УДК 517.5

Д. А. Левченко (Днепропетр. нац. ун-т им. О. Гончара)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА ПОЛУОСИ

We obtain new sharp Kolmogorov-type inequalities for the fractional derivatives of functions defined on the half line.

Отримано нові точні нерівності типу Колмогорова для дробових похідних функцій, визначених на півосі.

Обозначения, определения. Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — полуось. Через $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p \le \infty$, обозначим пространство измеримых и суммируемых в p-й степени (существенно ограниченных при $p = \infty$) функций $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\|_p = \|x\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty |x(t)|^p dt\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}_+} \big|x(t)\big|, & p = \infty. \end{cases}$$

Как обычно, для натурального r через $L^r_{p,s}(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p,\, s \le \infty$, будем обозначать пространство функций $x(t) \in L_p(\mathbb{R}_+)$ таких, что $x^{(r)}(t) \in L_s(\mathbb{R}_+)$.

Дробная производная порядка $0 < \alpha < 1$ функции $x(t)$ в смысле Маршо определяется так (см., например, [1, с. 95]):

$$\left(D^\alpha_- x\right)(t) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_t^\infty \frac{x(t) - x(u)}{(u-t)^{1+\alpha}} du.$$

Дробный интеграл функции $x(t)$ порядка $\alpha > 0$ определяется равенством (см., например, [1, с. 85])

$$\left(I^\alpha_- x\right)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_t^\infty (u-t)^{\alpha-1} x(u) du.$$

При $0 < \alpha < 1$ для любой функции $x \in L_p$ в случае $1 \le p < 1/\alpha$ справедливо равенство (см., например, [1, с. 106])

$$\big(D^\alpha_-\big(I^\alpha_- x\big)\big)(t) = x(t).$$

Для $1 \le p, s \le \infty$ обозначим через

$$L^\alpha_{p,s}(\mathbb{R}_+) := \big\{x(t) \in L_p(\mathbb{R}_+) \colon (D^\alpha_- x)(t) \in L_s(\mathbb{R}_+)\big\}$$

пространство функций из $L_p(\mathbb{R}_+)$, имеющих дробную производную из $L_s(\mathbb{R}_+)$.

Неравенствами типа Колмогорова на полуоси принято называть неравенства вида

$$\big\|x^{(k)}\big\|_p \le C_{r,k}(p,q,s,\mathbb{R}_+) \|x\|_q^{1-\delta} \big\|x^{(r)}\big\|_s^\delta, \tag{1}$$

где постоянная $C_{r,k}(p,q,s,\mathbb{R}_+)$ не зависит от функции $x \in L^r_{q,s}(\mathbb{R}_+)$. Неравенства типа (1) имеют важное значение для многих областей математики (математический анализ, функциональный анализ, теория аппроксимации, теория оптимального управления и др.). Особенно важную роль играют точные неравенства такого типа. Для целых неотрицательных $0 \le k < r$ известно довольно много точных неравенств типа (1) (см., например, [3]). В случае, когда хотя бы одно из чисел r или k нецелое, точных неравенств типа (1) найдено относительно немного. Некоторые известные в этом направлении результаты и дальнейшие ссылки см. в [4] (гл. 2).

Для $0 < \alpha \le 1$, $\alpha < \beta \le 2$ в [2] была найдена точная константа

$$C_{\beta,\alpha}(\infty,\infty,\infty,\mathbb{R}_+) = \frac{\left\{2\Gamma(\beta+1)\right\}^{1-\frac{\alpha}{\beta}}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.$$

В работе [4, с. 96] для $1 < s < \infty$, $0 < \alpha < 1 - 1/s$ найдена точная константа

$$C_{1,\alpha}(\infty,\infty,s,\mathbb{R}_+) = \frac{2^{1-\alpha s'}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha s')^{1-\alpha s'}(\alpha s')^{\alpha s'}} \left\{ \frac{\Gamma\Big(\dfrac{1}{\alpha} - s'\Big)\Gamma(s'+1)}{\Gamma\Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big)} \right\}^{\alpha},$$

где s' выбрано из условия $1/s + 1/s' = 1$.

Там же была найдена точная константа $C_{\beta,\alpha}(\infty,\infty,s,\mathbb{R}_+)$ для $1 < s < \infty$, $0 < \alpha + 1/s < \beta < 1$.

Нахождение точной константы $C_{\beta,\alpha}(\infty,\infty,p',\mathbb{R}_+)$. Из результатов работы [2, с. 26 – 28] следует, что для любых $0 < \alpha < \beta < 1$ и произвольной функции $x \in L^{\beta}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_+)$ справедливо соотношение

$$\Gamma(\beta-\alpha)\left(D^{\alpha}_{-}x\right)(t) = \int\limits_0^{\infty} x(t+u)d\zeta_h(u) + \int\limits_0^{\infty}\left(D^{\beta}_{-}x\right)(t+u)\varrho_h(u)du, \tag{2}$$

где функция $\zeta_h(t)$ определяется так:

$$\zeta_h(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \Gamma(\beta)h^{-\alpha}, & t \in (0,h], \\ \dfrac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left\{h^{-\alpha}\displaystyle\int_0^{h/t}\frac{u^{\beta-1}}{(1-u)^{\beta}}du + t^{-\alpha}\int_{h/t}^{1}\frac{u^{\beta-\alpha-1}}{(1-u)^{\beta}}du\right\}, & t \in (h,\infty), \end{cases}$$

а

$$\varrho_h(t) = t^{\beta-1}\max\{t^{-\alpha} - h^{-\alpha}, 0\}.$$

Следует отметить, что вариация ζ_h на $[0,+\infty)$

$$\bigvee_0^{\infty}(\zeta_h) = 2\Gamma(\beta)h^{-\alpha}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых $1 < p < \infty$, $0 < \alpha + 1/p' < \beta < 1 (1/p + 1/p' = 1)$, $h > 0$ и произвольной функции $x \in L^{\beta}_{\infty,p'}(\mathbb{R}_+)$ имеют место точные неравенства*

$$\left\|D^{\alpha}_{-}x\right\|_{\infty} \le \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left[2\Gamma(\beta)h^{-\alpha}\|x\|_{\infty} + \|\varrho_h\|_p\|D^{\beta}_{-}x\|_{p'}\right] \tag{3}$$

и

$$\left\|D_-^\alpha x\right\|_\infty \le C_{\beta,\alpha}(\infty,\infty,p',\mathbb{R}_+)\|x\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{\beta-1/p'}}\|D_-^\beta x\|_{p'}^{\frac{\alpha}{\beta-1/p'}}, \tag{4}$$

где

$$\|\varrho_h\|_p = \left\{\frac{\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-\alpha-1)+1}{\alpha}\right)\Gamma(p+1)}{\alpha\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-1)+1}{\alpha}+1\right)}h^{p(\beta-\alpha-1)+1}\right\}^{1/p},$$

$$C_{\beta,\alpha}(\infty,\infty,p',\mathbb{R}_+) = \frac{\beta-1/p'}{\alpha\Gamma(\beta-\alpha)}\left\{\frac{2\alpha\Gamma(\beta)}{\beta-\alpha-1/p'}\right\}^{1-\frac{\alpha}{\beta-1/p'}}\|\varrho_1\|_p^{\frac{\alpha}{\beta-1/p'}}.$$

Доказательство. Применив ко второму слагаемому интегральное неравенство Гельдера, из (2) несложно получить неравенство

$$\left\|D_-^\alpha x\right\|_\infty \le \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left[\bigvee_0^\infty(\zeta_h)\|x\|_\infty + \|\varrho_h\|_p\|D_-^\beta x\|_{p'}\right]. \tag{5}$$

Отсюда с учетом того, что

$$\bigvee_0^\infty(\zeta_h) = 2\Gamma(\beta)h^{-\alpha},$$

следует (3).

Нетрудно показать, что

$$\|\varrho_h\|_p^p = \int_0^h \left|\varrho_h(u)\right|^p du = \frac{\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-\alpha-1)+1}{\alpha}\right)\Gamma(p+1)}{\alpha\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-1)+1}{\alpha}+1\right)}h^{p(\beta-\alpha-1)+1}.$$

Минимизируя по h правую часть (3), получаем (4).

Покажем теперь, что (3) и (4) — точные неравенства. Экстремальная функция имеет вид

$$x_h(t) = 2\left(I_-^\beta\varrho_h^{p-1}\right)(t) - \left(I_-^\beta\varrho_h^{p-1}\right)(0).$$

Поскольку $\varrho_h^{p-1}(t)$ не возрастает, то

$$\left(I_-^\beta\varrho_h^{p-1}\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty s^{\beta-1}\varrho_h^{p-1}(s+t)ds \le \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty s^{\beta-1}\varrho_h^{p-1}(s)ds = \left(I_-^\beta\varrho_h^{p-1}\right)(0).$$

Кроме того, $\left(I_-^\beta\varrho_h^{p-1}\right)(t) = 0$ для всех $t \ge h$, из чего заключаем, что

$$\left|x_h(t)\right| \le \left(I_-^\beta\varrho_h^{p-1}\right)(0)$$

для всех $t \ge 0$. Тогда

$$\|x_h\|_\infty = \left(I_-^\beta \varrho_h^{p-1}\right)(0) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-\alpha-1)+1}{\alpha}+1\right)\Gamma(p)}{\alpha\Gamma(\beta)\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-1)+1}{\alpha}+1\right)} h^{p(\beta-\alpha-1)+\alpha+1}.$$

Далее, поскольку дробная производная постоянной равна нулю и $\varrho_h^{p-1} \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$(D_-^\beta x_h)(t) = 2\varrho_h^{p-1}(t),$$

а

$$\|D_-^\beta x_h\|_{p'} = 2\|\varrho_h\|_p^{p-1} = 2\left\{\frac{\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-\alpha-1)+1}{\alpha}\right)\Gamma(p+1)}{\alpha\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-1)+1}{\alpha}+1\right)} h^{p(\beta-\alpha-1)+1}\right\}^{1-\frac{1}{p}}.$$

Применяя (3) к функции $x_h(t)$, получаем

$$\left\|D_-^\alpha x_h\right\|_\infty \le 2\frac{\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-\alpha-1)+1}{\alpha}+1\right)\Gamma(p)}{\alpha\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-1)+1}{\alpha}+1\right)} h^{p(\beta-\alpha-1)+1}+$$

$$+2\frac{\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-\alpha-1)+1}{\alpha}\right)\Gamma(p+1)}{\alpha\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-1)+1}{\alpha}+1\right)} h^{p(\beta-\alpha-1)+1} =$$

$$= 2\frac{\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-\alpha-1)+1}{\alpha}\right)\Gamma(p)}{\alpha\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-1)+1}{\alpha}\right)} h^{p(\beta-\alpha-1)+1}.$$

С другой стороны, учитывая полугрупповое свойство

$$I_-^\gamma I_-^\delta = I_-^{\gamma+\delta},$$

равенство нулю дробной производной постоянной и суммируемость на $\mathbb{R}_+$ функции $(I_-^{\beta-\alpha}\varrho_h^{p-1})(t)$, имеем

$$\left\|D_-^\alpha x_h\right\|_\infty \ge \left(D_-^\alpha x_h\right)(0) = \left(D_-^\alpha I_-^\alpha I_-^{\beta-\alpha}\varrho_h^{p-1}\right)(0) =$$

$$= \frac{2}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int\limits_0^\infty s^{\beta-\alpha-1}\varrho_h^{p-1}(s)ds = 2\frac{\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-\alpha-1)+1}{\alpha}\right)\Gamma(p)}{\alpha\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma\left(\dfrac{p(\beta-1)+1}{\alpha}\right)} h^{p(\beta-\alpha-1)+1}.$$

Тем самым показана точность неравенств.

Теорема доказана.

Замечание. Неравенство (4) обобщает неравенства, полученные в работах [2, 4], в том смысле, что

$$\lim_{p'\to\infty} C_{\beta,\alpha}(\infty,\infty,p',\mathbb{R}_+) = C_{\beta,\alpha}(\infty,\infty,\infty,\mathbb{R}_+),$$

$$\lim_{\beta\to 1} C_{\beta,\alpha}(\infty,\infty,p',\mathbb{R}_+) = C_{1,\alpha}(\infty,\infty,p',\mathbb{R}_+).$$

Отыскание наилучшего приближения оператора D_-^{α} линейными ограниченными операторами. Начнем с общей постановки задачи (см., например, [3, с. 391]). Пусть X, Y — банаховы пространства и $A\colon X\to Y$ — некоторый оператор с областью определения $D(A)\subset X$. Пусть $\mathcal{L}(N)=\mathcal{L}(N,X,Y)$ — множество линейных ограниченных операторов $T\colon X\to Y$ с нормой $\|T\|=\|T\|_{X\to Y}\le N$ для некоторого числа $N>0$. Кроме того, пусть $Q\subset D(A)$ — некоторый класс элементов. Величина

$$U(T)=\sup\left\{\|Ax-Tx\|_Y\colon x\in Q\right\}$$

называется уклонением оператора $T\in\mathcal{L}(N)$ от оператора A на классе Q, а величина

$$E(N)=E(N;A;Q):=\inf\left\{U(T)\colon T\in\mathcal{L}(N)\right\} \tag{6}$$

— наилучшим приближением оператора множеством ограниченных операторов из $\mathcal{L}(N)$ на классе Q.

Задача состоит в вычислении величины $E(N)$ и нахождении экстремального оператора, т. е. оператора, реализующего нижнюю грань в правой части (8).

Функция переменной $\delta\ge 0$

$$\Omega(\delta)=\sup\left\{\|Ax\|_Y\colon x\in Q, \|x\|_X\le\delta\right\},$$

которая называется модулем непрерывности оператора A на классе Q, связана с величиной $E(N)$ неравенством

$$E(N)\ge\Omega(\delta)-N\delta.$$

Рассмотрим случай, когда $X=L^{\beta}_{\infty,p'}(\mathbb{R}_+)$, $Y=L_\infty(\mathbb{R}_+)$, $A=D_-^{\alpha}$ и

$$Q=\left\{x\in L^{\beta}_{\infty,p'}(\mathbb{R}_+)\colon \|D_-^{\beta}x\|_{p'}\le 1\right\}.$$

Обозначим через S_h оператор

$$(S_hx)(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int\limits_0^\infty x(t+u)d\zeta_h(u).$$

Здесь интеграл является первым слагаемым в равенстве (2).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для любых* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha + 1/p' < \beta < 1$ $(1/p + 1/p' = 1)$ *и* $N > 0$ *справедливо равенство*

$$E(N) = U(S_{h_N}) = \frac{\|\varrho_{h_N}\|_p}{\Gamma(\beta - \alpha)},$$

где

$$h_N = \left\{ \frac{2\Gamma(\beta)}{N\Gamma(\beta - \alpha)} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Доказательство. Вычислим норму оператора S_h:

$$\|S_h\| = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|S_h x\|_\infty \leq \frac{2\Gamma(\beta) h^{-\alpha}}{\Gamma(\beta - \alpha)}.$$

С другой стороны, для экстремальной функции x_h из теоремы 1 выполняется

$$\|S_h\| \geq \left\| S_h \frac{x_h}{\|x_h\|_\infty} \right\|_\infty \geq \frac{1}{\|x_h\|_\infty} \big| (S_h x_h)(0) \big| =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha)\|x_h\|_\infty} \left(\Gamma(\beta) h^{-\alpha} x_h(0) - \left(I_-^\beta \varrho_h^{p-1} \right)(0) \int\limits_h^\infty d\zeta_h(u) \right) =$$

$$= \frac{2\Gamma(\beta) h^{-\alpha} \|x_h\|_\infty}{\Gamma(\beta - \alpha)\|x_h\|_\infty} = \frac{2\Gamma(\beta) h^{-\alpha}}{\Gamma(\beta - \alpha)}$$

и, значит,

$$\|S_h\| = \frac{2\Gamma(\beta) h^{-\alpha}}{\Gamma(\beta - \alpha)}.$$

Из (2) непосредственно следует оценка сверху для величины $U(S_h)$:

$$U(S_h) = \sup_{x \in Q} \|D_-^\alpha x - S_h x\|_\infty = \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha)} \sup_{x \in Q} \left\| \int\limits_0^\infty \left(D_-^\beta x \right)(\cdot + u) \varrho_h(u) du \right\|_\infty \leq$$

$$\leq \sup_{x \in Q} \frac{\|D_-^\beta x\|_{p'} \|\varrho_h\|_p}{\Gamma(\beta - \alpha)} = \frac{\|\varrho_h\|_p}{\Gamma(\beta - \alpha)},$$

а для функции $f_h(t) = \|D_-^\beta x_h\|_{p'}^{-1} x_h(t)$ имеет место оценка снизу

$$U(S_h) \geq \|(D_-^\alpha f_h)(0) - (S_h f_h)(0)\|_\infty =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha)\|D_-^\beta x_h\|_{p'}} \int\limits_0^\infty \left(D_-^\beta x_h \right)(u) \varrho_h(u) du =$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(\beta - \alpha)\|\varrho_h\|_p^{p-1}} \int\limits_0^\infty 2\varrho_h^p(u) du = \frac{\|\varrho_h\|_p}{\Gamma(\beta - \alpha)}.$$

Следовательно, уклонение

$$U(S_h) = \frac{\|\varrho_h\|_p}{\Gamma(\beta-\alpha)}.$$

Параметр

$$h_N = \left\{ \frac{2\Gamma(\beta)}{N\Gamma(\beta-\alpha)} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

выберем из условия

$$\|S_h\| = N.$$

Тогда

$$E(N) \le U(S_{h_N}).$$

Покажем, что на самом деле в последнем соотношении имеет место равенство. Запишем неравенство (3) в виде

$$\left\|D_-^{\alpha} x\right\|_{\infty} \le \|S_h\| \, \|x\|_{\infty} + U(S_h) \|D_-^{\beta} x\|_{p'}.$$

В силу экстремальности функции $x_h(t)$ для функции $f_h(t) = \|D_-^{\beta} x_h\|_{p'}^{-1} x_h(t) \in Q$ при любом $h > 0$ имеет место равенство

$$\left\|D_-^{\alpha} f_h\right\|_{\infty} = \|S_h\| \, \|f_h\|_{\infty} + U(S_h).$$

Тогда для произвольного линейного оператора T с нормой $\|T\| \le N$ выполняется

$$U(T) = \sup_{x \in Q} \left\|D_-^{\alpha} x - Tx\right\|_{\infty} \ge \sup_{x \in Q} \left(\|D_-^{\alpha} x\|_{\infty} - N\|x\|_{\infty}\right) \ge$$

$$\ge \left(\|D_-^{\alpha} f_{h_N}\|_{\infty} - N\|f_{h_N}\|_{\infty}\right) = U(S_{h_N}),$$

поэтому

$$E(N) = U(S_{h_N}) = \|\varrho_{h_N}\|_p$$

и S_{h_N} — оператор наилучшего приближения.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Для любых* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha + 1/p' < \beta < 1$, $1/p + 1/p' = 1$ *модуль непрерывности оператора* D_-^{α} *на классе* Q *равен*

$$\Omega(\delta) = C_{\beta,\alpha} \delta^{1 - \frac{\alpha}{\beta - 1/p'}}.$$

Доказательство. Из (5) непосредственно следует, что

$$\Omega(\delta) \leq C_{\beta,\alpha}\delta^{1-\frac{\alpha}{\beta-1/p'}}. \tag{7}$$

Выберем h из условия

$$\|x_h\|_\infty = \delta.$$

Тогда функция $g_h(t) = x_h\left(\|D_-^\beta x_h\|_{p'}^{\frac{p'}{p'(2-\beta)+1}} t\right) \in Q$. Поскольку она тоже является экстремалью для неравенства (4), то

$$\Omega(\delta) \geq \|D_-^\alpha g_h\|_\infty = C_{\beta,\alpha}\delta^{1-\frac{\alpha}{\beta-1/p'}},$$

что вместе с (7) и доказывает теорему.

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск, 1987. – 650 с.
2. *Arestov V. V.* Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approxim. Theory. – 1979. – **4**. – P. 19 – 34.
3. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 591 с.
4. *Моторный В. П., Бабенко В. Ф., Довгошей А. А., Кузнецова О. И.* Теория аппроксимации и гармонический анализ. – Киев: Наук. думка, 2012. – 320 с.

Получено 14.11.12