УДК 517.95

О. М. Бугрій (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ПРО ІСНУВАННЯ СЛАБКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ЗА ПЕТРОВСЬКИМ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

We study the initial-boundary-value problems with general homogeneous boundary conditions for parabolic systems of the Petrovsky type with variable exponents of nonlinearity in cylindrical domains. The existence of the mild solutions of this problem is proved.

В цилиндрической области рассмотрена смешанная задача с общими однородными граничными условиями для полулинейных параболических по Петровскому систем с переменными показателями нелинейности. Доказано существование слабых решений этой задачи.

1. Вступ. Нехай n, N та b — задані числа з множини всіх натуральних чисел $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний дійсний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$, $\mathbb{Z}_+^n$ — множина всіх n-вимірних мультиіндексів (точок у $\mathbb{R}^n$ з цілими невід'ємними координатами), $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}_+^1$, $\mathbb{M}_{N\times n}$ — множина всіх матриць A розміру $N \times n$ з елементами $A_{kj} \in \mathbb{R}$, $\mathbb{M}_N := \mathbb{M}_{N\times N}$, $|x| := (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| := |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$ для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|A| := \left(\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n |A_{kj}|^2\right)^{1/2}$, якщо $A \in \mathbb{M}_{N\times n}$. Нехай $T > 0$ — задане додатне число, $r_1, \ldots, r_{bN}$ — цілі числа, які задовольняють умову $0 \le r_i < 2b$, $i \in \{1, \ldots, 2b\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з межею $\partial\Omega$, $Q_{0,T} := \Omega \times (0, T]$, $S_{0,T} := \partial\Omega \times [0, T]$. Розглянемо задачу: знайти функцію $u\colon Q_{0,T} \to \mathbb{M}_{N\times 1}$ таку, що

$$D_t u - \sum_{|\alpha|\le 2b} a_\alpha(x,t) D_x^\alpha u + g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u = f(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$\sum_{|\beta|\le r_j} b_{j\,\beta}(x,t) D_x^\beta u|_{S_{0,T}} = 0 \quad \text{для} \quad j \in \{1, 2, \ldots, bN\}, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \tag{3}$$

Тут $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $a_\alpha\colon Q_{0,T} \to \mathbb{M}_N$, $g\colon Q_{0,T} \to \mathbb{M}_N$, $f\colon Q_{0,T} \to \mathbb{M}_{N\times 1}$, $b_{j\,\beta}\colon S_{0,T} \to \mathbb{M}_{1\times N}$, $u_0\colon \Omega \to \mathbb{M}_{N\times 1}$ — задані функції, $D_t := \dfrac{\partial}{\partial t}$, $D_{x_i} := \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $D_x^\alpha := D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$ для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Мета статті полягає в тому, щоб знайти умови існування узагальненого розв'язку задачі (1) – (3). У п. 2 сформульовано основний результат та наведено порівняння його з відомими результатами. Доведення, яке базується на теоремі Шаудера про нерухому точку, міститься у п. 3. Насамкінець наведено приклади.

2. Формулювання результату. Насамперед введемо необхідні позначення та нагадаємо деякі відомі факти. Нехай $D := \Omega$ чи $D := Q_{0,T}$, $L^p(D)$ — стандартний простір Лебега абсолютно інтегровних зі степенем $p \in [1, +\infty)$ функцій, $[L^p(D)]^N := L^p(D) \times \ldots \times L^p(D)$, $L^\infty(D)$

— простір Лебега істотно обмежених функцій (див. [1]). Через $\|u;B\|$ позначатимемо норму елемента u деякого нормованого простору B.

Головній у параболічному сенсі частині системи (1) поставимо у відповідність матрицю з $\mathbb{M}_N$ вигляду

$$E_0(x,t,p,\eta) := Ep - \sum_{|\alpha|=2b} a_\alpha(x,t)(i\eta)^\alpha,$$

а головній у параболічному сенсі частині крайових умов — матрицю B_0, рядками якої є вектори $B_j(x,t,\eta) := \sum_{|\beta|=r_j} b_{j\,\beta}(x,t)(i\eta)^\beta$, де E — одинична матриця порядку N, i — уявна одиниця, $(i\eta)^\alpha := (i\eta_1)^{\alpha_1}\dots(i\eta_n)^{\alpha_n}$, $(x,t) \in Q_{0,T}$, $p \in \mathbb{C}$, $\eta := (\eta_1,\dots,\eta_n) \in \mathbb{R}^n$. Нехай $\widehat{E}_0 := E_0^{-1}\det E_0$ — взаємна до E_0 матриця.

Будемо вважати, що система (1) є рівномірно параболічною за Петровським, тобто виконується така умова (див. [2, с. 12]):

(A) існує $\delta > 0$ таке, що всі p-корені рівняння $\det E_0(x,t,p,\eta) = 0$ задовольняють умову $\operatorname{Re} p_k(x,t,\eta) \le -\delta|\eta|^{2b}$, $(x,t) \in \overline{Q_{0,T}}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $k \in \{1,\dots,N\}$.

Нехай $\nu(x,t)$ — орт внутрішньої нормалі до межі $S_{0,T}$ в її точці (x,t). Припускатимемо виконання такої рівномірної умови доповняльності або умови Лопатинського (див. [3, с. 18]):

(B) існує $\delta_1 \in (0,\delta)$, де δ — стала з умови **(A)**, таке, що для кожної точки $(x,t) \in S_{0,T}$ і будь-якого вектора $\xi(x,t)$ з дотичної до $S_{0,T}$ в точці (x,t) гіперплощини рядки матриці $C(x,t,p,\xi,\tau) := B_0\big(x,t,\xi(x,t)+\tau\nu(x,t)\big)\,\widehat{E}_0\big(x,t,p,\xi(x,t)+\tau\nu(x,t)\big)$, як поліноми від τ, є лінійно незалежними за модулем τ-полінома

$$E^+(x,t,p,\xi,\tau) := \prod_{j=1}^{bN}\left(\tau - \tau_j^+(x,t,p,\xi)\right),$$

для всіх $p \in \mathbb{C}$ таких, що $|p| + |\xi|^{2b} > 0$ і $\operatorname{Re} p \ge -\delta_1|\xi|^{2b}$; тут $\tau_1^+,\dots,\tau_{bN}^+$ — τ-корені рівняння $\det E_0\big(x,t,p,\xi(x,t)+\tau\nu(x,t)\big) = 0$ з додатною уявною частиною.

Крім того, вважатимемо, що виконуються такі умови:

(G) елементи матриці-функції g належать до простору $L^\infty(Q_{0,T})$;

(Q) $q \in L^\infty(Q_{0,T})$, $q_0 := \operatorname{ess\,inf}_{(x,t)\in Q_{0,T}} q(x,t) > 1$;

(UF) $u_0 \in \big[L^p(\Omega)\big]^N$, $f \in \big[L^p(Q_{0,T})\big]^N$, де $p > 1$.

Щоб дати означення слабкого розв'язку задачі (1)–(3), нагадаємо поняття однорідної матриці Ґріна. Матриця-функція $\mathsf{G}_0(x,t,\xi,s)$, $\{x,\xi\} \subset \Omega$, $T \ge t > s \ge 0$, називається однорідною матрицею Ґріна (див. [2, с. 28]) задачі (1)–(3) з $g \equiv 0$, якщо формула

$$u(x,t) = \int_0^t \int_\Omega \mathsf{G}_0(x,t,\xi,s) f(\xi,s)\,d\xi ds, \quad (x,t) \in Q_{0,T},$$

визначає класичний розв'язок цієї задачі для довільної фінітної досить гладкої функції f. За певних умов така функція існує і для неї справджується оцінка

$$\big|\mathsf{G}_0(x,t,\xi,s)\big| \le M_1\,(t-s)^{-\frac{n}{2b}}\ e^{-M_2\,|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}\,(t-s)^{-\frac{1}{2b-1}}}.$$

Для зручності продовжимо функцію G_0 нулем при $t \le s \le T$. Тоді $\mathsf{G}_0\colon Q_{0,T} \times Q_{0,T} \to \mathbb{M}_N$, і останню оцінку запишемо у вигляді

$$\big|\mathsf{G}_0(x,t,\xi,s)\big| \le \frac{M_1\,\chi_{(0,T)}(t-s)}{|t-s|^{\frac{n}{2b}}}\,e^{-M_2\,|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}\,|t-s|^{-\frac{1}{2b-1}}}, \quad \big\{(x,t),(y,s)\big\} \subset Q_{0,T}, \quad (4)$$

де M_1, M_2 — деякі додатні сталі, $z \mapsto \chi_{(0,T)}(z)$ — характеристична функція інтервалу $(0,T)$.

Припускатимемо далі, що виконується така умова:

(E) вихідні дані задачі (1)–(3) з $g \equiv 0$ є такими, що однорідна матриця Ґріна G_0 цієї задачі існує і для її продовження нулем при $t \le s \le T$ справджується оцінка (4).

За певних умов на функції u_0 та f стандартно доводиться, що формулою

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} \mathsf{G}_0(x,t,\xi,0)u_0(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} \mathsf{G}_0(x,t,\xi,s)f(\xi,s)\,d\xi ds, \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \quad (5)$$

визначається класичний розв'язок задачі (1)–(3) з $g \equiv 0$. Якщо функції u_0 та f не мають достатньої гладкості, то рівність (5) беруть за означення слабкого (узагальненого) розв'язку задачі (1)–(3) з $g \equiv 0$ (див., наприклад, [4, 5]). У випадку $g \not\equiv 0$ традиційно слабкий розв'язок задачі (1)–(3) означується за допомогою рівності

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} \mathsf{G}_0(x,t,\xi,0)u_0(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \mathsf{G}_0(x,t,\xi,s)f(\xi,s)\,d\xi ds -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \mathsf{G}_0(x,t,\xi,s)g(\xi,s)|u(\xi,s)|^{q(\xi,s)-2}u(\xi,s)\,d\xi ds. \quad (6)$$

Наведемо означення розв'язку задачі (1)–(3), існування якого ми досліджуватимемо.

Означення. *Слабким розв'язком мішаної задачі* (1)–(3) *називатимемо таку функцію* $u \in$ $\in [L^p(Q_{0,T})]^N$, *яка майже для всіх* $(x,t) \in Q_{0,T}$ *задовольняє рівність* (6), *де* G_0 — *однорідна матриця Ґріна задачі* (1)–(3) *з* $g \equiv 0$.

Далі будемо використовувати позначення $q^0 := \operatorname{ess\,sup}_{(x,t)\in Q_{0,T}} q(x,t)$.

Теорема 1. *Якщо виконується умова* **(UF)** *зі сталою* $p \in \left(1 + \dfrac{n}{2b}, +\infty\right)$ *та умови* $q^0 < 2$, **(A)**, **(B)**, **(G)**, **(Q)** і **(E)**, *то задача* (1)–(3) *має слабкий розв'язок.*

Властивості функцій Ґріна параболічних задач досліджувались, зокрема, в [2, 3, 6–9]. Задачі для параболічних рівнянь і систем рівнянь з нелінійними молодшими членами вигляду

$$u_t + A(x,t,\delta_m u) + \widetilde{g}(x,t,\delta_{m-1}u) = f(x,t), \quad (7)$$

де $\delta_k u$ — вектор, складений із функції u та її похідних по x до порядку k включно ($k = m$ чи $k = m-1$), A — лінійний і $\widetilde{g}$ — нелінійний диференціальні вирази, досліджувались, зокрема, в [6]. Для розв'язності задачі, зокрема, від виразу $\widetilde{g}$ вимагається виконання глобальної умови Ліпшиця за змінними $\delta_{m-1}u$. Молодший член $\widetilde{g}(x,t,u) = g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u$ системи (1) цю умову не задовольняє навіть при $g(x,t) = \text{const} > 1$.

Мішані задачі для різних нелінійних параболічних рівнянь та систем рівнянь зі змінними показниками нелінійності вивчались у [10 – 16]. Відповідні параболічні варіаційні нерівності досліджено в [17, 18] (детальніший огляд наведено в [19]). Зазначимо, що для розв'язності цих задач потрібно накладати певні додаткові умови гладкості на їхній показник нелінійності (в даному випадку — це функція q). Тут від таких умов вдалося частково відмовитися.

Параболічні за Петровським системи диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності розглянуто тут, мабуть, уперше. Аналогічні до отриманих у цій статті результати для модельних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності та однорідними крайовими умовами доведено в [19]. Відповідну задачу з неоднорідними крайовими умовами розглянуто в [20].

3. Доведення основного результату. Перш ніж перейти до безпосереднього доведення теореми 1 наведемо деякі допоміжні факти. Леми 1 – 5, мабуть, не є новими. Проте авторові статті ці твердження у сформульованому тут вигляді не вдалося знайти в доступній літературі.

Лема 1. *Нехай Q — обмежена чи необмежена вимірна за Лебегом підмножина $\mathbb{R}^m$, $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $K\colon Q \times Q \to \mathbb{M}_N$ — вимірна матриця-функція, $\mathcal{J}$ — лінійний векторний інтегральний оператор вигляду $(\mathcal{J}u)(y) := \int_Q K(y,z)u(z)\,dz$, $y \in Q$,*

$$|||K|||_p := \left\{ \int\limits_Q \left(\int\limits_Q \left|K(y,z)\right|^{p'}\,dz \right)^{p/p'} dy \right\}^{1/p}. \tag{8}$$

Тоді якщо $|||K|||_p < +\infty$, то оператор $\mathcal{J}$ діє з простору $\left[L^p(Q)\right]^N$ в $\left[L^p(Q)\right]^N$ та є цілком неперервним (*див.* [21, *с.* 229]).

Доведення. Зауважимо, що твердження цієї леми при $N = 1$ збігається з твердженням теореми 7.2.7 з [21, с. 203]. Нехай $N \geq 2$. Оскільки $K(y,z) \in \mathbb{M}_N$, $K(y,z) := (K_{kj}(y,z))_{k,j=1}^N$, $\{y,z\} \subset Q$, то з оцінки $|K_{kj}| \leq |K|$ та припущення леми випливає, що

$$|||K_{kj}|||_p := \left\{ \int\limits_Q \left(\int\limits_Q |K_{kj}(y,z)|^{p'}\,dz \right)^{p/p'} dy \right\}^{1/p} \leq |||K|||_p < +\infty, \quad \{k,j\} \subset \{1,\ldots,N\}.$$

Тому з теореми 7.2.7 з [21, с. 203] випливає цілком неперервність інтегральних операторів $\mathcal{J}_{kj}\colon L^p(Q) \to L^p(Q)$, де $(\mathcal{J}_{kj}v)(y) := \int_Q K_{kj}(y,z)v(z)\,dz$, $y \in Q$, $v \in L^p(Q)$. Оскільки для $u = \operatorname{col}(u_1,\ldots,u_N) \in \left[L^p(Q)\right]^N$ маємо $\mathcal{J}u = \operatorname{col}(\mathcal{J}_{11}u_1 + \ldots + \mathcal{J}_{1N}u_N, \ldots, \mathcal{J}_{N1}u_1 + \ldots + \mathcal{J}_{NN}u_N)$, то $\mathcal{J}$ — цілком неперервний оператор. Дійсно, неперервність оператора $\mathcal{J}$ є очевидною. Доведемо, що образ обмеженої множини є передкомпактним (див. [21, с. 154]). Нехай A — довільна обмежена множина в $\left[L^p(Q)\right]^N$. Тоді існують такі обмежені у просторі $L^p(Q)$ множини $A_1,\ldots,A_N$, що $A \subset A_1 \times \ldots \times A_N$. Отже, $\mathcal{J}_{kj}(A_j)$ — передкомпактні множини в $L^p(Q)$, а тому з теореми 3 з [23, с. 109] та [24, с. 94] випливає передкомпактність в $L^p(Q)$ множини $\mathcal{J}_{k1}(A_1) + \ldots + \mathcal{J}_{kN}(A_N)$, $\{k,j\} \subset \{1,\ldots,N\}$. Очевидно, що декартів добуток передкомпактних множин є множиною передкомпактною. Тому $\mathcal{J}(A) \subset \mathcal{J}(A_1 \times \ldots \times A_N)$ — передкомпакт.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай* r — *фіксоване число з* $[1, +\infty)$, $G_0\colon Q_{0,T} \times Q_{0,T} \to \mathbb{M}_N$ — *вимірна функція, для якої виконується оцінка* (4),

$$J_r(x,t,s) := \int\limits_{\Omega} \big|G_0(x,t,\xi,s)\big|^r \, d\xi, \qquad \widehat{J}_r(\xi,t,s) := \int\limits_{\Omega} \big|G_0(x,t,\xi,s)\big|^r \, dx, \tag{9}$$

$\{x, \xi\} \subset \Omega$, $0 \le s < t \le T$. *Тоді існує така стала* $C(r) > 0$, *що*

$$J_r(x,t,s) \le \frac{C(r)}{(t-s)^{\frac{n}{2b}(r-1)}}, \qquad \widehat{J}_r(\xi,t,s) \le \frac{C(r)}{(t-s)^{\frac{n}{2b}(r-1)}}. \tag{10}$$

Доведення. Використовуючи оцінку (4) та розширюючи область інтегрування з Ω до $\mathbb{R}^n$, одержуємо

$$J_r \le \frac{M_1^r}{(t-s)^{r\,\frac{n}{2b}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-M_2 r \frac{|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}}{(t-s)^{\frac{1}{2b-1}}}} \, d\xi.$$

Виконуючи заміну змінних $\xi \rightsquigarrow \eta$, де $\xi = x + \dfrac{(t-s)^{\frac{1}{2b}}}{(M_2 r)^{\frac{2b-1}{2b}}}\,\eta$, $d\xi = \dfrac{(t-s)^{\frac{n}{2b}}}{(M_2 r)^{n\,\frac{2b-1}{2b}}}\, d\eta$, маємо

$$J_r \le \frac{M_1^r}{(t-s)^{r\,\frac{n}{2b}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(t-s)^{\frac{n}{2b}}}{(M_2 r)^{n\,\frac{2b-1}{2b}}}\, e^{-|\eta|^{\frac{2b}{2b-1}}} \, d\eta = \frac{C(r)}{(t-s)^{\frac{n}{2b}(r-1)}},$$

де $C(r) = M_1^r (M_2 r)^{-n\,\frac{2b-1}{2b}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^{\frac{2b}{2b-1}}} \, d\eta < +\infty$. Другу оцінку з (10) з тією самою сталою $C(r)$ отримуємо аналогічно.

Лему 2 доведено.

***Наслідок* 1.** *Для функції* G_0 *з попередньої леми існує така стала* $\mathscr{M} > 0$, *що*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\substack{x\in\Omega,\\ 0\le s<t\le T}} \int\limits_{\Omega} \big|G_0(x,t,\xi,s)\big| \, d\xi \le \mathscr{M}, \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{\xi\in\Omega,\\ 0\le s<t\le T}} \int\limits_{\Omega} \big|G_0(x,t,\xi,s)\big| \, dx \le \mathscr{M}. \tag{11}$$

Доведення. Оцінки (11) з $\mathscr{M} = C(1)$ безпосередньо випливають з (10) при $r = 1$.

***Зауваження* 1.** Нехай $\{p, p'\} \subset (1, +\infty)$ — такі числа, що $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Тоді рівносильними є нерівності

$$p' < 1 + \frac{2b}{n}, \qquad \frac{p}{p-1} < \frac{n+2b}{n}, \qquad pn < pn - n + 2bp - 2b, \qquad p > 1 + \frac{n}{2b}. \tag{12}$$

Лема 3. *Нехай* $\mathsf{G}_0\colon Q_{0,T}\times Q_{0,T}\to\mathbb{M}_N$ *— вимірна матриця-функція, для якої виконується оцінка* (4), $\mathcal{J}$ *— лінійний інтегральний оператор вигляду*

$$(\mathcal{J}z)(x,t):=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \mathsf{G}_0(x,t,\xi,s)z(\xi,s)\,d\xi ds,\quad (x,t)\in Q_{0,T}. \tag{13}$$

Якщо $p>1+\dfrac{n}{2b}$, *то оператор* $\mathcal{J}\colon\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\to\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N$ *є цілком неперервним* (*а тому обмеженим і неперервним оператором*).

Доведення. Нехай виконуються припущення леми, p, p' — числа із зауваження 1. Враховуючи позначення лем 1 і 2, отримуємо

$$|||\mathsf{G}_0|||_p^p:=\int\limits_{Q_{0,T}}\left(\int\limits_{Q_{0,t}}\big|\mathsf{G}_0(x,t,\xi,s)\big|^{p'}\,d\xi ds\right)^{p/p'}dxdt=\int\limits_0^T dt\int\limits_\Omega\left(\int\limits_0^t J_{p'}(x,t,s)\,ds\right)^{p/p'}dx.$$

Тому з оцінок (10) маємо $|||\mathsf{G}_0|||_p^p\le\displaystyle\int_0^T dt\int_\Omega\left(\int_0^t\frac{C(r)}{(t-s)^{\frac{n}{2b}(p'-1)}}\,ds\right)^{p/p'}dx=C_1$, де $C_1>0$ — стала, оскільки останній інтеграл збігається, бо $\dfrac{n}{2b}(p'-1)<1$ (див. (12) і умови леми). Отже, твердження леми 3 випливає з леми 1 для функції K спеціального вигляду.

Лему 3 доведено.

Доведення лем 4 та 5 для випадку $N=1$ наведено в [20, с. 34, 35]. Якщо $N\ge 2$, то доведення аналогічні, тому ми їх пропускаємо.

Лема 4. *Нехай* p *— фіксоване число з* $[1,+\infty)$, G_0, $\mathcal{J}$ *такі ж, як і в лемі* 3. *Тоді існує така стала* $\mathscr{L}>0$, *що для всіх* $z\in\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N$ *виконується оцінка*

$$\big\|\mathcal{J}z;\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\big\|\le\mathscr{L}\big\|z;\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\big\|. \tag{14}$$

Лема 5. *Нехай* $p\in[1,+\infty)$, G_0 *така ж, як і в лемі* 3,

$$(\mathcal{J}_0v)(x,t):=\int\limits_\Omega \mathsf{G}_0(x,t,\xi,0)v(\xi)\,d\xi,\quad (x,t)\in Q_{0,T}. \tag{15}$$

Тоді лінійний оператор $\mathcal{J}_0\colon\big[L^p(\Omega)\big]^N\to\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N$ *є обмеженим* (*а тому й неперервним*), *а отже, існує така стала* $\mathscr{L}_0>0$, *що для всіх* $v\in[L^p(\Omega)]^N$

$$\big\|\mathcal{J}_0v;\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\big\|\le\mathscr{L}_0\big\|v;\big[L^p(\Omega)\big]^N\big\|. \tag{16}$$

При розгляді рівнянь зі змінними показниками нелінійності виникає потреба використовувати узагальнені простори Лебега, які вперше введено у [25] (деякі властивості цих просторів вивчено в [26, 27]). Ми будемо використовувати техніку отримання деяких оцінок у цих просторах. Тому нагадаємо, що узагальненим простором Лебега $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$ називається множина вимірних за Лебегом функцій $v\colon Q_{0,T}\to\mathbb{R}^1$, для яких $\rho_q(v,Q_{0,T}):=\displaystyle\int_{Q_{0,T}}\big|v(x,t)\big|^{q(x,t)}\,dxdt<+\infty$. За умови **(Q)** цей простір є (див. [26, с. 599, 600]) рефлексивним банаховим простором щодо норми Люксембурга

$$\left\|v; L^{q(x,t)}(Q_{0,T})\right\| := \inf\left\{\lambda > 0\colon \rho_q(v/\lambda, Q_{0,T}) \le 1\right\}.$$

Крім того, є неперервне вкладення $L^{q(x,t)}(Q_{0,T}) \circlearrowleft L^{r(x,t)}(Q_{0,T})$, якщо $q(x,t) \ge r(x,t)$ (див. [26, с. 599, 600]).

***Зауваження* 2.** Нехай

$$h \in L^{\infty}(Q_{0,T}), \qquad h^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in Q_{0,T}} h(x,t), \qquad h_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q_{0,T}} h(x,t) \ge 1,$$

$$S_h(s) := \begin{cases} s^{h_0} & \text{при } s \in [0,1], \\ s^{h^0} & \text{при } s > 1, \end{cases} \qquad S_{1/h}(s) := \begin{cases} s^{1/h^0} & \text{при } s \in [0,1], \\ s^{1/h_0} & \text{при } s > 1. \end{cases}$$

Тоді:

1) $\left\|v; L^{h(x,t)}(Q_{0,T})\right\| \le S_{1/h}\big(\rho_h(v, Q_{0,T})\big)$ при $\rho_h(v, Q_{0,T}) < \infty$;

2) $\rho_h(v, Q_{0,T}) \le S_h\big(\left\|v; L^{h(x,t)}(Q_{0,T})\right\|\big)$ при $\left\|v; L^{h(x,t)}(Q_{0,T})\right\| < \infty$.

Зазначимо, що це зауваження у випадку $h_0 > 1$ міститься в зауваженні 3.1 з [18, с. 453].

Далі наведемо деякі властивості оператора Немицького спеціального вигляду. У випадку $N = 1$ наступна лема збігається з лемою 4 з [20, с. 85]. При $N \ge 2$ доведення аналогічне, тому ми його пропустимо.

Лема 6. *Нехай* G_0 *така ж, як і в лемі* 3, *виконуються умови* **(G)**, **(Q)**, *стала* q^0 *з формулювання теореми* 1 *задовольняє умову* $q^0 < 2$ *і*

$$(\mathcal{N}z)(x,t) := g(x,t)\left|z(x,t)\right|^{q(x,t)-2} z(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}. \tag{17}$$

Тоді оператор $\mathcal{N}$ *є обмеженим і неперервним оператором з* $\left[L^p(Q_{0,T})\right]^N$ *в* $\left[L^p(Q_{0,T})\right]^N$. *Крім того, існує стала* $\mathscr{N}_p > 0$ *така, що для всіх* $\{u, v\} \subset \left[L^p(Q_{0,T})\right]^N$ *справджуються оцінки*

$$\left\|\mathcal{N}u - \mathcal{N}v; \left[L^p(Q_{0,T})\right]^N\right\| \le \mathscr{N}_p \left\{S_{1/h}\Big(\left\|u - v; \left[L^p(Q_{0,T})\right]^N\right\|^p\Big)\right\}^{1/p}, \tag{18}$$

$$\left\|\mathcal{N}u; \left[L^p(Q_{0,T})\right]^N\right\| \le \mathscr{N}_p \Big\{S_{1/h}\Big(\left\|u; \left[L^p(Q_{0,T})\right]^N\right\|^p\Big)\Big\}^{1/p}, \tag{19}$$

де $h := \dfrac{1}{q-1}$, $S_{1/h}$ *— неперервна монотонно зростаюча функція із зауваження* 2.

Перейдемо до доведення основної теореми 1. Означимо оператори $\mathcal{K}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{A}$ так: $\mathcal{K}\colon \left[L^p(Q_{0,T})\right]^N \to \left[L^p(Q_{0,T})\right]^N$ — тотожно сталий оператор, а саме,

$$(\mathcal{K}z)(x,t) = \int\limits_{\Omega} \mathrm{G}_0(x,t,\xi,0)u_0(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \mathrm{G}_0(x,t,\xi,s)f(\xi,s)\,d\xi ds, \quad z \in \left[L^p(Q_{0,T})\right]^N; \tag{20}$$

$\mathcal{N}$ — нелінійний оператор Немицького з (17), $\mathcal{J}$ — лінійний інтегральний оператор з (13), $\mathcal{A}$ — спеціальна комбінація операторів $\mathcal{K}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{J}$, а саме, $\mathcal{A} = \mathcal{K} - \mathcal{J} \circ \mathcal{N}$. Із урахуванням введених позначень рівність (6) набирає вигляду $u = \mathcal{A}u$, і доведення існування слабкого розв'язку задачі (1) – (3) зводиться до доведення існування нерухомої точки оператора $\mathcal{A}$. Переконаємося, що виконуються умови теореми Шаудера (див. [21, с. 229]).

1. З лем 4 та 5 випливає, що

$$\Big\|\mathcal{K}u;\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\Big\| \leq \mathscr{L}_0\Big\|u_0;\big[L^p(\Omega)\big]^N\Big\| + \mathscr{L}\Big\|f;\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\Big\|, \quad u\in\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N, \tag{21}$$

де $\mathscr{L}_0$ і $\mathscr{L}>0$ — сталі відповідно з (16) і (14). Отже, $\mathcal{K}$ справді діє з $\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N$ в $\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N$. Як відомо, тотожно сталий оператор є цілком неперервним.

2. З леми 6 випливає, що $\mathcal{N}\colon \big[L^p(Q_{0,T})\big]^N \to \big[L^p(Q_{0,T})\big]^N$ — неперервний і обмежений оператор, для якого справджуються оцінки (18) і (19). На підставі лем 3, 4 та накладених на p умов одержуємо, що оператор $\mathcal{J}\colon \big[L^p(Q_{0,T})\big]^N \to \big[L^p(Q_{0,T})\big]^N$ є цілком неперервним і виконується оцінка (14).

З отриманих властивостей операторів $\mathcal{N}$ і $\mathcal{J}$ одержимо, що $\mathcal{J}\circ\mathcal{N}$ є цілком неперервним, як композиція цілком неперервного і неперервного та обмеженого операторів (див. лему 1 з [19, с. 81] та вправу 2 з [28, с. 400]). Очевидно, що лінійна комбінація цілком неперервних операторів є цілком неперервним оператором. Тому $\mathcal{A}$ є цілком неперервним, як лінійна комбінація операторів $\mathcal{K}$ і $\mathcal{J}\circ\mathcal{N}$.

3. Нехай ε — довільне фіксоване число з $\left(0,\min\left\{\dfrac{1}{2},2-q^0\right\}\right)$, де $q^0\in(1,2)$ — стала з умови **(Q)**. Очевидно, що $1-2\varepsilon>0$ і $2-q^0-\varepsilon>0$.

Нехай $B_R:=\Big\{u\in\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N \mid \|u;\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\|\leq R\Big\}$, $R>0$ — таке велике число, що

$$R^\varepsilon \geq \max\left\{\Big\|u_0;\big[L^p(\Omega)\big]^N\Big\|,\ \Big\|f;\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\Big\|,\ \mathscr{L}_0,\ \mathscr{L},\ 1\right\}, \qquad \frac{2}{R^{1-2\varepsilon}}+\frac{\mathscr{N}_p}{R^{2-q^0-\varepsilon}}\leq 1, \tag{22}$$

де $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}$ і $\mathscr{N}_p$ — сталі відповідно з (16), (14) і (19).

Доведемо, що $\mathcal{A}(B_R)\subset B_R$. Нехай $h=\dfrac{1}{q-1}$, $S_{1/h}$ — функція із зауваження 2, $u\in B_R$.

З оцінок (14), (21), (19), монотонності функції $S_{1/h}$ та вибору R і u отримуємо

$$\Big\|\mathcal{A}u;\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\Big\| \leq \Big\|\mathcal{K}u;\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\Big\| + \Big\|\mathcal{J}(\mathcal{N}u);\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\Big\| \leq$$

$$\leq \Big\|\mathcal{K}u;\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\Big\| + \mathscr{L}\Big\|\mathcal{N}u;\Big[L^p(Q_{0,T})\Big]^N\Big\| \leq \mathscr{L}_0\Big\|u_0;\big[L^p(\Omega)\big]^N\Big\| + \mathscr{L}\Big\|f;\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\Big\| +$$

$$+\mathscr{L}\mathscr{N}_p\left\{S_{1/h}\Big(\Big\|u;\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\Big\|^p\Big)\right\}^{1/p} \leq 2R^{2\varepsilon}+R^\varepsilon\mathscr{N}_p\left\{S_{1/h}\Big(R^p\Big)\right\}^{1/p}.$$

Оскільки $R>1$, то на підставі означення функції $S_{1/h}$ маємо

$$S_{1/h}\Big(R^p\Big)=\Big(R^p\Big)^{\frac{1}{\operatorname{ess\,inf} h(x,t)}}=\Big(R^p\Big)^{\frac{1}{\operatorname{ess\,inf}\frac{1}{q(x,t)-1}}}=\Big(R^p\Big)^{\frac{1}{\frac{1}{q^0-1}}}=R^{p(q^0-1)}.$$

Тому для вибраного R отримуємо оцінку

$$\Big\|\mathcal{A}u;\big[L^p(Q_{0,T})\big]^N\Big\| \leq 2R^{2\varepsilon}+\mathscr{N}_pR^{\varepsilon+q^0-1}=\left(\frac{2}{R^{1-2\varepsilon}}+\frac{\mathscr{N}_p}{R^{2-q^0-\varepsilon}}\right)R\leq R,$$

з якої випливає, що $\mathcal{A}(B_R)\subset B_R$.

Отже, оператор $\mathcal{A}$ є цілком неперервним і відображає множину B_R на свою частину. Тому на підставі теореми Шаудера існує нерухома точка $u \in B_R$ оператора $\mathcal{A}$, яка є слабким розв'язком задачі (1)–(3).

Теорему 1 доведено.

4. Приклади. Зауважимо, що умова **(E)** є, зокрема, умовою на гладкість гіперповерхні $\partial\Omega$. Проілюструємо це на відомому прикладі з [8]. Нехай в задачі (1)–(3) $b = 1$, $N = 1$, $g \equiv 0$, $r_1 = 0$. Розглянемо неспадну обмежену напівадитивну функцію $\omega\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ таку, що $\dfrac{\omega(t)}{t} \le 2\,\dfrac{\omega(s)}{s}$, $\dfrac{\omega(t)}{t^\gamma} \le \widetilde{C}\,\dfrac{\omega(s)}{s^\gamma}$, $0 < s < t$, де $\gamma \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, $\widetilde{C} > 0$. Нехай

$$F(t) := \int\limits_0^t \frac{\omega(s)}{s}\,ds, \quad t \ge 0, \qquad \Phi(\tau) := \int\limits_0^\tau \frac{\omega(t)}{t}\,dt, \quad \tau \ge 0.$$

Припустимо існування таких сталих $\sigma > 0$ і $\widehat{C} > 0$, що

$$F(\sigma) < +\infty, \qquad \Phi(\sigma) < +\infty, \qquad \int\limits_t^\sigma \frac{\omega(s)}{s^2}\,ds \le \widehat{C}\,\frac{F(t)}{t}, \quad 0 < t < \sigma.$$

Нехай $\{m, k\} \subset \mathbb{N}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$, $C^m(\mathcal{O})$ — простір функцій φ, які разом зі своїми похідними $D^\alpha\varphi$, $|\alpha| \le m$, є неперервними на $\mathcal{O}$. Множину всіх функцій $\psi \in C^m(\mathcal{O})$ таких, що

$$|\psi|_m^\omega := \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{y\in\mathcal{O}} \bigl|D^\alpha\psi(y)\bigr| + \sum_{|\beta|=m} \sup_{y,z\in\mathcal{O}} \frac{\bigl|D^\beta\psi(y) - D^\beta\psi(z)\bigr|}{\omega\bigl(|y-z|\bigr)} < +\infty,$$

називають простором Діні і позначають через $C^{(m,\omega)}(\mathcal{O})$.

Для області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ візьмемо $S = \partial\Omega$. Поверхня S належить до класу Діні $C^{(m,\omega)}$, якщо $S = \bigcup\limits_{k=1}^{\ell} S_k$, де для кожного $k \in \{1, \ldots, \ell\}$ відкрита гіперповерхня S_k задається рівнянням $x_j = \varphi_j^k(x_j')$, $x_j' = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in \mathcal{O}^k$, і виконуються такі умови:

1) $\mathcal{O}^k$ є обмеженою областю в $\mathbb{R}^{n-1}$;

2) $\varphi_j^k \in C^{(m,\omega)}(\mathcal{O}^k)$.

***Приклад* 1.** (див. теорему 2.8 [8, с. 136]). Якщо $\partial\Omega \in C^{(2,\omega)}$, то існує функція Ґріна задачі (1)–(3) з $b = 1$, $N = 1$, $g \equiv 0$, $r_1 = 0$ та сталими коефіцієнтами a_α; крім того, вона задовольняє оцінку (4).

Тепер наведемо можливий вигляд системи (1). Нехай $b = 1$, $n = 3$, $N = 2$.

***Приклад* 2.** Прикладом рівномірно параболічної за Петровським системи (1) з модельним показником нелінійності q є узагальнення системи тепломасопереносу з [29, с. 403] вигляду

$$D_t u_1 - \lambda_1\,\Delta u_1 - \Delta u_2 + |u|^{q(x,t)-2} u_1 = f_1(x,t),$$

$$D_t u_2 - \lambda_2\,\Delta u_2 + |u|^{q(x,t)-2} u_2 = f_2(x,t),$$

де $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $|u| = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2}$, $q(x,t) = \begin{cases} q_1, & (x,t) \in Q^1, \\ q_2, & (x,t) \in Q^2, \end{cases}$ $1 < q_1 < q_2 < 2$, Q^1, Q^2 — вимірні множини такі, що $Q^1 \cap Q^2 = \varnothing$, $Q_{0,T} = Q^1 \cup Q^2$, Δ — оператор Лапласа.

1. *Adams R. A.* Sobolev spaces. – New York etc.: Acad. Press, 1975. – 268 p.
2. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 200 с.
3. *Ивасишен С. Д.* Линейные параболические граничные задачи. – Киев: Вища шк., 1987. – 72 с.
4. *Лопушанская Г. П.* О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 6. – С. 795 – 798.
5. *Agase S. B., Raghavendra V.* Existence of mild solutions of semilinear differential equations in Banach spaces // Indian J. Pure and Appl. Math. – 1990. – **21(9)**. – P. 813 – 821.
6. *Загорский Т. Я.* Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1961. – 115 с.
7. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
8. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
9. *Cho S., Dong H., Kim S.* Global estimates for Green's matrix of second order parabolic systems with application to elliptic systems in two dimentional domains // Potential Anal. – 2012. – **36**. – P. 339 – 372.
10. *Kováčik O.* Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$ // Fasc. Math. – 1995. – **25**. – P. 87 – 94.
11. *Алхутов Ю. А., Антонцев С. Н., Жиков В. В.* Параболические уравнения с переменным порядком нелинейности // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 1. – С. 23 – 50.
12. *Sawangtong P., Jumpen W.* Blow-up solutions of degenerate parabolic problems // WSEAS Trans. Math. – 2010. – **9**, Issue 9. – P. 723 – 733.
13. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* Lemmas on compensated compactness in elliptic and parabolic equations // Proc. Steklov Inst. Math. – 2010. – **270**. – P. 104 – 131.
14. *Бокало М. М., Паучок І. Б.* Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності // Мат. студ. – 2006. – **24**, № 1. – С. 25 – 48.
15. *Bokalo M. M.* The unique solvability of a problem without initial conditions for linear and nonlinear elliptic-parabolic equations // J. Math. Sci. – 2011. – **178**, № 1. – P. 41 – 64.
16. *Бугрій О., Лавренюк С.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 33 – 43.
17. *Buhrii O. M., Mashiyev R. A.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity // Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl. – 2009. – **70**, № 6. – P. 2331 – 2335.
18. *Mashiyev R. A., Buhrii O. M.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity // J. Math. Anal. and Appl. – 2011. – **377**. – P. 450 – 463.
19. *Бугрій О.* Про існування слабкого розв'язку мішаної задачі для модельного півлінійного параболічного рівняння зі змінним степенем нелінійності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2011. – Вип. 75. – С. 79 – 90.
20. *Бугрій О.* Про розв'язність модельних неоднорідних задач для півлінійних параболічних рівнянь зі змінними степенями нелінійності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77. – С. 29 – 40.
21. *Хатсон В., Пим Дж. С.* Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983. – 432 с.
22. *Schauder J.* Der Fixpunktsatz in Funftionalraumen // Stud. Math. (Lwow). – 1930. – **2**. – P. 171 – 180.
23. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
24. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
25. *Orlicz W.* Über Konjugierte Exponentenfolgen // Stud. Math. (Lwow). – 1931. – **3**. – P. 200 – 211.
26. *Kováčik O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. – 1991. – **41(116)**. – P. 592 – 618.
27. *Fan X., Han X.* Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$-Laplacian equations in $\mathbb{R}^n$ // Nonlinear Anal. – 2004. – **59**. – P. 173 – 188.
28. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
29. *Лыков А. В.* Тепломассообмен: Справочник. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.

Одержано 25.06.13