УДК 512.552.13

Б. В. Забавський, Б. М. Кузніцька (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

СТАБІЛЬНИЙ РАНГ МНОЖИНИ ПОВНИХ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЕМ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

We prove that the class a full matrices of order 2 over the ring of elementary divisors has the stable rank 1.

Доказано, что класс полных матриц порядка 2 над кольцом элементарных делителей имеет стабильный ранг 1.

Стабільний ранг є одним із основних інваріантів K-теорії. Дане поняття було введено Х. Басом [1]. У сучасних дослідженнях стабільний ранг активно використовується в дослідженнях по теорії кілець, зокрема в задачах діагоналізації матриць [2–4]. Серед кілець скінченного стабільного рангу слід виділити клас кілець елементарних дільників, який був уведений І. Капланським [5]. Згідно з результатами [6] стабільний ранг кільця елементарних дільників не перевищує 2.

Одним із важливих питань є вивчення зв'язків стабільного рангу кільця і стабільного рангу кілець матриць над ним. У роботі [7] встановлено, що стабільний ранг кільця матриць порядку n над кільцем стабільного рангу r дорівнює $1 + \left[\dfrac{r-1}{n}\right]$, де $[m]$ позначає цілу частину від числа m.

Зазначимо, що стабільний ранг кільця дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли стабільний ранг кільця матриць дорівнює 1. Водночас у роботах $[8, 9]$ описано деякі області Безу, над якими клас повних матриць має стабільний ранг 1. В даній роботі встановимо аналогічний результат для кілець елементарних дільників, а також, як наслідок, переконаємося, що виконується двочленний правий (лівий) ланцюг подільності для повних матриць порядку 2 над кільцем елементарних дільників.

Нехай далі R — комутативне кільце з одиницею і $1 \neq 0$. Рядок $(a_1, a_2, ..., a_n)$ елементів кільця R називається унімодулярним, якщо $a_1R + a_2R + ... + a_nR = R$. Стабільним рангом кільця R називається таке найменше натуральне число m, що для довільного унімодулярного рядка $(a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1})$ існують такі елементи $b_1, b_2, ..., b_m \in R$, що рядок $(a_1 + a_{m+1}b_1,\ a_2 + a_{m+1}b_2, ..., a_m + a_{m+1}b_m)$ є унімодулярним. Якщо таке натуральне число не існує, то вважають, що стабільний ранг кільця дорівнює нескінченності $[1, 3]$. Під кільцем Безу розуміємо кільце, в якому довільний скінченнопороджений ідеал є головним. Кільце матриць порядку 2 над кільцем R позначимо через R_2. Будемо говорити, що матриця $A \in R_2$ є повною, якщо $R_2AR_2 = R_2$.

Позначимо через $F(R_2)$ множину всіх повних матриць кільця R_2.

Встановимо критерій взаємної простоти зліва верхніх трикутних матриць другого порядку.

Теорема 1. *Нехай R — комутативне кільце Безу стабільного рангу 2. Дві матриці $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ взаємно прості зліва тоді і тільки тоді, коли $aR + xR = R$, $cR + zR + (ay - bx)R = R$.*

Доведення. Нехай існують такі матриці $U, V \in R_2$, що $AU + BV = E$, де E — одинична матриця. Позначимо $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$. Тоді з рівності

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

отримаємо $au_1 + xv_1 = 1$, тобто $aR + xR = R$. Оскільки визначник матриці $AU + BV = E$ дорівнює 1, то $cR + zR + (ay - bx)R = R$. Необхідність доведено.

Нехай для матриць A і B $aR + xR = R$, $cR + zR + (ay - bx)R = R$. Розглянемо матрицю

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 & x & 0 \\ b & c & y & z \end{pmatrix}.$$

Оскільки $aR + xR = R$, то існують такі елементи $u, v \in R$, що $au + xv = 1$. Тоді

$$\begin{pmatrix} a & 0 & x & 0 \\ b & c & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ bu + yv & c & ay - bx & z \end{pmatrix}.$$

Елементарними перетвореннями рядків матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ bu + yv & c & ay - bx & z \end{pmatrix}$ зведемо до вигляду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & ay - bx & z \end{pmatrix} = B$.

Позаяк $cR + zR + (ay - bx)R = R$ і R — кільце Безу стабільного рангу 2, то згідно з результатами [6] існує оборотна матриця P порядку 3 над кільцем Rтака, що

$$(c, ay - bx, z)P = (1, 0, 0).$$

Звідси

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & P & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто ми довели, що для матриці C знайдеться оборотна матриця Q порядку 4 така, що

$$CQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а це, згідно з [5], означає, що для матриць A, B існують такі оборотні матриці $U, V \in R_2$, що $AU + BV = E$, тобто A, B взаємно прості зліва.

Теорему доведено.

Будемо говорити, що матриця $A \in R_2$ діагоналізується, якщо існують такі оборотні матриці $P, Q \in R_2$, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon_2 R \subset \varepsilon_1 R$ для деяких елементів $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R$. Якщо над кільцем R довільна матриця діагоналізується, то кільце називається кільцем елементарних дільників. Зауважимо, що якщо R — комутативне кільце Безу стабільного рангу 2 і $A \in R_2$ — повна матриця, яка діагоналізується над R, то $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ для деяких оборотних матриць $P, Q \in R_2$ і елемента $\varepsilon \in R$.

Теорема 2. *Нехай R — комутативне кільце Безу стабільного рангу 2. Нехай $A,\, B \in F(R_2)$ і $AR_2 + BR_2 = R_2$, причому матриця B діагоналізується. Тоді існує така повна матриця $T \in F(R_2)$, що $A + BT$ — оборотна матриця.*

Доведення. Оскільки матриця B діагоналізується, то через обмеження, накладені на кільце R, отримаємо існування таких оборотних матриць $P, U, Q \in R_2$, що

$$PAU = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Позаяк $AR_2 + BR_2 = R_2$, то існують такі матриці $C, D \in R_2$, що $AC + BD = E$, а звідси $PAU(U^{-1}C) + PBQ(Q^{-1}D) = P$, тобто матриці $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ взаємно прості зліва. На підставі теореми 1 маємо $bR + cR + yR = R$. Оскільки стабільний ранг кільця R дорівнює 2, то існують такі елементи $\alpha, \beta \in R_2$, що $(b + y\alpha)R + (c + y\beta)R = R$, а відтак існують такі елементи $n, m \in R$, що $(b + y\alpha)n + (c + y\beta)m = 1$. З огляду на результати праці [2] елементи α, β можна вибрати так, що $\alpha R + \beta R = R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m - a & -n \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -n \\ b + y\alpha & c + y\beta \end{pmatrix}$$

— оборотна матриця.

Оскільки $\alpha R + \beta R = R$, то очевидно, що матриця $\begin{pmatrix} m - a & -n \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ є повною.

Як очевидний наслідок з теореми 2 у випадку кільця елементарних дільників отримуємо наступний результат.

Теорема 3. *Нехай R — комутативне кільце елементарних дільників. Якщо $A,\, B \in F(R_2)$ і $AR_2 + BR_2 = R_2$, то існує така повна матриця $T \in F(R_2)$, що $A + BT$ — оборотна матриця.*

Більш того, маємо такий результат.

Теорема 4. *Нехай R — комутативне кільце елементарних дільників. Тоді для довільних повних матриць $A,\, B \in F(R_2)$ існують такі повні матриці $Q_1,\, Q_2,\, P \in R_2$, що $A = BQ_1 + P$, $B = PQ_2$.*

Доведення. На підставі обмежень, накладених на R, і результатів [5] переконаємося, що R_2 теж є кільцем елементарних дільників, а отже, R_2 є кільцем Безу стабільного рангу 2. Нехай $A, B \in F(R_2)$ і $AR_2 + BR_2 = DR_2$ для деякої матриці $D \in R_2$. Звідси $A = DA_0$, $B = DB_0$ і $AU + BV = E$ для деяких матриць $A_0, B_0, U, V \in R_2$.

Тоді $D(E - A_0U - B_0V) = 0$ і $A_0U + B_0V + C = 0$ для деякої матриці $C \in R_2$ такої, що $DC = 0$.

Оскільки стабільний ранг R_2 дорівнює 2, то існують такі матриці $X, Y \in R_2$, що

$$(A_0 + CX)R_2 + (B_0 + CY)R_2 = R_2.$$

Позначимо $A_0 + CX = A_1$, $B_0 + CY = B_1$. Позаяк $DC = 0$, то $DA_1 = A$, $DB_1 = B$.

Оскільки $A \in F(R_2)$ і $B \in F(R_2)$ і $DA_1 = A$, $DB_1 = B$, то, очевидно, $A_1 \in F(R_2)$, $B_1 \in F(R_2)$. Оскільки $A_1R_2 + B_1R_2 = R_2$, то згідно з теоремою 3 $A_1 + B_1T = S$ — оборотна матриця для деякої повної матриці T. Звідси

$$A_1 = B_1(-T) + S, \quad B_1 = S(S^{-1}B_1).$$

Тоді

$$A = B(-T) + DS, \quad B = DS(S^{-1}B_1).$$

Покладемо $Q_1 = -T$, $Q_2 = S^{-1}B_1$, $P = DS$. Зауважимо, що $Q_1 \in F(R_2)$, $Q_2 \in F(R_2)$, $P \in F(R_2)$, як відповідні дільники повних матриць.

Теорему доведено.

1. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publ. Math. – 1964. – **22** – P. 50 – 60.
2. *Zabavsky B. V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable range // Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Mat. – 2003. – **61**. – S. 206 – 211.
3. *Menal P., Moneasi J.* On regular rings with stable range 2 // J. Pure and Appl. Algebra. – 1982. – **24**. – P. 25 – 40.
4. *Ara P., Goodearl K., O'Meara K. C., Pardo E.* Diagonalization of matrices over regular rings // Linear Algebra and Appl. – 1987. – **265**. – P. 147 – 163.
5. *Kaplansky I.* Elementary divisor ring and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464 – 491.
6. *Забавський Б. В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 550 – 554.
7. *Васерштейн Л. Н.* Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 2. – С. 17 – 27.
8. *Забавський Б. В., Петричкович В. М.* Про стабільний ранг кілець матриць // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1575 – 1578.
9. *Романів А. М., Щедрик В. П.* Про стабільний ранг одного класу матриць // Сучасні проблеми механіки і математики. – 2013. – **3.** – С. 201 – 202.

Одержано 15.07.13