УДК 517.95

О. Т. Холявка (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ГІПЕРБОЛІЧНА ВАРІАЦІЙНА НЕРІВНІСТЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМ СТЕПЕНЕМ НЕЛІНІЙНОСТІ

In Sobolev spaces with variable exponent, we consider the problem for a semilinear hyperbolic variational inequality of the third order. We establish some conditions for the existence of the solution u of this problem such that $u \in$ $\in L^\infty\big((0,T);V_{1,0}(\Omega)\big)$, $u_t \in L^\infty\big((0,T);V_{1,0}(\Omega)\big) \cap L^{p(x)}(Q_T)$, $u_{tt} \in L^\infty\big((0,T);L^2(\Omega)\big)$, where $V_{1,0}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

В пространствах Соболева с переменным показателем рассмотрена задача для полулинейного гиперболического вариационного неравенства третьего порядка. Установлены условия существования решения u указанной задачи такого, что $u \in L^\infty\big((0,T);V_{1,0}(\Omega)\big)$, $u_t \in L^\infty\big((0,T);V_{1,0}(\Omega)\big) \cap L^{p(x)}(Q_T)$, $u_{tt} \in L^\infty\big((0,T);L^2(\Omega)\big)$, где $V_{1,0}(\Omega) \subset$ $\subset H^1(\Omega)$.

Вступ. С. М. Глазатов [1] розглянув рівняння третього порядку, яке у модельному випадку має вигляд

$$u_{tt} - \alpha\Delta u - \beta\Delta u_t + \gamma|u_t|^{p(x)-2}u_t = f(x,t), \tag{1}$$

де $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma = 0$. Це рівняння прийнято називати гіперболічним рівнянням зі збуренням або гіперболічним рівнянням третього порядку (див. [1], а також наведену там бібліографію). Рівняння такого типу виникають при описі процесів, які відбуваються у в'язких середовищах, зокрема моделюють крутильні коливання металевого кругового циліндра з внутрішнім тертям, поширення збурень у в'язко-пружному матеріалі, розповсюдження звуку у в'язкому газі в трубі, а також деякі інші процеси. Задачі для таких рівнянь та деяких їх узагальнень активно вивчаються останнім часом. У випадку $\gamma \neq 0$ рівняння (1) має змінний показник нелінійності — функцію $p(x)$. Задачі для рівнянь зі змінними показниками нелінійності моделюють багато явищ, зокрема фізичні процеси, що лежать в основі функціонування термістора (див. [2]). Мішані задачі з крайовими умовами Діріхле для таких рівнянь вивчалися, зокрема, у працях [2, 3].

Якщо крайові умови для рівняння (1) мають загальніший вигляд, наприклад є односторонніми умовами (див. [4, 5]), то узагальнений розв'язок відповідної мішаної задачі задовольняє не рівняння, а деяку варіаційну нерівність. Варіаційні нерівності параболічного типу зі змінними показниками нелінійності досліджено у працях [6 – 11]. Гіперболічні варіаційні нерівності другого порядку зі сталими показниками нелінійності у необмежених областях вивчено у [12], а зі змінними показниками в обмежених областях — у роботі [13]. У працях [1, 14] доведено теореми існування та єдиності розв'язків нелінійних варіаційних нерівностей третього порядку зі сталими показниками нелінійності в обмежених областях.

У цій праці продовжується дослідження задачі, розглянутої автором і С. П. Лавренюком у [15]. У роботі [15] знайдено умови єдиності розв'язку гіперболічної варіаційної нерівності третього порядку зі змінним показником нелінійності в необмежених за просторовими змінними областях. У цій статті вивчається питання про існування розв'язку відповідної варіаційної нерівності в обмежених областях. Як відомо автору, питання про існування розв'язку таких задач раніше не розглядалося.

Формулювання задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$, $\operatorname{mes}\Gamma_1 > 0, \operatorname{mes}\Gamma_2 > 0$; $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $\tau, t_1, t_2 \in [0,T]$; $p \in L^\infty(\Omega)$, $1 < p_0 \le p(x) \le p^0 < +\infty$, де $p_0 = \operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x)$, $p^0 = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x)$.

Введемо функціонал $\rho_p(v,\Omega) = \int\limits_\Omega |v(x)|^{p(x)}\,dx$, де $v = v(x)$ — деяка функція. Нагадаємо, що простором Лебега зі змінним показником називають множину функцій

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R}^1 \;\middle|\; v \text{ — вимірна, } \rho_p(v,\Omega) < +\infty \right\}.$$

Ці простори були введені у 1931 р. В. Орлічем [16] і вивчалися, зокрема, у роботах [7, 16 – 19]. У праці [18] доведено, що $L^{p(x)}(\Omega)$ є сепарабельним, рефлексивним та банаховим простором, якщо на ньому ввести норму за правилом

$$||v; L^{p(x)}(\Omega)|| = \inf\left\{ \lambda > 0\colon \int\limits_\Omega |v/\lambda|^{p(x)}\,dx \le 1 \right\}.$$

Введемо також простори: $H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) = \left\{ z \in H^1(\Omega)\colon z|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$, $V_1(\Omega)$ — гільбертів простір такий, що $H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) \subset V_1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, $V_{1,0}(\Omega) = \{ z \in V_1(\Omega)\colon z|_{\Gamma_2} = 0\}$. Нехай $K \subset V_1(\Omega)$ — опуклий замкнений конус такий, що $0 \in K$ і $\varphi K \subset K$ для довільної функції $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярний добуток між просторами $V_1^*(\Omega) \overset{\text{df}}{=} \left[V_1(\Omega)\right]^*$ і $V_1(\Omega)$.

В області Q_T розглянемо варіаційну нерівність для функції u

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[u_{tt}(w-u_t)\psi(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i t}\big((w-u_t)\psi(x)\big)_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i}\big((w-u_t)\psi(x)\big)_{x_j} + c(x)|u_t|^{p(x)-2}u_t(w-u_t)\psi(x) -$$

$$-f(x,t)(w-u_t)\psi(x)\Bigg]\,dxdt \ge 0, \qquad v,\psi \text{ — пробні функції,} \qquad \tau \in (0,T], \tag{2}$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Означення 1. *Функцію u, що задовольняє включення*

$$u \in L^\infty\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big), \qquad u_t \in L^\infty\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big) \cap L^{p(x)}(Q_T),$$

$$u_{tt} \in L^\infty\big((0,T); L^2(\Omega)\big), \qquad u_t(t) \in K$$

для майже всіх $t \in [0,T]$, умови (3) *та варіаційну нерівність* (2) *для кожного $\tau \in (0,T]$, всіх $w \in L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big) \cap L^{p(x)}(Q_T)$, $w(t) \in K$ майже для всіх $t \in [0,T]$ та довільних $\psi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, називаємо сильним розв'язком задачі* (2), (3).

Говоритимемо, що виконуються умови **(A)**, $(\mathbf{B})$, $(\mathbf{C})$, $(\mathbf{U})$, $(\mathbf{W})$, якщо:

(A) $a_{ij}, a_{ij,x_j} \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$, $i,j = \overline{1,n}$, $a_0|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le a^0|\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ та майже всіх $x \in \Omega$, де $a_0 > 0$;

(B) $b_{ij}, b_{ij,x_j} \in L^\infty(\Omega)$, $b_{ij}(x) = b_{ji}(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$, $i,j = \overline{1,n}$, $b_0|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le b^0|\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $x \in \Omega$, де $b_0 > 0$;

(C) $c \in L^\infty(\Omega)$, $0 < c_0 \le c(x) \le c^0 < +\infty$ для майже всіх $x \in \Omega$;

(U) $u_0 \in V_{1,0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in V_{1,0}(\Omega) \cap L^{2p(x)-2}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in \operatorname{int} K$ або $u_1 \equiv 0$;

(W) існує монотонний, обмежений, семінеперервний оператор $\beta\colon V_1(\Omega) \to V_1^*(\Omega)$ такий, що $K = \{v\colon v \in V_1(\Omega),\, \beta(v) = 0\}$ і, крім того,

$$\int\limits_0^\tau \langle \beta(w) - \beta(v), (w-v)\psi\rangle\, dt \ge 0$$

$$\forall\, \tau \in (0,T] \qquad \forall\, w, v \in L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big) \qquad \forall \psi \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad \psi(x) \geqslant 0;$$

$$\int\limits_0^\tau \langle \big(\beta(w)\big)_t, w_t\rangle\, dt \ge 0 \qquad \forall\, w \in L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big), \quad w_t \in L^2(Q_T), \qquad \tau \in (0,T].$$

Розв’язок задачі (2), (3) ми отримаємо як границю розв’язків мішаних задач для відповідних рівнянь зі штрафом. Сформулюємо згадані тут задачі.

Допоміжна задача зі штрафом. Нехай $\varepsilon > 0$ — деяке число. В області Q_T розглянемо допоміжну задачу про знаходження розв’язку рівняння зі штрафом

$$\tilde u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \big(a_{ij}(x)\tilde u_{x_i t}\big)_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n \big(b_{ij}(x)\tilde u_{x_i}\big)_{x_j} + c(x)|\tilde u_t|^{p(x)-2}\tilde u_t + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(\tilde u_t) = f(x,t), \tag{4}$$

який задовольняє умови

$$\tilde u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{5}$$

$$\tilde u(x,0) = u_0(x), \quad \tilde u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

Означення 2. *Під узагальненим розв’язком задачі* (4)–(6) *розуміємо функцію* $\tilde u$, *яка задовольняє включення* $\tilde u \in L^\infty\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big)$, $\tilde u_t \in L^{p(x)}(Q_T) \cap L^\infty\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big)$, $\tilde u_{tt} \in L^\infty\big((0,T); L^2(\Omega)\big)$, *умови* (5), (6), *а також інтегральну тотожність*

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[\tilde u_{tt}v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\tilde u_{x_i t}v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)\tilde u_{x_i}v_{x_j} +$$

$$+ c(x)|\tilde u_t|^{p(x)-2}\tilde u_t v - f(x,t)v\Big]\, dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle\beta(\tilde u_t), v\rangle\; dt = 0 \tag{7}$$

$\forall\, \tau \in (0,T]$ $\forall\, v \in L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big) \cap L^{p(x)}(Q_T)$.

Теорема 1 (про розв'язність допоміжної задачі). *Якщо виконуються умови* $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{B})$, $(\mathbf{C})$, $(\mathbf{U})$, $(\mathbf{W})$, $p_0 > 2$, $f \in L^2(Q_T)$, $f_t \in L^2(Q_T)$, *то задача* (4)–(6) *має узагальнений розв'язок* $\tilde{u}$ *такий, що* $\tilde{u}, \tilde{u}_t \in C([0,T]; V_{1,0}(\Omega))$, $\tilde{u}_{tt} \in L^2((0,T); V_{1,0}(\Omega))$.

Доведення. Використаємо метод Фаедо–Гальоркіна. Нехай $\{\varphi^k\}$ — лінійно незалежна повна система функцій у просторі $V_{1,0}(\Omega) \cap L^{2p(x)-2}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$. Розглянемо послідовність функцій

$$\tilde{u}^N(x,t) \ = \ \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\varphi^k(x), \quad N \in \mathbb{N}, \qquad (x,t) \in Q_T,$$

де $c_1^N, \ldots, c_N^N$ — розв'язок задачі Коші

$$\int\limits_{\Omega_t} \left[\tilde{u}_{tt}^N \varphi^k + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\tilde{u}_{x_i t}^N \varphi_{x_j}^k + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\tilde{u}_{x_i}^N \varphi_{x_j}^k + c(x)|\tilde{u}_t^N|^{p(x)-2}\tilde{u}_t^N \varphi^k - \right.$$

$$\left. - f(x,t)\varphi^k \right] dx + \ \frac{1}{\varepsilon}\Big\langle \beta\big(\tilde{u}_t^N(t)\big), \varphi^k \Big\rangle \ = \ 0, \qquad t \in (0,T), \tag{8}$$

$$c_k^N(0) = \tilde{u}_{0,k}^N, \qquad c_{kt}^N(0) = \tilde{u}_{1,k}^N, \qquad k = \overline{1,N}, \tag{9}$$

причому

$$\big\|\tilde{u}_0^N - u_0\big\|_{H^1(\Omega)} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \big\|\tilde{u}_1^N - u_1\big\|_{L^2(\Omega)} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

де

$$\tilde{u}_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{u}_{0,k}^N \varphi^k(x), \qquad \tilde{u}_1^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{u}_{1,k}^N \varphi^k(x), \qquad x \in \Omega.$$

З умови на u_1 випливає, що починаючи з деякого номера N_0 (нехай, для зручності, $N_0 = 1$) $\tilde{u}_1^N$ належить K для всіх $N \geq 1$. Зрозуміло, що

$$\tilde{u}^N(0) = \tilde{u}_0^N, \qquad \tilde{u}_t^N(0) = \tilde{u}_1^N. \tag{10}$$

На підставі теореми Каратеодорі (див. [20, с. 54]) існує диференційовний розв'язок цієї задачі, який має абсолютно неперервні похідні $c_{1,t}^N, \ldots, c_{N,t}^N$, визначений на деякому проміжку $[0,\, t_N]$, $t_N \leqslant T$. З оцінок, отриманих нижче, буде випливати, що $t_N = T$.

Домножимо кожну рівність системи (8), відповідно, на функцію $c_{k,t}^N(t)$, підсумуємо всі рівняння по k від 1 до N і зінтегруємо по проміжку $[0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$. Після цього отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \left[\tilde{u}_{tt}^N \tilde{u}_t^N + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\tilde{u}_{x_i t}^N \tilde{u}_{x_j t}^N + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\tilde{u}_{x_i}^N \tilde{u}_{t x_j}^N + c|\tilde{u}_t^N|^{p(x)} - \right.$$

$$\left. - f\tilde{u}_t^N \right] dxdt + \ \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \beta(\tilde{u}_t^N), \tilde{u}_t^N \rangle \; dt = \ 0. \tag{11}$$

Зрозуміло, що для $\delta_0 > 0$ має місце оцінка

$$\alpha\beta \leq \delta_0|\alpha|^{p(x)} + Y_p(\delta_0)|\beta|^{p'(x)}, \tag{12}$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{p'(x)} = 1$, $Y_p(\delta_0) = \dfrac{p^0 - 1}{p_0(\delta_0 p_0)^{1/(p^0-1)}}$ при $\delta_0 p_0 \leq 1$ та $Y_p(\delta_0) = \dfrac{p^0 - 1}{p_0(\delta_0 p_0)^{1/(p_0-1)}}$ при $\delta_0 p_0 > 1$. Враховуючи умови теореми та нерівність (12), рівність (11) записуємо у вигляді

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\left|\tilde{u}_t^N\right|^2 + b_0\left|\nabla\tilde{u}^N\right|^2\right]dx + \Big(c_0 - \delta_0\Big)\int\limits_{Q_\tau}|\tilde{u}_t^N|^{p(x)}\,dxdt + a_0\int\limits_{Q_\tau}|\nabla\tilde{u}_t^N|^2\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau\langle\beta(\tilde{u}_t^N), \tilde{u}_t^N\rangle\,dt \leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left[\left|\tilde{u}_1^N\right|^2 + b^0\left|\nabla\tilde{u}_0^N\right|^2\right]dx + Y_p(\delta_0)\int\limits_{Q_\tau}|f|^{p'(x)}\,dxdt. \tag{13}$$

Поклавши $\delta_0 = \dfrac{c_0}{2}$, з (13) легко отримати оцінки

$$\int\limits_0^T\langle\beta(\tilde{u}_t^N), \tilde{u}_t^N\rangle\,dt \leq C_2\varepsilon, \tag{14}$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\left|\tilde{u}_t^N\right|^2 + \left|\nabla\tilde{u}^N\right|^2\right]dx + \int\limits_{Q_\tau}\left[|\tilde{u}_t^N|^{p(x)} + |\nabla\tilde{u}_t^N|^2\right]dxdt \leq C_2, \quad \tau \in [0, T], \tag{15}$$

де стала C_2 не залежить від N, ε та $\tau \in (0, T]$. Оскільки за умовою $(\mathbf{W})$ оператор $\beta\colon V_1(\Omega) \to$ $\to V_1^*(\Omega)$ обмежений, то

$$||\beta(\tilde{u}_t^N); L^2\big((0,T); V_1^*(\Omega)\big)|| \leq C_3 \tag{16}$$

і стала C_3 не залежить від N, ε.

Здиференціюємо (8) по t. Після цього помножимо кожну рівність отриманої системи, відповідно, на функцію $c_{k,tt}^N(t)$, підсумуємо всі рівняння по k від 1 до N та зінтегруємо по проміжку $[0, \tau]$, $\tau \in (0, T]$:

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\tilde{u}_{ttt}^N\tilde{u}_{tt}^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\tilde{u}_{x_itt}^N\tilde{u}_{x_jtt}^N + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)\tilde{u}_{x_it}^N\tilde{u}_{x_jtt}^N + c(x)(p(x)-1)|\tilde{u}_t^N|^{p(x)-2}|\tilde{u}_{tt}^N|^2 -$$

$$-f_t(x,t)\tilde{u}_{tt}^N\Bigg]\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau\langle\big(\beta(\tilde{u}_t^N)\big)_t, \tilde{u}_{tt}^N\rangle\,dt = 0.$$

На підставі умов $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{B})$, $(\mathbf{C})$ з останньої рівності отримуємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\left|\tilde{u}_{tt}^N\right|^2 + \left|\nabla\tilde{u}_t^N\right|^2\right]dx + \int\limits_{Q_\tau}|\nabla\tilde{u}_{tt}^N|^2\,dxdt + \int\limits_{Q_\tau}|\tilde{u}_t^N|^{p(x)-2}|\tilde{u}_{tt}^N|^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau\langle\big(\beta(\tilde{u}_t^N)\big)_t, \tilde{u}_{tt}^N\rangle\,dt \leq$$

$$\leq C_4 \left[\int\limits_{Q_\tau} |\tilde{u}_{tt}^N|^2 \, dxdt + \int\limits_{\Omega_0} \left|\tilde{u}_{tt}^N(0)\right|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega_0} \left|\nabla \tilde{u}_1^N\right|^2 \, dx + \int\limits_{Q_\tau} |f_t|^2 \, dxdt \right], \tag{17}$$

де стала C_4 не залежить від N, ε та $\tau \in (0, T]$.

Можна показати, що виконується нерівність

$$\int\limits_{\Omega_0} \left|\tilde{u}_{tt}^N(0)\right|^2 \, dx \leq C_5$$

і стала C_5 не залежить від N та ε.

Крім того, для будь-якого $\tau \in (0, T]$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau \langle \big(\beta(\tilde{u}_t^N)\big)_t, \tilde{u}_{tt}^N \rangle \, dt \geq 0.$$

Тоді з (17) на підставі одержаних оцінок, леми Гронуолла – Беллмана та певних перетворень матимемо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[\left|\tilde{u}_{tt}^N\right|^2 + \left|\nabla \tilde{u}_t^N\right|^2 \right] dx + \int\limits_{Q_\tau} \left[\left|\nabla \tilde{u}_{tt}^N\right|^2 + \left|\tilde{u}_{tt}^N\right|^2 + |\tilde{u}_t^N|^{p(x)-2} |\tilde{u}_{tt}^N|^2 \right] dxdt \leq C_6, \tag{18}$$

де стала C_6 не залежить від N, ε та $\tau \in (0, T]$. Можна отримати оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left|\tilde{u}^N\right|^2 \, dx + \int\limits_{Q_\tau} \left|\nabla \tilde{u}^N\right|^2 \, dxdt \leq C_7, \tag{19}$$

де стала C_7 не залежить від N, ε, τ.

Згідно з (15), (16), (18), (19) існує підпослідовність $\{\tilde{u}^{N_k}\}_{N_k \in \mathbb{N}}$ послідовності $\{\tilde{u}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ та існують функції $\tilde{u}$, $\tilde{z}$ такі, що

$$\tilde{u}^{N_k} \to \tilde{u} \quad *\text{-слабко в } L^\infty\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big), \quad \tilde{u}^{N_k} \to \tilde{u} \quad \text{слабко в } L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big),$$

$$\tilde{u}_t^{N_k} \to \tilde{u}_t \ *\text{-слабко в } L^\infty\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big), \ \ \tilde{u}_t^{N_k} \to \tilde{u}_t \text{ слабко в } L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big) \cap L^{p(x)}(Q_T),$$

$$\beta(\tilde{u}_t^{N_k}) \to \tilde{z} \quad \text{слабко в } L^2\big((0,T); V_1^*(\Omega)\big), \quad \tilde{u}_{tt}^{N_k} \to \tilde{u}_{tt} \quad *\text{-слабко в } L^\infty\big((0,T); L^2(\Omega)\big), \tag{20}$$

$$\tilde{u}_{tt}^{N_k} \to \tilde{u}_{tt} \quad \text{слабко в } L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big), \quad \tilde{u}^{N_k} \to \tilde{u} \quad \text{слабко в } H^1(Q_T),$$

$$\tilde{u}_t^{N_k} \to \tilde{u}_t \quad \text{слабко в } H^1(Q_T) \quad \text{при} \ \ N_k \to \infty.$$

З останніх двох збіжностей випливає (див. [4, с. 25]), що

$$\tilde{u}^{N_k} \underset{N_k \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{u}, \qquad \tilde{u}_t^{N_k} \underset{N_k \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{u}_t \qquad \text{сильно в } \ L^2(Q_T) \text{ і майже скрізь в } \ Q_T.$$

Зазначимо також, що

$$\int\limits_{Q_T} \left| |\tilde{u}_t^{N_k}|^{p(x)-2}\tilde{u}_t^{N_k} \right|^{p'(x)} dx\,dt \le \int\limits_{Q_T} |\tilde{u}_t^{N_k}|^{p(x)}\,dx\,dt \le C_7$$

і тому (див. [21]) $|\tilde{u}_t^{N_k}|^{p(x)-2}\tilde{u}_t^{N_k} \to |\tilde{u}_t|^{p(x)-2}\tilde{u}_t$ слабко в $L^{p'(x)}(Q_T)$.

На підставі збіжностей (20) та леми 1.2 (див. [4, с. 20]) отримуємо, що $\tilde{u} \in C\big([0,T];V_{1,0}(\Omega)\big)$. Маємо $\tilde{u}^{N_k}(0) \to \tilde{u}(0)$ слабко в $V_{1,0}(\Omega)$, $\tilde{u}^{N_k}(0) = \tilde{u}_0^{N_k} \to \tilde{u}_0$ сильно в $H^1(\Omega)$. Тому $\tilde{u}(0) = \tilde{u}_0$. Аналогічно переконуємося, що $\tilde{u}_t \in C\big([0,T];V_{1,0}(\Omega)\big)$, $\tilde{u}_t^{N_k}(0) \to \tilde{u}_t(0)$ слабко в $V_{1,0}(\Omega)$, $\tilde{u}_t^{N_k}(0) = \tilde{u}_1^{N_k} \to \tilde{u}_1$ сильно в $L^2(\Omega)$. Тому $\tilde{u}_t(0) = \tilde{u}_1$.

Нехай l — довільне натуральне число і $N \geqslant l$. Візьмемо довільні гладкі функції $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$. Домножимо перше рівняння системи (8) на функцію $\mu_1(t)$, друге — на $\mu_2(t)$ і т. д. до l-го рівняння. Підсумуємо одержані рівності та зінтегруємо по t від 0 до τ, $\tau \in (0,T]$. В результаті будемо мати

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\tilde{u}_{tt}^N\hat{v} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\tilde{u}_{x_it}^N\hat{v}_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}\tilde{u}_{x_i}^N\hat{v}_{x_j} + c|\tilde{u}_t^N|^{p(x)-2}\tilde{u}_t^N\hat{v} -$$

$$-f\hat{v}\Bigg]\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle\beta(\tilde{u}_t^N),\hat{v}\rangle\;dt = 0, \tag{21}$$

де $\hat{v}(x,t) = \sum_{i=1}^l \mu_i(t)\varphi_i(x)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,\tau)$. Перейдемо в (21) при $N = N_k$ до границі при $k \to \infty$. Згідно з попередніми зауваженнями щодо збіжності послідовності $\{\tilde{u}^{N_k}\}_{N_k\in\mathbb{N}}$, для довільних $\tau \in (0,T]$ та всіх $v \in L^2\big((0,T);V_{1,0}(\Omega)\big) \cap L^{p(x)}(Q_T)$ після ще одного граничного переходу при $l \to \infty$ правильною є рівність

$$\int\limits_{Q_T}\Bigg[\tilde{u}_{tt}v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\tilde{u}_{x_it}v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}\tilde{u}_{x_i}v_{x_j} + c|\tilde{u}_t|^{p(x)-2}\tilde{u}_tv - fv\Bigg]\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T \langle\tilde{z},v\rangle\;dt = 0. \tag{22}$$

Отже, $\tilde{u}$ — розв'язок задачі (4) – (6), якщо $\tilde{z} = \beta(\tilde{u}_t)$. Покажемо це.

Взявши в (22) замість v добуток функції $\tilde{u}_t$ на характеристичну функцію відрізка $[t_1,t_2] \subset [0,T]$, одержимо

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Bigg[\tilde{u}_{tt}\tilde{u}_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\tilde{u}_{x_it}\tilde{u}_{x_jt} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}\tilde{u}_{x_i}\tilde{u}_{x_jt} + c|\tilde{u}_t|^{p(x)} - f\tilde{u}_t\Bigg]\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_1}^{t_2} \langle\tilde{z},\tilde{u}_t\rangle\;dt = 0. \tag{23}$$

Взявши тут $t_2 = \tau$, $t_1 = 0$ та зінтегрувавши частинами, отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}\tilde{u}_{x_i}\tilde{u}_{x_j}\,dx + \int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\tilde{u}_{tt}\tilde{u}_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\tilde{u}_{x_it}\tilde{u}_{x_jt} + c|\tilde{u}_t|^{p(x)} -$$

$$-f\tilde{u}_t\Bigg]\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle\tilde{z},\tilde{u}_t\rangle\;dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}\tilde{u}_{0x_i}\tilde{u}_{0,x_j}\,dx. \tag{24}$$

Розглянемо послідовність

$$\eta_k = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \beta(\tilde{u}_t^{N_k}) - \beta(w), \tilde{u}_t^{N_k} - w\rangle\, dt, \quad w \in L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Використавши монотонність оператора β та формулу (21) з $\tilde{v} = \tilde{u}_t^N$, $N = N_k$, матимемо

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \sup \eta_k =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sup \left\{ \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \beta(\tilde{u}_t^{N_k}), \tilde{u}_t^{N_k}\rangle\, dt - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \beta(\tilde{u}_t^{N_k}), w\rangle\, dt - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \beta(w), \tilde{u}_t^{N_k} - w\rangle\, dt \right\} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sup \left\{ \int\limits_{Q_\tau} \left[f\tilde{u}_t^{N_k} - \tilde{u}_{tt}^{N_k}\tilde{u}_t^{N_k} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\tilde{u}_{x_it}^{N_k}\tilde{u}_{x_jt}^{N_k} - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}\tilde{u}_{x_i}^{N_k}\tilde{u}_{tx_j}^{N_k} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -c|\tilde{u}_t^{N_k}|^{p(x)} \right] dxdt - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \beta(\tilde{u}_t^{N_k}), w\rangle\, dt - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \beta(w), \tilde{u}_t^{N_k} - w\rangle\, dt \right\} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sup \left\{ -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}\tilde{u}_{x_i}^{N_k}\tilde{u}_{x_j}^{N_k}\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}\tilde{u}_{0x_i}^{N_k}\tilde{u}_{0,x_j}^{N_k}\, dx + \right.$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[f\tilde{u}_t^{N_k} - \tilde{u}_{tt}^{N_k}\tilde{u}_t^{N_k} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\tilde{u}_{x_it}^{N_k}\tilde{u}_{x_jt}^{N_k} - c|\tilde{u}_t^{N_k}|^{p(x)} \right] dxdt -$$

$$\left. -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \beta(\tilde{u}_t^{N_k}), w\rangle\, dt - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \beta(w), \tilde{u}_t^{N_k} - w\rangle\, dt \right\} \leq$$

$$\leq -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}\tilde{u}_{x_i}\tilde{u}_{x_j}\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}\tilde{u}_{0x_i}\tilde{u}_{0,x_j}\, dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[f\tilde{u}_t - \tilde{u}_{tt}^{N_k}\tilde{u}_t^{N_k} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\tilde{u}_{x_it}\tilde{u}_{x_jt} - c|\tilde{u}_t|^{p(x)} \right] dxdt -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \tilde{z}, w\rangle\, dt - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \beta(w), \tilde{u}_t - w\rangle\, dt. \tag{25}$$

Додамо формули (24) та (25). Тоді для всіх $\tau \in (0,T]$ та довільного $w \in L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big)$ отримаємо оцінку

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \langle \tilde{z}-\beta(w), \tilde{u}_t - w\rangle\, dt \geq 0,$$

яка і гарантує рівність $\tilde{z}=\beta(\tilde{u}_t)$. Отже, $\tilde{u}$ — узагальнений розв'язок задачі (4)–(6).

Теорему доведено.

Доведення основного результату.

Теорема 2 (про існування розв'язку задачі (2), (3)). *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{B})$, $(\mathbf{C})$, $(\mathbf{U})$, $(\mathbf{W})$, $p_0 > 2$ *і, крім того,* $f \in L^2(Q_T)$, $f_t \in L^2(Q_T)$. *Тоді задача* (2), (3) *має сильний розв'язок.*

Доведення. Для кожного $\varepsilon = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots$ розглянемо задачу (4)–(6). Згідно з теоремою 1, для кожного ε існує розв'язок u^ε задачі (4)–(6). Так само, як і в доведенні теореми 1, для послідовності $\{u^\varepsilon\}$ одержуємо аналоги оцінок (14), (15), (18), (19). Тому існують послідовність чисел $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$, та функція u такі, що

$$u^{\varepsilon_k} \to u \ *\text{-слабко в } L^\infty\big((0,T);V_{1,0}(\Omega)\big), \quad u^{\varepsilon_k} \to u \ *\text{-слабко в } L^2\big((0,T);V_{1,0}(\Omega)\big),$$

$$u_t^{\varepsilon_k} \to u_t \ *\text{-слабко в } L^\infty\big((0,T);V_{1,0}(\Omega)\big), \quad u_t^{\varepsilon_k} \to u_t \ \text{ слабко в } L^2\big((0,T);V_{1,0}(\Omega)\big)\cap L^{p(x)}(Q_T),$$

$$u_{tt}^{\varepsilon_k} \to u_{tt} \ *\text{-слабко в } L^\infty\big((0,T);L^2(\Omega)\big), \quad u_{tt}^{\varepsilon_k} \to u_{tt} \ \text{ слабко в } L^2\big((0,T);V_{1,0}(\Omega)\big),$$

$$u^{\varepsilon_k} \to u \ \text{ слабко в } H^1(Q_T), \quad u_t^{\varepsilon_k} \to u_t \ \text{ слабко в } H^1(Q_T), \tag{26}$$

$$\int_0^T \langle \beta(u_t^{\varepsilon_k}), u_t^{\varepsilon_k}\rangle\ dt \leq C_2\varepsilon_k \to\ 0 \qquad \text{при} \qquad k\to\infty,$$

$$u^{\varepsilon_k} \to u, \quad u_t^{\varepsilon_k} \to u_t \ \text{ сильно в } \ L^2(Q_T) \text{ та майже скрізь на } \ Q_T,$$

$$|u_t^{\varepsilon_k}|^{p(x)-2}\, u_t^{\varepsilon_k} \to |u_t|^{p(x)-2}u_t \ \text{ слабко в } \ L^{p'(x)}(Q_T) \ \text{ при } \ \varepsilon_k \to +0.$$

Тоді на підставі аналога рівності (21)

$$\int_0^T \langle \beta(u_t^{\varepsilon_k}), w\rangle\, dt \ \to\ 0 \quad \text{для всіх } \ w \in L^2\big((0,T);V_{1,0}(\Omega)\big)\cap L^{p(x)}(Q_T). \tag{27}$$

Розглянемо послідовність

$$0 \leq y_k = \int_0^T \langle \beta(u_t^{\varepsilon_k}) - \beta(w), u_t^{\varepsilon_k} - w\rangle\, dt, \quad w \in L^2\big((0,T);V_{1,0}(\Omega)\big).$$

Згідно з (26), (27) отримуємо

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\int_0^T \langle \beta(w), u_t - w\rangle\, dt,$$

а тому $\int_0^T \langle \beta(w), u_t - w\rangle\, dt \le 0$. Нехай $w = u_t - \lambda z,\ z \in L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big),\ \lambda > 0$. Тоді

$$\int_0^T \langle \beta(u_t - \lambda z), z\rangle\, dt \le 0.$$

Оскільки оператор β є семінеперервним, то $\int_0^T \langle \beta(u_t), z\rangle\, dt \le 0$. Звідси робимо висновок про те, що $\beta(u_t) = 0$, а отже, $u_t(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$.

Запишемо аналог рівності (22) з $\tilde u = u^{\varepsilon_k}$, $v = (w - u_t^{\varepsilon_k})\psi$, де $w \in L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big) \cap \cap L^{p(x)}(Q_T)$, $w(t) \in K$ для майже всіх $t \in (0,T)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \ge 0$ в $\mathbb{R}^n$:

$$\int_{Q_\tau} \Bigg[u_{tt}^{\varepsilon_k}(w - u_t^{\varepsilon_k})\psi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t}^{\varepsilon_k}\big((w - u_t^{\varepsilon_k})\psi\big)_{x_j} +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i}^{\varepsilon_k}\big((w - u_t^{\varepsilon_k})\psi\big)_{x_j} + c|u_t|^{p(x)-2} u_t^{\varepsilon_k}(w - u_t^{\varepsilon_k})\psi -$$
$$- f(x,t)(w - u_t^{\varepsilon_k})\psi \Bigg] dxdt = -\frac{1}{\varepsilon_k} \int_0^\tau \langle \beta(u_t^{\varepsilon_k}), (w - u_t^{\varepsilon_k})\psi\rangle. \tag{28}$$

Оскільки $w(t) \in K$ для майже всіх $t \in (0,T)$, то $\beta(w) = 0$ і тому внаслідок монотонності β

$$-\int_0^\tau \langle \beta(u_t^{\varepsilon_k}), (w - u_t^{\varepsilon_k})\psi\rangle\, dt = \int_0^\tau \langle \beta(w) - \beta(u_t^{\varepsilon_k}), (w - u_t^{\varepsilon_k})\psi\rangle\, dt \ge 0.$$

Тоді з (28) отримуємо нерівність

$$\int_{Q_\tau} \Bigg[u_{tt}^{\varepsilon_k}(w - u_t^{\varepsilon_k})\psi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t}^{\varepsilon_k}\big((w - u_t^{\varepsilon_k})\psi\big)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i}^{\varepsilon_k}\big((w - u_t^{\varepsilon_k})\psi\big)_{x_j} +$$
$$+ c|u_t^{\varepsilon_k}|^{p(x)-2} u_t^{\varepsilon_k}(w - u_t^{\varepsilon_k})\psi - f(w - u_t^{\varepsilon_k})\psi \Bigg] dxdt \ge 0, \tag{29}$$

що виконується для кожного $\tau \in (0,T]$, всіх $w \in L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big) \cap L^{p(x)}(Q_T)$, $w(t) \in K$, майже для всіх $t \in [0,T]$ та довільних $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\psi \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Покажемо виконання додаткових сильних збіжностей послідовності $\{u^{\varepsilon_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ до функції u. Для цього запишемо (29) для $w = u_t$:

$$\int_{Q_\tau} \Bigg[u_{tt}^{\varepsilon_k}(u_t - u_t^{\varepsilon_k})\psi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t}^{\varepsilon_k}\big((u_t - u_t^{\varepsilon_k})\psi\big)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i}^{\varepsilon_k}\big((u_t - u_t^{\varepsilon_k})\psi\big)_{x_j} +$$

$$+\, c|u_t^{\varepsilon_k}|^{p(x)-2}u_t^{\varepsilon_k}(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi - f(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi\Big]\,dxdt \geq 0. \tag{30}$$

Виконаємо перетворення:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_it}^{\varepsilon_k}\big((u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi\big)_{x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_it}^{\varepsilon_k}\big[(u_{x_jt}-u_{x_jt}^{\varepsilon_k})\psi + (u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi_{x_j}\big] =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u_{x_it}-u_{x_it}^{\varepsilon_k})(u_{x_jt}-u_{x_jt}^{\varepsilon_k})\psi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_it}(u_{x_jt}-u_{x_jt}^{\varepsilon_k})\psi +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_it}^{\varepsilon_k}(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi_{x_j},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_{x_i}^{\varepsilon_k}\big((u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi\big)_{x_j} = -\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(u_{x_i}-u_{x_i}^{\varepsilon_k})(u_{x_jt}-u_{x_jt}^{\varepsilon_k})\psi +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_{x_i}(u_{x_jt}-u_{x_jt}^{\varepsilon_k})\psi + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_{x_i}^{\varepsilon_k}(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi_{x_j},$$

$$c|u_t^{\varepsilon_k}|^{p(x)-2}u_t^{\varepsilon_k}(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi = -c\Big(|u_t|^{p(x)-2}u_t - |u_t^{\varepsilon_k}|^{p(x)-2}u_t^{\varepsilon_k}\Big)(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi +$$

$$+ c|u_t|^{p(x)-2}u_t(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi.$$

Враховуючи виконані перетворення, записуємо (30) у вигляді

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{tt}^{\varepsilon_k}(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_it}(u_{x_jt}-u_{x_jt}^{\varepsilon_k})\psi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_it}^{\varepsilon_k}(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_{x_i}(u_{x_jt}-u_{x_jt}^{\varepsilon_k})\psi + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_{x_i}^{\varepsilon_k}(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi_{x_j} +$$

$$+ c|u_t|^{p(x)-2}u_t(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi - f(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi\Big]\,dxdt \geq \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u_{x_it}-u_{x_it}^{\varepsilon_k})(u_{x_jt}-u_{x_jt}^{\varepsilon_k})\psi +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(u_{x_i}-u_{x_i}^{\varepsilon_k})(u_{x_jt}-u_{x_jt}^{\varepsilon_k})\psi + c\Big(|u_t|^{p(x)-2}u_t - |u_t^{\varepsilon_k}|^{p(x)-2}u_t^{\varepsilon_k}\Big)(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\psi\Big]\,dxdt.$$

На підставі умов $p_0 > 2$, $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{B})$ та $(\mathbf{C})$ з останньої нерівності легко отримати оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[a_0\big|\nabla(u_t-u_t^{\varepsilon_k})\big|^2\psi + c_0 2^{2-p(x)}\big|u_t-u_t^{\varepsilon_k}\big|^{p(x)}\psi\Big]\,dxdt + \int\limits_{\Omega_\tau}\frac{b_0}{2}\big|\nabla(u-u^{\varepsilon_k})\big|^2\psi\,dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[u_{tt}^{\varepsilon_k}(u_t - u_t^{\varepsilon_k})\psi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i t}(u_{x_j t} - u_{x_j t}^{\varepsilon_k})\psi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i t}^{\varepsilon_k}(u_t - u_t^{\varepsilon_k})\psi_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} u_{x_i}(u_{x_j t} - u_{x_j t}^{\varepsilon_k})\psi + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} u_{x_i}^{\varepsilon_k}(u_t - u_t^{\varepsilon_k})\psi_{x_j} +$$

$$+ c|u_t|^{p(x)-2} u_t (u_t - u_t^{\varepsilon_k})\psi - f(u_t - u_t^{\varepsilon_k})\psi \Bigg] dxdt \longrightarrow 0 \qquad (31)$$

при $\varepsilon_k \to 0$, звідки

$$u^{\varepsilon_k} \to u \quad \text{сильно в} \quad C\big([0,T]; V_{1,0}(\Omega)\big) \cap L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big),$$

$$u_t^{\varepsilon_k} \to u_t \quad \text{сильно в} \quad L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big) \cap L^{p(x)}(Q_T).$$

На підставі цього в нерівності (29) переходимо до границі при $\varepsilon_k \to 0$ і отримуємо, що функція u — шуканий сильний розв'язок задачі (2), (3).

Теорему доведено.

Зауваження. Нехай тепер Ω — необмежена область. Можна показати, що при виконанні, зокрема, умов $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{B})$, $(\mathbf{C})$, $p_0 > 2$ і, крім того, $p^0 < 2 + \dfrac{4}{n-2}$ при $n \geq 3$, а також при деяких додаткових обмеженнях на множину K задача (2), (3) має *слабкий* розв'язок. Єдиність такого розв'язку встановлено в [15].

1. *Глазатов С. Н.* Некоторые задачи для нелинейных уравнений третьего порядка. – Новосибирск, 1992. – 22 с. – (Препринт № 7).
2. *Zhikov V. V.* On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions // J. Math. Sci. – 2011. – **173**, № 5. – P. 463 – 570.
3. *Antontsev S., Shmarev S.* Nonlinear PDEs in Sobolev spaces with variable exponents. – 2013. – Preprint CMAF Pre-015.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Изд-во иностр. лит., 1972. – 587 с.
5. *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. – М.: Наука, 1990. – 536 с.
6. *Бугрій О. М., Лавренюк С. П.* Параболічна варіаційна нерівність, що узагальнює рівняння політропної фільтрації // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 7. – С. 867 – 878.
7. *Buhrii O. M., Mashiyev R. A.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity // Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl. – 2009. – **70**, № 6. – P. 2325 – 2331.
8. *Mashiyev R. A., Buhrii O. M.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity // J. Math. Anal. and Appl. – 2011. – **377**. – P. 450 – 463.
9. *Mingqi Xiang, Youngiang Fu.* Weak solutions for nonlocal evolution variational inequalities involving gradient constraints and variable exponent // Electron. J. Different. Equat. – 2013. – **2013**, № 100. – P. 1 – 17.
10. *Mingqi Xiang.* On nonlinear evolution variational inequalities involving variable exponent // Electron. J. Qual. Theory Different. Equat. – 2013. – № 72. – P. 1 – 19.
11. *Erhardt A. H.* Existence and gradient estimates in parabolic obstacle problems with nonstandard growth: Dissertation. – Nüruberg, 2013. – 189 p.
12. *Lavrenyuk S., Pukach P.* Variational hyperbolic inequality in the domain unbounded in spatial variables // Int. J. Evolut. Equat. – 2007. – **3**, № 1. – P. 103 – 122.
13. *Бугрій О., Гурняк І., Пукач П., Холявка О.* Гіперболічні варіаційні нерівності другого порядку зі змінним показником нелінійності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77. – С. 41 – 53.

14. *Глазатов С. Н.* Нелинейные уравнения третьего порядка и вариационные неравенства // Неклассические уравнения математической физики: междунар. сем., посвященный 60-летию со дня рождения проф. В. Н. Врагова (3 – 5 окт. 2005 г.): труды сем. – 2005. – С. 80 – 93.
15. *Лавренюк С. П., Панат О. Т.* Деяка варіаційна нерівність третього порядку зі змінним степенем нелінійності у необмеженій області // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика, механіка. – 2008. – **13**, вип. 18. – С. 55 – 61.
16. *Orlicz W.* Über konjugierte Exponentenfolden // Stud. Math. (Lwow). – 1931. – **3**. – P. 200 – 211.
17. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $\mathcal{L}^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки. – 1979. – **26**, № 4. – С. 613 – 632.
18. *Kovacik O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. – 1991. – **41 (116)**. – P. 592 – 618.
19. *Бугрій О. М., Лавренюк С. П.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 33 – 43.
20. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 475 с.
21. *Бугрій О., Доманська Г., Процах Н.* Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 44 – 61.

Одержано 31.01.12,
після доопрацювання — 23.02.14