УДК 511.72+517+519.21

С. О. Климчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
О. П. Макарчук (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ),
М. В. Працьовитий (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Ін-т математики НАН України, Київ)

ЧАСТОТА ЦИФРИ У ЗОБРАЖЕННІ ЧИСЛА І ЙОГО АСИМПТОТИЧНЕ СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ ЦИФР

We study the relationship between the frequency of ternary digit of a number and its asymptotic mean of digits. Conditions for the existence of the asymptotic mean of digits of ternary number are found. We specify an infinite everywhere dense set of numbers without frequency of digits but with the asymptotic mean of digits.

Устанавливается связь между понятиями частоты цифры троичного изображения числа и его асимптотического среднего значения цифр. Найдены условия существования асимптотического среднего значения цифр троичного числа. Указано бесконечное везде плотное множество чисел, частоты цифр которых не существуют, но существует асимптотическое среднее значение цифр.

1. Вступ. Відомо, що для *довільного дійсного числа* $x \in [0;1]$ *існує послідовність* (α_n) *така, що* $\alpha_n \in \mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ *і*

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \ldots \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Останній запис називається *s-ковим зображенням*, а $\alpha_k = \alpha_k(x)$ — *k-ю s-ковою цифрою числа* x. Але k-та цифра числа, як його функція, є, взагалі кажучи, некоректно визначеною, оскільки має місце рівність

$$\Delta^s_{c_1\ldots c_{k-1}c_k(0)} = \Delta^s_{c_1\ldots c_{k-1}[c_k-1](s-1)},$$

де (i) — період у зображенні числа. Числа такого виду називаються *s-ково-раціональними*, вони мають рівно два s-кових зображення. Решта чисел мають лише одне зображення і називаються *s-ково-ірраціональними.* Для коректності означення k-ї цифри досить домовитись використовувати лише перше s-кове зображення, а саме, те, що має період (0). Тепер $\alpha_k(x)$ є функцією, коректно визначеною на $[0;1]$.

Нехай $N_i(x,k)$ — кількість цифр $i \in \mathcal{A} = \{0, \ldots, s-1\}$ у s-ковому зображенні $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ числа $x \in [0;1]$ до k-го місця включно, тобто

$$N_i(x,k) = \#\{j \colon \alpha_j(x) = i,\ j \leqslant k\}.$$

Число $v_i^{(n)} \equiv k^{-1}N_i(x,k)$ є відносною частотою цифри i в s-ковому зображенні дійсного числа x.

Означення 1. *Частотою* (*асимптотичною частотою*) *цифри i у s-ковому зображенні числа $x \in [0;1]$ називається границя*

$$\nu_i(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k},$$

якщо вона існує.

Зрозуміло, що функція частоти $\nu_i(x)$ цифри i у s-ковому зображенні числа $x \in [0;1]$ є коректно визначеною для s-ково-ірраціональних чисел, а для s-ково-раціональних — після домовленості, яку зроблено вище: використовувати лише зображення з періодом (0).

Відомо, що функція частоти цифри s-кового зображення числа набуває всіх значень із $[0,1]$, у раціональній точці $[0,1]$ вона визначена і набуває раціонального значення, на скрізь щільній континуальній множині нульової міри Лебега чисел $[0,1]$ вона не визначена. І це поняття є продуктивним у дослідженнях чистих розподілів випадкових величин, s-кові цифри яких є випадковими [7, 8].

Число $r_n \equiv \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)$ називається відносним середнім значенням цифр числа x. Оскільки $r_n(x) = \dfrac{N_1(x,k)}{k} + \dfrac{2N_2(x,k)}{k}$, то $0 \leqslant r_n(x) \leqslant 2$.

Означення 2. *Якщо існує границя* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x) = r(x)$, *де* α_i — *цифри s-кового зображення числа* $x \in [0;1]$, *то її значення* $\big($*число* $r(x)\big)$ *називається асимптотичним середнім* (*або просто середнім*) *значенням цифр числа* x.

Асимптотичне середнє значення цифр є певним аналогом частоти s-кової цифри числа. Більше того, при $s = 2$ має місце рівність $r(x) = \nu_1(x)$.

Ми цікавимося тополого-метричними властивостями множин чисел із наперед заданим *середнім асимптотичним значенням цифр*, тобто множинами вигляду

$$S_\theta = \left\{x\colon \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x) = \theta \geqslant 0\right\},$$

де стала θ — наперед заданий параметр із відрізка $[0, s-1]$.

Зауважимо, що при $\theta > s-1$ множина S_θ є порожньою.

Легко помітити деяку схожість множини S_θ з множиною Безиковича – Егглстона $E\big[\tau_0, \tau_1, \ldots$ $\ldots, \tau_{s-1}\big] = \big\{x\colon \nu_i(x) = \tau_i,\ i = \overline{0, s-1}\big\}$. Справжній зв'язок між цими множинами буде з'ясовано пізніше.

2. Зв'язок частоти і його середнього значення цифр.

Лема 1. *Якщо s-кове зображення числа x має частоти всіх цифр* $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{s-1}$, *то воно має асимптотичне середнє значення цифр* $r(x)$, *причому*

$$r(x) = \nu_1(x) + 2\nu_2(x) + \ldots + (s-1)\nu_{s-1}(x).$$

Доведення. Оскільки

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x) = \frac{0\cdot N_0(x,n)}{n} + \frac{1\cdot N_1(x,n)}{n} + \ldots + \frac{(s-1)\cdot N_{s-1}(x,n)}{n} =$$

$$= \frac{N_1(x,n)}{n} + 2\cdot\frac{N_2(x,n)}{n} + \ldots + (s-1)\cdot\frac{N_{s-1}(x,n)}{n},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{N_1(x,n)}{n} + 2\cdot\frac{N_2(x,n)}{n} + \ldots + (s-1)\cdot\frac{N_{s-1}(x,n)}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{N_1(x,n)}{n} + 2\lim_{n\to\infty}\frac{N_2(x,n)}{n} + \ldots + (s-1)\lim_{n\to\infty}\frac{N_{s-1}(x,n)}{n},$$

якщо останні границі існують. Тоді з останньої рівності маємо

$$r(x) = \nu_1(x) + 2\nu_2(x) + \ldots + (s-1)\nu_{s-1}(x).$$

***Наслідок* 1.** *Якщо* $\theta = \tau_1 + 2\tau_2 + \ldots + (s-1)\tau_{s-1}$, *то має місце включення*

$$E[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{s-1}] \subset S_\theta.$$

Теорема 1. *Властивість числа* $r(x) = \dfrac{s-1}{2}$ *є нормальною, тобто множина дійсних чисел відрізка* $[0;1]$, *які такої властивості не мають, є множиною нульової міри Лебега.*

Доведення. Відома теорема Бореля [4] стверджує, що для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел відрізка $[0;1]$ у їх s-ковому зображенні існують частоти всіх цифр і дорівнюють s^{-1}, тобто множина Безиковича – Егглстона $E\big[s^{-1}, s^{-1}, \ldots, s^{-1}\big]$ є множиною повної міри Лебега. Оскільки

$$\theta = \frac{1}{s} + \frac{2}{s} + \frac{3}{s} + \ldots + \frac{s-1}{s} = \frac{s-1}{2},$$

то $E\big[s^{-1}; s^{-1}; \ldots; s^{-1}\big] \subset S_\theta$. Тому $\lambda(S_\theta) = 1$.

Теорема 2. *Якщо для* $s = 3$ *існують асимптотичне середнє значення цифр* $r(x)$ *і принаймні одна з частот* $\nu_0(x)$, $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$, *то існують і інші дві частоти цифр числа* x. *Якщо ж не існує хоча б однієї з частот* $\nu_j(x)$, $j \in \{0,1,2\}$, *але існує* $r(x)$, *то не існує і інших двох частот цифр числа* x.

Доведення. Нехай $v_j^{(n)} = n^{-1}N_j(x,n)$ — відносна частота цифри j у трійковому зображенні числа x, $r_n(x) = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x)$ — відносне середнє значення цифр числа x. Тоді має місце система

$$v_0^{(n)} + v_1^{(n)} + v_2^{(n)} = 1,$$

$$v_1^{(n)} + 2v_2^{(n)} = r_n.$$

Якщо існують $\lim_{n\to\infty} r_n$ і $\lim_{n\to\infty} v_j^{(n)}$, $j \in \{1,2\}$, то з другої рівності системи випливає існування $\lim_{n\to\infty} v_i^{(n)}$, $i \in \{1,2\}\backslash\{j\}$, а з першої — $\lim_{n\to\infty} v_0^{(n)}$. Оскільки систему можна записати у вигляді

$$v_2^{(n)} = r_n - 1 + v_0^{(n)},$$

$$v_1^{(n)} = 2 - 2v_0^{(n)} - r_n,$$

то з існування $\lim_{n\to\infty} v_0^{(n)}$ і $\lim_{n\to\infty} r_n$ випливає існування частот $\nu_j(x) = \lim_{n\to\infty} v_j^{(n)}$, $j = 1,2$.

Якщо $\lim_{n\to\infty} r_n$ існує і $\lim_{n\to\infty} v_0^{(n)}$ не існує, то не існує границь $\lim_{n\to\infty} v_1^{(n)}$, а $\lim_{n\to\infty} v_2^{(n)}$, тобто не існує частот $\nu_1(x)$ і $\nu_2(x)$.

***Наслідок* 2.** *Якщо для трійкового зображення числа існує асимптотичне середнє значення* $r(x)$, *то частоти* $\nu_i(x)$, $i \in \{0,1,2\}$, *одночасно існують або одночасно не існують.*

3. Число з наперед заданим асимптотичним середнім значенням цифр. Вкажемо алгоритм побудови числа з наперед заданими частотами трійкових цифр.

Нехай a і b — додатні дійсні числа, такі, що $a + b \leqslant 1$, причому $\nu_0(x) = a$, $\nu_1(x) = b$. Означимо цілочислову послідовність (c_n), де $c_n = [n \cdot a]$, $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо різницю $d_n = c_{n+1} - c_n = \big[(n+1) \cdot a\big] - [n \cdot a] = \Big[[n \cdot a] + \{n \cdot a\} + a\Big] - [n \cdot a] = \big[\{n \cdot a\} + a\big] \in \{0, 1\}$. Тоді $x_* = \Delta^3_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}$, де

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \beta_n, & \text{якщо} \quad d_n = 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad d_n = 1. \end{cases}$$

Означимо цілочислову послідовність (c'_n), $c'_n = [n \cdot b]$, $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо різницю $d'_n = c'_{n+1} - c'_n \in \{0, 1\}$. Тоді

$$\beta_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad d'_n = 0, \\ 2, & \text{якщо} \quad d'_n = 1. \end{cases}$$

Оскільки

$$a - \frac{1}{n} = \frac{n \cdot a - 1}{n} < \frac{N_0(x_*, n)}{n} = \frac{[n \cdot a]}{n} \leqslant \frac{n \cdot a}{n} = a,$$

$$b - \frac{1}{n} = \frac{n \cdot b - 1}{n} < \frac{N_1(x_*, n)}{n} = \frac{[n \cdot b]}{n} \leqslant \frac{n \cdot b}{n} = b,$$

то

$$\nu_0(x_*) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_0(x_*, n)}{n} = a, \qquad \nu_1(x_*) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_1(x_*, n)}{n} = b.$$

4. Число, асимптотичне середнє значення цифр якого існує, а частоти цифр не існують. Побудуємо число, асимптотичні частоти цифр якого не існують, а середнє значення цифр існує і дорівнює деякому наперед заданому числу θ, тобто $r(x) = \theta$.

Спочатку покажемо, що цього не можна зробити для $\theta = 0$ і $\theta = 2$.

Нехай $\theta = 0$, тобто $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Оскільки $v_1^{(n)} + 2v_2^{(n)} \geqslant v_i^{(n)} \geqslant 0$ для $i \in \{1, 2\}$, то $\lim_{n\to\infty} v_i^{(n)} = 0$. Нехай $\theta = 2$. Оскільки $r_n = v_1^{(n)} + 2v_2^{(n)} = v_1^{(n)} + v_2^{(n)} + v_2^{(n)} = 1 - v_0^{(n)} + v_2^{(n)}$, то $1 \geqslant v_2^{(n)} = r_n - 1 + v_0^{(n)} \geqslant r_n - 1$. І оскільки $\lim_{n\to\infty} r_n = 2$, то $\lim_{n\to\infty} v_2^{(n)} = 1$. Таким чином, $0 \leqslant v_i^{(n)} = 1 - v_2^{(n)} - v_{1-i}^{(n)} \leqslant 1 - v_2^{(n)}$, де $i \in \{0, 1\}$. Але $\lim_{n\to\infty} 1 - v_2^{(n)} = 0$, тому $\lim_{n\to\infty} v_i^{(n)} = 0$, $i \in \{0, 1\}$.

Нехай θ — наперед задане число з $(0; 2)$. Змоделюємо зображення числа x^*, яке має асмптотичне середнє значення цифр θ, і не має жодної з частот трійкових цифр. Для цього розглянемо наступну форму зображення x^* :

$$x^* = \Delta^3_{\underbrace{\underbrace{0\ldots0}_{a_{11}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{12}}\underbrace{2\ldots2}_{a_{13}}}_{\text{1-й блок}}\underbrace{\underbrace{0\ldots0}_{a_{21}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{22}}\underbrace{2\ldots2}_{a_{23}}}_{\text{2-й блок}}\ldots\underbrace{\underbrace{0\ldots0}_{a_{k1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{k2}}\underbrace{2\ldots2}_{a_{k3}}}_{k\text{-й блок}}\ldots},$$

де $a_{ij} \in N$, і вкажемо умови на матрицю $\|a_{ij}\|$, при яких не існуватиме границя

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{k1}}{a_{11}+a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{k1}+a_{k2}+a_{k3}},$$

а отже і $\nu_0(x)$, але існуватиме

$$r(x)=\lim_{k\to\infty} \frac{0\cdot(a_{11}+\ldots+a_{k1})+1\cdot(a_{12}+\ldots+a_{k2})+2\cdot(a_{13}+\ldots+a_{k3})}{a_{11}+a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{k1}+a_{k2}+a_{k3}}=\theta.$$

З цією метою доведемо два допоміжні твердження.

Лема 2. *Для довільних натуральних чисел k і n $(k<n)$ і довільного дійсного числа x виконується рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[kx]+\big[(k+1)x\big]+\ldots+[nx]}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=x,$$

де $[kx]$ — ціла частина числа kx.

Доведення. Згідно з властивостями цілої частини числа, $y-1<[y]\leqslant y$. Тоді

1) $\dfrac{[kx]+\big[(k+1)x\big]+\ldots+[nx]}{\dfrac{n(n+1)}{2}} \leqslant \dfrac{kx+(k+1)x+\ldots+nx}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=$

$$=\frac{x\big(1+2+\ldots+n-(1+2+\ldots+k-1)\big)}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\frac{x\dfrac{n(n+1)}{2}-x\dfrac{(k-1)k}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}\to x \ \text{ при } n\to\infty;$$

2) $\dfrac{[kx]+\big[(k+1)x\big]+\ldots+[nx]}{\dfrac{n(n+1)}{2}} > \dfrac{kx-1+(k+1)x-1+\ldots+nx-1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=$

$$=\frac{kx+(k+1)x+\ldots+nx-(n-k+1)}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\frac{x\dfrac{n(n+1)}{2}-x\dfrac{(k-1)k}{2}-(n-k+1)}{\dfrac{n(n+1)}{2}}\to x \text{ при}$$

$n\to\infty$.

Отже, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{[kx]+\big[(k+1)x\big]+\ldots+[nx]}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=x$.

Виберемо два довільні дійсні числа x_1, x_2 і дійсне число $\varepsilon>0$ такі, що $0<x_1<x_2$ і $\varepsilon<$ $<\dfrac{x_2-x_1}{2}$. Остання нерівність рівносильна нерівності $x_1+\varepsilon<x_2-\varepsilon$. Побудуємо послідовність (α_n) $\big($також позначатимемо $\tilde{\alpha}_n\{x_1,x_2\}\big)$, кожен член якої набуває одного з двох значень x_1 або x_2, за наступним правилом.

Нехай n_1 — найменше натуральне число, для якого виконується нерівність

$$\frac{[1\cdot x_1]+[2\cdot x_1]+\ldots+[n_1\cdot x_1]}{\dfrac{n_1(n_1+1)}{2}}<x_1+\varepsilon.$$

Згідно з лемою 2 таке число існує. Тоді покладемо $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{n_1}=x_1$.

Нехай n_2 — найменше натуральне число, для якого виконується нерівність

$$\frac{[1\cdot x_1]+\ldots+[n_1\cdot x_1]+\big[(n_1+1)\cdot x_2\big]+\ldots+[n_2\cdot x_2]}{\dfrac{n_2(n_2+1)}{2}}>x_2-\varepsilon.$$

Згідно з лемою 2 таке число існує. Тоді покладемо $\alpha_{n_1+1} = \alpha_{n_1+2} = \ldots = \alpha_{n_2} = x_2$.

Нехай n_3 — найменше натуральне число, для якого виконується нерівність

$$\frac{[1 \cdot x_1] + \ldots + [n_1 x_1] + \big[(n_1+1)x_2\big] + \ldots + [n_2 x_2] + \big[(n_2+1)x_1\big] + \ldots + [n_3 x_1]}{\dfrac{n_3(n_3+1)}{2}} < x_1 + \varepsilon.$$

Згідно з лемою 2 таке число існує. Тоді покладемо $\alpha_{n_2+1} = \alpha_{n_2+2} = \ldots = \alpha_{n_3} = x_1$. І так далі.

Побудуємо послідовність (w_n), де $w_n = \dfrac{[1 \cdot \alpha_1] + [2 \cdot \alpha_2] + \ldots + [n \cdot \alpha_n]}{\dfrac{n(n+1)}{2}}$.

Лема 3. *Послідовність (w_n) є розбіжною, тобто*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[1 \cdot \alpha_1] + [2 \cdot \alpha_2] + \ldots + [n \cdot \alpha_n]}{\dfrac{n(n+1)}{2}}$$

не існує.

Доведення. Припустимо, що $\lim_{n\to\infty} w_n$ існує. Тоді існує δ таке, що $0 < \delta < x_2 - x_1 - 2\varepsilon$. За критерієм Коші збіжності послідовності існує $n \in N$ таке, що для будь-яких $m,\ l > n$ виконується нерівність

$$|w_m - w_l| < \delta.$$

Згідно з побудовою послідовності (w_n), $w_{n_k} > x_2 - \varepsilon$ (якщо k — непарне) і $w_{n_k} < x_1 + \varepsilon$ (якщо k — парне).

Але завжди знайдеться $k \in N$ таке, що $n_k > n$. Тоді

$$|w_{n_{k+1}} - w_{n_k}| > x_2 - \varepsilon - (x_1 + \varepsilon) = x_2 - x_1 - 2\varepsilon > \delta,$$

тобто $|w_{n_{k+1}} - w_{n_k}| > \delta$. Отримали суперечність. Отже, границя $\lim_{n\to\infty} w_n$ не існує.

Виберемо x_1 та x_2 так, що $0 < x_1 < x_2$ і

$$\theta - 1 < x_i < \frac{2-\theta}{2}, \quad i = 1, 2,$$

і покладемо $y_i = x_i - 1 + \theta > 0$, $z_i = 2 - 2x_i - \theta$. Тоді $x_i + y_i + z_i = 1$ і $y_i + 2z_i = 2 - 2x_i - \theta + 2(2x_i - 1 + \theta) = \theta$.

Нехай $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i\{x_1, x_2\}$, $\beta_i = 2 - 2\alpha_i - \theta$, $\gamma_i = \alpha_i - 1 + \theta$. Означимо довжини серій нулів, одиниць та двійок числа x^* таким чином: $a_{i1} = [i \cdot \alpha_i]$, $a_{i2} = [i \cdot \beta_i]$, $a_{i3} = [i \cdot \gamma_i]$.

Очевидно, що

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1,$$

$$\beta_i + 2\gamma_i = \lambda.$$

Обчислимо середнє значення цифр числа x^* :

$$\frac{r_k}{k} = \frac{0 \cdot (a_{11} + \ldots + a_{(k-1)1}) + 1 \cdot (a_{12} + \ldots + a_{(k-1)2}) + 2 \cdot (a_{13} + \ldots + a_{(k-1)3}) + u_k}{a_{11} + \ldots + a_{(k-1)1} + a_{12} + \ldots + a_{(k-1)2} + a_{13} + \ldots + a_{(k-1)3} + v_k} =$$

$$= \frac{[1\cdot\beta_1] + \ldots + \big[(k-1)\cdot\beta_{k-1}\big] + 2[1\cdot\gamma_1] + \ldots + 2\big[(k-1)\cdot\gamma_{k-1}\big] + u_k}{[1\cdot\alpha_1] + [1\cdot\beta_1] + [1\cdot\gamma_1] + \ldots + \big[(k-1)\cdot\alpha_{k-1}\big] + \big[(k-1)\cdot\beta_{k-1}\big] + \big[(k-1)\cdot\gamma_{k-1}\big] + v_k},$$

де $u_k = n_1 + 2n_2$, а n_1 — кількість одиниць, n_2 — кількість двійок, які «потраплять» у k-й блок; v_k — довжина k-го блоку: кількість нулів, одиниць та двійок, які «потраплять» у k-й блок.

Оцінимо u_k і v_k :

$$0 \leqslant u_k \leqslant [k\cdot\beta_k] + 2[k\cdot\gamma_k] \leqslant k\cdot\beta_k + 2k\cdot\gamma_k = k(\beta_k + 2\gamma_k) = k\cdot\theta,$$

$$0 \leqslant v_k \leqslant [k\cdot\alpha_k] + [k\cdot\beta_k] + [k\cdot\gamma_k] \leqslant k\cdot\alpha_k + k\cdot\beta_k + k\cdot\gamma_k = k(\alpha_k + \beta_k + \gamma_k) = k.$$

Введемо позначення:

$$A_k \equiv [1\cdot\beta_1] + \ldots + \big[(k-1)\cdot\beta_{k-1}\big] + 2[1\cdot\gamma_1] + \ldots + 2\big[(k-1)\cdot\gamma_{k-1}\big],$$

$$B_k \equiv [1\cdot\alpha_1] + [1\cdot\beta_1] + [1\cdot\gamma_1] + \ldots + \big[(k-1)\cdot\alpha_{k-1}\big] + \big[(k-1)\cdot\beta_{k-1}\big] + \big[(k-1)\cdot\gamma_{k-1}\big].$$

Тоді згідно з властивостями цілої частини числа

1) $A_k \leqslant 1\cdot\beta_1 + \ldots + (k-1)\cdot\beta_{k-1} + 2\cdot 1\cdot\gamma_1 + \ldots + 2\cdot(k-1)\cdot\gamma_{k-1} = 1\cdot(\beta_1 + 2\gamma_1) + \ldots$ $\ldots + (k-1)\cdot(\beta_{k-1} + 2\gamma_{k-1}) = \theta(1 + 2 + \ldots + k - 1) = \theta\cdot\dfrac{(k-1)k}{2}$,
$A_k > 1\cdot\beta_1 - 1 + \ldots + (k-1)\cdot\beta_{k-1} - 1 + 2\cdot 1\cdot\gamma_1 - 2 + \ldots + 2\cdot(k-1)\cdot\gamma_{k-1} - 2 = 1\cdot(\beta_1 + 2\gamma_1) -$ $- 3 + \ldots + (k-1)\cdot(\beta_{k-1} + 2\gamma_{k-1}) - 3 = \theta(1 + 2 + \ldots + k - 1) - 3(k-1) = \theta\cdot\dfrac{(k-1)k}{2} - 3(k-1)$;

2) $B_k \leqslant 1\cdot\alpha_1 + 1\cdot\beta_1 + 1\cdot\gamma_1 + \ldots + (k-1)\cdot\alpha_{k-1} + (k-1)\cdot\beta_{k-1} + (k-1)\cdot\gamma_{k-1} =$ $= 1\cdot(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \ldots + (k-1)\cdot(\alpha_{k-1} + \beta_{k-1} + \gamma_{k-1}) = 1 + \ldots + k - 1 = \dfrac{(k-1)k}{2}$,
$B_k > 1\cdot\alpha_1 - 1 + 1\cdot\beta_1 - 1 + 1\cdot\gamma_1 - 1 + \ldots + (k-1)\alpha_{k-1} - 1 + (k-1)\beta_{k-1} - 1 + (k-1)\gamma_{k-1} - 1 =$ $= (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) - 3 + \ldots + (k-1)(\alpha_{k-1} + \beta_{k-1} + \gamma_{k-1}) - 3 = 1 + \ldots + k - 1 - 3(k-1) =$ $= \dfrac{(k-1)k}{2} - 3(k-1)$.

З останніх нерівностей випливає, що

$$\frac{A_k}{\dfrac{(k-1)k}{2}} \to \theta \quad \text{та} \quad \frac{B_k}{\dfrac{(k-1)k}{2}} \to 1 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тоді середнє значення цифр числа x^* дорівнює

$$\frac{r_k}{k} = \frac{A_k + u_k}{B_k + v_k} = \frac{\dfrac{A}{\dfrac{(k-1)}{2}} + \dfrac{u_k}{\dfrac{(k-1)k}{2}}}{\dfrac{B_k}{\dfrac{(k-1)}{2}} + \dfrac{v_k}{\dfrac{(k-1)k}{2}}} \to \frac{\theta + 0}{1 + 0} = \theta \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Покажемо, що частота нуля $\nu_0(x^*)$ не існує. Якби вона існувала, то дорівнювала б

$$\lim_{k\to\infty} \frac{[1\cdot\alpha_1] + \ldots + \big[(k-1)\cdot\alpha_{k-1}\big]}{B_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{[1\cdot\alpha_1] + \ldots + \big[(k-1)\cdot\alpha_{k-1}\big]}{\dfrac{(k-1)k}{2}}.$$

Але згідно з лемою 3, остання границя не існує. Тому не існує частоти $\nu_0(x^*)$.

Теорема 3. *Множина чисел W, частоти цифр яких не існують, а асимптотичне середнє значення цифр — наперед задане число з $(0;2)$, є континуальною та скрізь щільною підмножиною відрізка $[0;1]$.*

Доведення. *Континуальність.* Покажемо, що різним парам x_1, x_2 та x'_1, x'_2 $\left(x_i \neq x'_j \ \forall i,j \in \in \{1,2\}\right)$ відповідають різні числа x^* та x'^*. Припустимо протилежне, тобто що $x^* = x'^*$. Тоді k-ті серії нулів чисел x^* та x'^* рівні між собою, тобто

$$a_{k1} = [k \cdot \alpha_k] = a'_{k1} = [k \cdot \alpha'_k]$$

для кожного $k \in N$. Тоді

$$|\alpha_k \cdot k - \alpha'_k \cdot k| < 1$$

для всіх $k \in N$, тобто

$$k \min_{i,j \in \{1,2\}} |x_i - x'_j| < 1$$

для всіх $k \in N$. Але остання нерівність, очевидно, не виконується при достатньо великих k. Отримали суперечність.

Оскільки множина пар (x_1, x_2) чисел $x_1,\ x_2 \in \left(\theta - 1; \dfrac{2-\theta}{2}\right)$, $0 < x_1 < x_2$, є континуальною, то множина чисел, частоти цифр яких не існують, а асимптотичне середнє значення цифр — наперед задане число з $(0;2)$, є континуальною.

Доведемо *скрізь щільність* множини W. Нехай

$$\left[\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}; \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(2)}\right] \subset [0;1],$$

— деякий циліндричний відрізок, $x^* = \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ — число, яке має асимптотичне середнє значення цифр і не має жодної з частот цифр трійкового зображення, $\alpha_j, \beta_j \in \{0,1,2\}$. Оскільки асимптотичне середнє значення цифр не залежить від довільної скінченної кількості перших цифр трійкового зображення числа, то число $x'^* = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ також має асимптотичне середнє значення цифр і не має жодної з частот трійкових цифр. Але $x'^* \in \in \left[\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}; \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(2)}\right]$. А це означає, що множина чисел, частоти цифр яких не існують, а асимптотичне середнє значення цифр — наперед задане число з $(0;2)$, є скрізь щільною множиною у відрізку $[0;1]$.

Теорема 4. *Функція r асимптотичного середнього значення цифр числа має наступні властивості*:

1. *Визначена на скрізь щільній множині відрізка* $[0;1]$.
2. *На скрізь щільній підмножині відрізка* $[0;1]$ *вона не визначена.*
3. *Набуває всіх значень з множини* $[0; s-1]$.
4. *Має лише один рівень повної міри Лебега.*

Доведення. Перші дві властивості випливають з попередніх фактів.

Справді, оскільки асимптотичне середнє значення цифр не залежить від довільної скінченної кількості перших цифр трійкового зображення числа, то множина точок, на якій функція частоти визначена, є скрізь щільною у $[0;1]$.

Існують числа, які не мають асимптотичного середнього значення цифр. Наприклад, таким є число

$$x^* = \Delta^s_{01001100001111\ldots\underbrace{0\ldots0}_{2^n}\underbrace{1\ldots1}_{2^n}\ldots}.$$

Оскільки асимптотичне середнє значення цифр не залежить від довільної скінченної кількості перших цифр трійкового зображення числа, то множина точок, на якій функція частоти не визначена, є також скрізь щільною підмножиною $[0;1]$.

3. Оскільки $0 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \leqslant s-1$, то функція $r(x)$ не може набувати значень більших за $s-1$ і менших за 0. Згідно з наведеним вище алгоритмом побудови числа з наперед заданими частотами цифр, очевидно, функція $r(x)$ може набувати всіх значень з $[0; s-1]$.

4. Згідно з теоремою 1, лише нормальні числа мають властивість $r(x) = \frac{s-1}{2}$, отже, множина точок, в яких функція r набуває одного і того ж фіксованого значення $\frac{s-1}{2}$, є множиною повної міри Лебега, тобто функція r має лише один рівень повної міри Лебега.

1. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, № 9. – P. 1361 – 1370.
2. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Topological and fractal properties of real numbers which are not normal // Bull. Sci. Math. – 2005. – **129**, № 8. – P. 615 – 630.
3. *Besicovitch A. S.* Sets of fractional dimension. 2. On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system // Math. Ann. – 1934. – **110**, № 3. – P. 321 – 330.
4. *Borel É.* Les probabilites denombrables et leurs applications arithmetiques // Rend. Circ. mat. Palermo. – 1909. – **27**. – P. 247 – 271.
5. *Eggleston H. G.* The fractional dimension of a set defined by decimal properties // Quart. J. Math. – 1949. – Oxford Ser. 20. – P. 31 – 36.
6. *Olsen L.* Normal and non-normal points of self-similar sets and divergence points of self-similar measures // J. London Math. Soc. – 2003. – **2(67)**, № 1. – P. 103 – 122.
7. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
8. *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n–адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 7. – С. 971 – 975.
9. *Торбін Г. М.* Частотні характеристики нормальних чисел в різних системах числення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – 1998. – № 1. – С. 53 – 55.
10. *Турбин А. Ф., Працевитий Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.

Одержано 08.02.13