n$ і $\omega(t)$ — опуклий догори модуль неперервності, що задовольняє умову $\lim_{t\to 0}\dfrac{\omega(t)}{t} = \infty$, то справджується асимптотична при $m - p \to \infty$ рівність

$$\mathcal{E}(C_\alpha^\psi H_\omega; V_{m,p}) = \frac{\psi(m-p+1)}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)e_{m-p+1} + \right.$$

$$\left. +O(1)\left(\frac{\omega(\pi)}{(m-p+1)(1-q)^3} + \frac{\varepsilon_{m-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\}\omega\left(\frac{1}{m-p+1}\right)\right)\right), \tag{46}$$

де $\mathbf{K}(\rho) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2 t}}$ — повний еліптичний інтеграл першого роду, ε_{n-p+1} та e_{n-p+1} — величини, означені формулами (9) та (36) відповідно, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів. У випадку класів інтегралів Пуассона, тобто у випадку $\psi(k) = q^k$, рівності (46) отримано в роботі [12].

Легко бачити, що має місце двостороння оцінка

$$\sup_{\varphi \in H_\omega} |\rho_{n,p}(\mathcal{J}_\beta^\psi\varphi; x)| - \sup_{\varphi \in H_\omega} |\rho_{n+p-1,p}(\mathcal{J}_\gamma^\psi\varphi; x)| \leq$$

$$\le \sup_{\varphi\in H_\omega} |\rho_{n,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi;x) - \rho_{n+p-1,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\gamma}\varphi;x)| \le$$

$$\le \sup_{\varphi\in H_\omega} |\rho_{n,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi;x)| + \sup_{\varphi\in H_\omega} |\rho_{n+p-1,p}(\mathcal{J}^{\psi}_{\gamma}\varphi;x)|. \tag{47}$$

Встановимо спочатку оцінку зверху величини $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_\omega;\widetilde{V}_{n,p};x)$. Переходячи в обох частинах (44) до точних верхніх меж по класах H_ω з урахуванням (46) та (47), отримуємо

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_\omega;\widetilde{V}_{n,p};x) \le \frac{\psi(n-p+1)+\psi(n)}{p}\frac{4}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)e_{n-p+1}+$$

$$+K\frac{\psi(n-p+1)+\psi(n)}{p}\Bigg(\frac{\omega(\pi)}{(n-p+1)(1-q)^3}+$$

$$+\min\left\{p,\frac{1}{1-q}\right\}\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\Bigg). \tag{48}$$

Неважко переконатися, що величина

$$\frac{1}{n-p+1}+\varepsilon_{n-p+1}\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right) \tag{49}$$

є нескінченно малою більш високого порядку мализни відносно

$$g'_m(\psi)=\max\left\{\frac{1}{\sqrt{m\omega(1/m)}},\ \sqrt{\varepsilon_m}\right\} \tag{50}$$

при $n-p\to\infty$. Тому існує $n'_4=n'_4(\psi;p)\ge n_1$ таке, що для всіх $n\ge n'_4$ з (48) випливає оцінка

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_\omega;\widetilde{V}_{n,p};x) \le$$

$$\le \frac{\psi(n-p+1)}{p}\left(1+\frac{\psi(n)}{\psi(n-p+1)}\right)\left(1+g'_{n-p+1}(\psi)\right)\frac{4}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)e_{n-p+1}, \tag{51}$$

де величини e_m та $g'_m(\psi)$ означено формулами (36) та (50) відповідно, а

$$\mathbf{K}(\rho)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2 t}}$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду.

Оцінимо величину $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_\omega;\widetilde{V}_{n,p};x)$ знизу. Переходячи в обох частинах (45) до точних верхніх меж по класах H_ω з урахуванням (46) та (47), одержуємо

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_\omega;\widetilde{V}_{n,p};x) \ge \frac{\psi(n-p+1)-\psi(n)}{p}\frac{4}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)e_{n-p+1}-$$

$$-K\frac{\psi(n-p+1)+\psi(n)}{p}\Bigg(\frac{\omega(\pi)}{(n-p+1)(1-q)^3}+$$

$$+\min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\}\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\bigg).$$

Оскільки величина (49) є нескінченно малою відносно (50), існує $n_4'' = n_4''(\psi; p) \geq n_1$ таке, що для всіх $n \geq n_4''$ з (32) випливає оцінка

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; \widetilde{V}_{n,p}; x) \geq$$

$$\geq \frac{\psi(n-p+1)}{p}\left(1 - \frac{\psi(n)}{\psi(n-p+1)}\right)\left(1 - g'_{n-p+1}(\psi)\right)\frac{4}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)e_{n-p+1}, \qquad (52)$$

де величину $g'_m(\psi)$ означено формулою (50), а $\mathbf{K}(\rho) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2 t}}$ — повний еліптичний інтеграл першого роду.

З (51) та (52) випливає, що існує $n_4 = n_4(\psi; n) = \max\{n_4', n_4''\}$ таке, що для всіх $n \geq n_4$ має місце двостороння оцінка

$$\frac{\psi(n-p+1)}{p}\left(1 - \frac{\psi(n)}{\psi(n-p+1)}\right)\left(1 - g'_{n-p+1}(\psi)\right)\frac{4}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)e_{n-p+1} \leq$$

$$\leq \mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_\omega; \widetilde{V}_{n,p}; x) \leq$$

$$\leq \frac{\psi(n-p+1)}{p}\left(1 + \frac{\psi(n)}{\psi(n-p+1)}\right)\left(1 + g'_{n-p+1}(\psi)\right)\frac{4}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)e_{n-p+1}. \qquad (53)$$

Таким чином, співставляючи формули (37) та (53), отримуємо, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ та всіх $n > n_0'(\psi; p) \geq n_4$ має місце (38).

Теорему доведено.

Прикладом функцій $\omega(t)$, що задовольняють умови теореми 2, є функція $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. В цьому випадку класи H_ω є відомими класами Гельдера H^α. Для таких класів має місце твердження.

Наслідок. *Нехай* $\psi \in D_q$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, n, $p \in \mathbb{N}$, $2 \leq p \leq n$, $\lim_{n\to\infty} n - p = \infty$ *і* $0 < \alpha < 1$. *Тоді для довільних* $x \in \mathbb{R}$ *та всіх* n, *починаючи з деякого* $n_0' = n_0'(\psi, p)$, *справджується двостороння оцінка*

$$M^{(3)}(n,p)2^\alpha\int\limits_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t dt \frac{\psi(n-p+1)}{p(n-p+1)^\alpha} \leq \mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H^\alpha; \widetilde{V}_{n,p}; x) \leq$$

$$\leq M^{(4)}(n,p)2^\alpha\int\limits_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t dt \frac{\psi(n-p+1)}{p(n-p+1)^\alpha},$$

де величини $M^{(k)}(n,p)$ *означено рівностями* (37).

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Інституту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. 1. – 427 с.

2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
4. *Бернштейн С. Н.* О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов // Докл. АН СССР. – 1934. – **4**. – С. 1 – 8.
5. *Никольский С. М.* Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами // Докл. АН СССР. – 1941. – **31**, № 3. – С. 215 – 218.
6. *Ганзбург И. М.* Распространение одной асимптотической формулы А. Ф. Тимана на классы функций с заданным модулем непрерывности // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**. – С. 487 – 528.
7. *Степанец А. И., Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **68**. – С. 386.
8. *Сердюк А. С., Войтович В. А.* Наближення класів цілих функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 274 – 297.
9. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 375 – 395.
10. *Serdyuk A. S., Ovsii Ie.Yu., Musienko A. P.* Approximation of classes of analytic functions by de la Vallée Poussion sums in uniform metric // Rend. mat. – 2012. – **32**. – P. 1 – 15.
11. *Сердюк А. С.* Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена в равномерной и интегральных метриках // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 12. – С. 1672 – 1686.
12. *Serdyuk A. S., Ovsii Ie.Yu.* Uniform approximation of Poisson integrals of functions from classes H_ω by de la Vallée Poussion sums // Anal. mat. – 2012. – **38**. – P. 305 – 325.
13. *Войтович В. А., Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена // Доп. НАН України. – 2012. – № 12. – С. 13 – 18.

Одержано 19.02.13