УДК 512.54

Ю. Ю. Лещенко

(Черкас. нац. ун-т им. Б. Хмельницкого, Ин-т физики, математики и компьютерно-информ. систем)

ДИАМЕТРЫ ГРАФОВ КОММУТАТИВНОСТИ СПЛЕТЕНИЙ ГРУПП ПОДСТАНОВОК

Let G be a group and let $\mathcal{Z}(G)$ be the center of G. The commuting graph of the group G is an undirected graph $\Gamma(G)$ with the set of vertices $G \setminus \mathcal{Z}(G)$ such that two vertices x and y are adjacent if and only if $xy = yx$. In the paper, we study the commuting graphs of permutation wreath products $H \wr G$, where G is a transitive permutation group acting upon X (the top group of the wreath product) and (H, Y) is an Abelian permutation group acting on Y.

Нехай G — група, а $\mathcal{Z}(G)$ — її центр. Граф комутативності групи G — це неорієнтований граф $\Gamma(G)$ з множиною вершин $G \setminus \mathcal{Z}(G)$, де вершини x та y з'єднуються ребром тоді і тільки тоді, коли $xy = yx$. У статті вивчаються графи комутативності вінцевих добутків $H \wr G$, де G — група підстановок, що транзитивно діє на X („активна" група вінцевого добутку), а (H, Y) — абелева група підстановок на Y.

1. Введение. *Графом коммутативности* неабелевой группы G называется неориентированный граф (без петель и кратных ребер) $\Gamma(G)$, вершинами которого являются нецентральные элементы группы G и две вершины соединяются ребром тогда и только тогда, когда они коммутируют в G. В статье [1] исследованы соответствующие графы симметрических и знакопеременных групп, а также сформулирован ряд гипотез. Наиболее известная из них, — гипотеза об ограниченности сверху множества диаметров связных графов коммутативности конечных групп — была опровергнута в 2012 г. [2]. Графы коммутативности (а также их дополнения) изучались, например, в работах [3 – 5]. Достаточно полный обзор результатов по данной теме можно найти в препринте [6], где также приводится доказательство ослабленной гипотезы о диаметрах: диаметры компонент связности графа коммутативности произвольной конечной неабелевой группы с тривиальным центром не превышают 10.

В [7] доказано утверждение, позволяющее судить о строении графов коммутативности прямых произведений конечных групп по свойствам соответствующих графов сомножителей. В связи с этим возникает естественный интерес к исследованию подобных связей касательно других классических теоретико-групповых конструкций, например сплетений групп подстановок.

Цель данной статьи — изучение графов коммутативности сплетений конечных групп подстановок, где одна из групп (активная группа сплетения) является транзитивной, а вторая — абелевой. Такие сплетения имеют нетривиальный центр.

Введем следующие обозначения. Пусть x, y — вершины графа Γ, тогда $x \sim y$ означает, что x и y соединены в Γ ребром. Символом $\rho(x, y)$ обозначим длину кратчайшего пути от x к y; если такого пути не существует, то $\rho(x, y) = \infty$. Тогда $\mathrm{d}(\Gamma) = \sup\{\rho(x, y)\}$, где x, y пробегают множество вершин графа Γ, называется *диаметром* Γ.

Для произвольной группы подстановок (G, X) *циклом максимальной длины* на X будем называть любой элемент из G, действующий на X транзитивно.

Теорема 1. *Пусть (G, X), (H, Y) — группы подстановок, причем (G, X) транзитивна, (H, Y) абелева, а Γ — граф коммутативности сплетения $H \wr G$.*

1. *Если $|X|$ — простое число, то граф Γ несвязный.*

2. *Если* $|X|$ *не является простым числом, то граф* Γ *связный и* $\mathrm{d}(\Gamma) \leq 5$. *Дополнительно, если* G *импримитивна, то* $\mathrm{d}(\Gamma) \leq 4$, *а если* G *не содержит циклов максимальной длины, то* $\mathrm{d}(\Gamma) \leq 3$.

Теорема 2. *Пусть* $(G,X),(H,Y)$ — *группы подстановок с циклами максимальной длины, при этом* $|X|$ *не является простым числом, группа* (G,X) *импримитивна, а группа* (H,Y) *абелева. Тогда граф* $\Gamma(H \wr G)$ *связный с диаметром равным* 4.

В качестве примеров в последнем пункте приведены диаметры графов коммутативности для некоторых серий классических p-групп (силовских p-подгрупп полной линейной группы над конечным полем, а также силовских p-подгрупп симметрических групп).

2. Сплетения групп подстановок. Пусть (G,X) и (H,Y) — группы подстановок, действующие на множествах X и Y соответственно, $\mathrm{Fun}(X,H)$ — множество функций из X в H. Обозначим символом x^g образ x под действием подстановки g. Тогда можно построить новую группу $H \wr G$, действующую на декартовом произведении $Y \times X$, как описано ниже. Пусть

$$H \wr G = \{[f,g] \mid f \in \mathrm{Fun}(X,H) \text{ и } g \in G\}$$

и если $(b,a) \in Y \times X$, $u = [f,g] \in H \wr G$, то $(b,a)^{[f,g]} = (b^{f(a)}, a^g)$. Группа подстановок $(H \wr G, Y \times X)$ называется *сплетением* групп (H,Y) и (G,X). Если $v = [f_1, g_1] \in H \wr G$, то

$$u \cdot v = [f f_1^g, g g_1],$$

где $f_1^g(x) = f_1(x^g)$ и $(f f_1^g)(x) = f(x) \cdot f_1^g(x) = f(x) \cdot f_1(x^g)$ для всех $x \in X$.

Нормальная подгруппа $\overline{H} = \{[f, 1_G] \mid f \in \mathrm{Fun}(X,H)\}$, где 1_G — единица группы G, называется *базой* сплетения. Пусть $\overline{G} = \{[e_H, g] \mid g \in G\}$, где e_H — функция, возвращающая единицу группы H при всех $x \in X$. Тогда $H \wr G \cong \overline{H} \rtimes \overline{G}$.

Операция сплетения ассоциативна в классе групп подстановок, т. е. $(G_3 \wr G_2) \wr G_1 \cong G_3 \wr (G_2 \wr G_1) \cong G_3 \wr G_2 \wr G_1$. Это свойство позволяет естественным образом обобщить понятие сплетения на произвольное конечное число сомножителей.

Предположим, что $(G,X) < S_X$ и $(H,Y) < S_Y$, где S_X и S_Y — симметрические группы множеств X и Y соответственно. Зафиксируем $g \in G$ и $x_0 \in X$. Тогда $\mathrm{Cyc}_g(x_0) = (x_0, x_1, \ldots, x_{t-1})$, где $x_i^g = x_{i+1}$ для $i \in \{0,1,\ldots,t-2\}$ и $x_{t-1}^g = x_0$, называется *циклом* подстановки g с представителем x_0.

Рассмотрим сплетение $H \wr G$, некоторый фиксированный элемент $g \in G$ и два вида функциональных уравнений:

$$f^{-1} \cdot f^g = e_H, \tag{1а}$$

$$f^{-1} \cdot f^g = r, \tag{1б}$$

где f — неизвестная функция, r — некоторая фиксированная функция из $\mathrm{Fun}(X,H)$, а $e_H(x) = 1_H$ при всех $x \in X$. Символ f^{-1} обозначает такую функцию, что $f^{-1}(x) = (f(x))^{-1}$ для всех $x \in X$.

Уравнения вида (1а), (1б) встречаются в работе Л. Калужнина, посвященной изучению силовских p-подгрупп симметрических групп (см. [8], леммы 5 и 6 — случай кратного сплетения циклических групп простого порядка). Похожие уравнения также часто возникают при изучении других обобщений конструкции сплетения (см., например, [9], лемма 14 — случай кратного сплетения копий аддитивной группы целых чисел). Следующие две леммы справедливы для произвольных групп подстановок.

Лемма 1. *Функция f является решением уравнения* (1a) *тогда и только тогда, когда на каждом цикле подстановки g функция f постоянна. В частности, g действует транзитивно на X тогда и только тогда, когда единственным решением будет $f \equiv \mathrm{const}$ — постоянная функция.*

Доказательство. Пусть C — некоторый цикл подстановки g и $f(x) = h$ для всех $x \in C$, где h — некоторый фиксированный элемент группы H. Тогда $f^{-1}(x) \cdot f(x^g) = h^{-1} \cdot h = 1_H$ для всех $x \in C$ и уравнение (1аа) имеет место. С другой стороны, если существуют $x, y \in C$ такие, что $x^g = y$ и $f(x) \neq f(y)$, то $f^{-1}(x) \cdot f(x^g) = f^{-1}(x) \cdot f(y) \neq 1_H$, т. е. f не удовлетворяет уравнению (1а).

Лемма 2. *Уравнение* (1б) *имеет решения тогда и только тогда, когда на каждом конечном цикле* $\mathrm{Cyc}_g(x_0) = (x_0, x_1, \ldots, x_{t-1})$ *подстановки g выполняется равенство*

$$\prod_{i=0}^{t-1} r(x_i) = 1_H. \tag{2}$$

Доказательство. Подстановка g может иметь бесконечные циклы. Пусть $C = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)$ — один из них. Положим $f(x_0) = 1_H$, $f(x_i) = f(x_{i-1})r(x_{i-1})$ и $f(x_{-i}) = f(x_{-i+1}) \times \times r^{-1}(x_{-i})$, где $i > 0$. Тогда при $i = 0, 1, 2, \ldots$ получаем

$$f^{-1}(x_i)\, f(x_i^g) = f^{-1}(x_i)\, f(x_{i+1}) = f^{-1}(x_i)\, f(x_i) r(x_i) = r(x_i),$$

$$f^{-1}(x_{-i})\, f(x_{-i}^g) = f^{-1}(x_{-i})\, f(x_{-i+1}) = \left(f(x_{-i+1}) r^{-1}(x_{-i})\right)^{-1} f(x_{-i+1}) = r(x_{-i}).$$

Другими словами, на бесконечном цикле C функция f, построенная выше, удовлетворяет уравнению (1б).

Пусть теперь $C = \mathrm{Cyc}_g(x_0) = (x_0, x_1, \ldots, x_{t-1})$ — некоторый конечный цикл подстановки g. Если f удовлетворяет уравнению (1б), то

$$\prod_{i=0}^{t-1} r(x_i) = \prod_{i=0}^{t-1} \left(f^{-1}(x_i)\, f(x_i^g)\right) = \prod_{i=0}^{t-1} \left(f^{-1}(x_i)\, f(x_{i+1})\right) = 1_H, \quad \text{где } x_t = x_0.$$

Покажем, что если равенство (2) выполняется, то уравнение (1б) имеет решение. Положим $f(x_0) = 1_H$ и $f(x_i) = r(x_0) r(x_1) \ldots r(x_{i-1})$, если $i \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$. Рассмотрим произвольный элемент $x_i \in C$, $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$. Если $i < t - 1$, то

$$f^{-1}(x_i)\, f(x_i^g) = f^{-1}(x_i)\, f(x_{i+1}) =$$

$$= \left(r(x_0) r(x_1) \ldots r(x_{i-1})\right)^{-1} r(x_0) r(x_1) \ldots r(x_{i-1}) r(x_i) = r(x_i).$$

Из (2) следует, что $\left(r(x_0) r(x_1) \ldots r(x_{t-2})\right)^{-1} = r(x_{t-1})$. Поэтому

$$f^{-1}(x_{t-1})\, f(x_{t-1}^g) = f^{-1}(x_{t-1})\, f(x_0) =$$

$$= \left(r(x_0) r(x_1) \ldots r(x_{t-2})\right)^{-1} \cdot 1_H = r(x_{t-1}),$$

т. е. равенство (1б) выполняется для любого символа цикла. Повторим такую же процедуру для всех циклов. Тогда f — искомое решение.

При фиксированном $h \in H$ символом c_h обозначим функцию из $\mathrm{Fun}(X, H)$, принимающую значение h при всех $x \in X$. Множество всех пар вида $[c_h, 1_G]$, где h пробегает H, называется *диагональю* базы сплетения $H \wr G$. Следующее утверждение является частным случаем следствия 3.4 из [10].

Лемма 3. *Пусть (G, X), (H, Y) — группы подстановок, причем (G, X) является транзитивной, а (H, Y) — абелевой. Тогда*

$$\mathcal{Z}(H \wr G) = \{[c_h, 1_G] \mid h \in H \text{ и } c_h(x) = h \text{ для всех } x \in X\}$$

— центр сплетения $H \wr G$.

3. Диаметры графов коммутативности сплетений групп подстановок. Далее будем считать, что $2 \leq |X|, |Y| < \infty$.

Лемма 4. *Пусть (G, X), (H, Y) — группы подстановок, $|X| = p$ — простое число, (G, X) транзитивна, а (H, Y) абелева. Тогда граф $\Gamma(H \wr G)$ является несвязным.*

Доказательство. Поскольку G транзитивна, то $|X|$ — делитель $|G|$ и, следовательно, G содержит элемент порядка p, который будет циклом максимальной длины на X.

Зафиксируем $h \in H$ и положим $u = [c_h, g] \in H \wr G \setminus \mathcal{Z}(H \wr G)$, где g — цикл длины p и $c_h(x) = h$ для всех $x \in X$. Рассмотрим таблицу $v = [f, g'] \in H \wr G$ и допустим, что $uv = vu$. Тогда, так как g — цикл максимальной длины, он коммутирует в S_X (а значит, и в (G, X)) только со своими степенями (см. например, [11, с. 246], лемма 8.24). Другими словами, $g' = g^\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, и должно выполняться равенство первых координат таблиц uv и vu, т. е.

$$c_h(x) f(x^g) = f(x) c_h(x^{g'}) \qquad \text{для всех } x \in X.$$

Поскольку функция c_h постоянна при всех $x \in X$, а группа H абелева, из последнего равенства следует $f^g = f$, где g действует на X транзитивно. Тогда по лемме 1 получаем $f \equiv \mathrm{const}$.

Таким образом, $v = [c_{h'}, g^\alpha]$, где $c_{h'}(x) = h'$ при всех $x \in X$, а h' — некоторый фиксированный элемент группы H. С другой стороны, $g^\alpha = 1_G$ тогда и только тогда, когда $\alpha = p$ (в этом случае $v \in \mathcal{Z}(H \wr G)$). Если же $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$, то g^α — цикл длины p и действует на X транзитивно. Следовательно, пары, не содержащиеся в $\mathcal{Z}(H \wr G)$, имеющие в качестве второго элемента p-цикл и постоянную функцию в качестве первого своего элемента, коммутируют только с парами такого же вида. При этом они образуют отдельную компоненту связности графа $\Gamma(H \wr G)$.

***Пример* 1** ([12], теорема 2). Граф коммутативности группы $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p$ (считаем, что $\mathbb{Z}_p$ действует на себе регулярно) несвязный.

3.1. Оценка диаметров сверху.

Лемма 5. *Пусть (G, X), (H, Y) — группы подстановок, где $|X| = m$ не является простым числом, группа (G, X) транзитивна, а группа (H, Y) абелева. Тогда граф $\Gamma(H \wr G)$ является связным и* $\mathrm{d}(\Gamma(H \wr G)) \leq 5$.

Доказательство. Пусть $u = [f, g] \in H \wr G \setminus \mathcal{Z}(H \wr G)$.

Случай 1: g действует на X не транзитивно, т. е. g имеет по крайней мере два независимых цикла. Пусть S — множество символов в одном из циклов подстановки g. Положим $z = [f_1, 1_G]$, где f_1 — такая функция из $\mathrm{Fun}(X, H)$, что $f_1(x) \neq 1_H$ при $x \in S$ и $f_1(x) = 1_H$ при $x \in X \setminus S$. Тогда $f_1(x^g) = f_1(x)$ для всех $x \in X$. Более того, так как H абелева, то

$$uz = [f f_1^g, g] = [f f_1, g] = [f_1 f, g] = zu.$$

Согласно лемме 3 получаем $z = [f_1, 1_G] \notin \mathcal{Z}(H \wr G)$. Следовательно, u соединена с z ребром в $\Gamma(H \wr G)$.

Случай 2: g действует на X транзитивно, т. е. g — цикл длины $|X| = m$. Поскольку m не является простым, существует простое p такое, что $m = p \cdot n$, где $n \geq 2$. Тогда g^p имеет по крайней мере два цикла и

$$u^p = [ff^g \dots f^{g^{p-1}}, g^p]$$

удовлетворяет условиям случая 1. Следовательно, найдется такое $z \in \overline{H} \setminus \mathcal{Z}(H \wr G)$, что $u \sim \sim u^p \sim z$ является путем длины 2 в $\Gamma(H \wr G)$.

Наконец, так как элементы множества $\overline{H}$ перестановочны между собой, между двумя произвольными вершинами графа $\Gamma(H \wr G)$ всегда существует путь, длина которого не больше 5.

Оценка, содержащаяся в предыдущей лемме, является точной.

***Пример* 2.** Пусть S_9 — симметрическая группа, а группа $\mathbb{Z}_2$ действует на себе регулярно. Тогда $\mathrm{d}(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \wr S_9)) = 5$.

Доказательство. По лемме 5 диаметр графа $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \wr S_9)$ не превышает 5. Докажем, что найдутся такие две таблицы, расстояние между которыми в $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \wr S_9)$ равно 5.

Пусть $g_1 = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ и $g_2 = (1,4,3,5,6,7,8,9,2)$ — два цикла из S_9. Тогда $\rho(g_1, g_2) = 5$ в $\Gamma(S_9)$ (это можно показать путем непосредственных вычислений, например, используя `GAP` [13]). Рассмотрим таблицы $u = [c_0, g_1]$ и $v = [c_0, g_2]$ из $\mathbb{Z}_2 \wr S_9$, где $c_0(x) = 0$ при всех $x \in X$.

Допустим, что $u' = [f, g] \notin \mathcal{Z}(\mathbb{Z}_2 \wr S_9)$ и коммутирует с u. Тогда $g_1 \sim g$ и $c_0(x)f(x^{g_1}) = = f(x)c_0(x^g)$ для всех $x \in X$. Поскольку c_0 — постоянная функция, из последнего равенства следует, что $f^{-1}(x)f(x^{g_1}) = 1_H$ при всех $x \in X$. По лемме 1, так как g_1 действует на X транзитивно, функция f также должна быть постоянной. С другой стороны, поскольку g_1 — цикл длины $|X|$ (и, таким образом, g_1 коммутирует только со своими собственными степенями), $g = g_1^\alpha$ для некоторого $\alpha \in \{0, 1, \dots, 8\}$. При этом если $\alpha = 0$, то $u' \in \mathcal{Z}(\mathbb{Z}_2 \wr S_9)$. Значит, $u' = [c_{h_1}, g_1^\alpha]$, где $c_{h_1}(x) = h_1$ при всех $x \in X$, $\alpha \in \{1, 2, \dots, 8\}$, h_1 — некоторый фиксированный элемент группы H.

Аналогично, если $v' \sim v$, то $v' = [c_{h_2}, g_2^\beta]$, где $c_{h_2}(x) = h_2$ при всех $x \in X$, $\beta \in \{1, 2, \dots, 8\}$, h_2 — некоторый фиксированный элемент группы H.

Предположим, что существует таблица $w = [f_3, g_3]$, соединяющая u' и v' в $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \wr S_9)$, т. е. $u'w = wu'$ и $v'w = wv'$. Сравнивая первые компоненты таблиц из последних двух равенств и учитывая, что c_{h_1} и c_{h_2} постоянны, получаем равенства

$$f_3^{-1}(x)f_3(x^{g_1^\alpha}) = 1_G \quad \text{и} \quad f_3^{-1}(x)f_3(x^{g_2^\beta}) = 1_G, \quad x \in X.$$

Если g_1^α и/или g_2^β — циклы максимальной длины, то по лемме 1 функция f_3 постоянна на X. Осталось рассмотреть случаи, когда $\alpha \in \{3, 6\}$ и $\beta \in \{3, 6\}$. Получаем

$$g_1^3 = (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9), \qquad g_1^6 = (1,7,4)(2,8,5)(3,9,6),$$

$$g_2^3 = (1,5,8)(4,6,9)(3,7,2), \qquad g_2^6 = (1,8,5)(4,9,6)(3,2,7).$$

При любом из четырех возможных случаев выбора α и β орбиты соответствующих подстановок g_1^α и g_2^β перекрываются. Таким образом, f_3 постоянна при всех значениях аргументов.

С другой стороны, так как расстояние между g_1 и g_2 в $\Gamma(S_9)$ равно 5 и S_9 имеет тривиальный центр, $g_3 = \mathrm{id}$ — тождественная подстановка.

Следовательно, $w \in \mathcal{Z}(\mathbb{Z}_2 \wr S_9)$ и $\rho(u, v) \geq 5$.

Лемма 6. *Пусть (G,X), (H,Y) — группы подстановок, $|X| = m$ не является простым числом, группа (G,X) транзитивна и не содержит циклов максимальной длины, а группа (H,Y) абелева. Тогда граф $\Gamma(H \wr G)$ является связным и $\mathrm{d}(\Gamma(H \wr G)) \leq 3$.*

Доказательство. Пусть $u = [f_1, g_1]$ и $v = [f_2, g_2]$ — произвольные элементы группы $H \wr G$. Поскольку G не содержит ни одного цикла максимальной длины, g_1 имеет по крайней мере два цикла (орбиты) на X. Пусть C_{g_1} — один из этих циклов.

Рассмотрим таблицу $u' = [f_3, 1_G]$, где $f_3 \in \mathrm{Fun}(X,H)$, $f_3(x) = h \neq 1_H$ (h — некоторый фиксированный элемент группы H) при $x \in C_{g_1}$ и $f_3(x) = 1_H$ при $x \notin C_{g_1}$. Тогда путем непосредственных вычислений можно показать, что $uu' = u'u$ и $u' \notin \mathcal{Z}(H \wr G)$ (лемма 3). Аналогично, найдется таблица $v' \in H \wr G \setminus \mathcal{Z}(H \wr G)$ такая, что $v' = [f_4, 1_G]$ и $v \sim v'$.

Наконец, поскольку $u' \sim v'$, расстояние между любыми таблицами u и v в $\Gamma(H \wr G)$ не превышает 3.

***Пример* 3.** Рассмотрим группу $V_4 = \langle (1,2)(3,4), (1,4)(2,3) \rangle$ (четверная группа Клейна), которая транзитивна на $\{1,2,3,4\}$ и не содержит циклов длины 4. Тогда $\mathrm{d}(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \wr V_4)) = 3$.

Лемма 7. *Пусть (G,X), (H,Y) — группы подстановок, $|X| = m$ не является простым числом, группа (G,X) импримитивна, а группа (H,Y) абелева. Тогда граф $\Gamma(H \wr G)$ является связным и $\mathrm{d}(\Gamma(H \wr G)) \leq 4$.*

Доказательство. Пусть $u = [f_1, g_1], v = [f_2, g_2]$ — произвольные нецентральные элементы группы $H \wr G$. Учитывая лемму 6, достаточно рассмотреть случаи, когда один из элементов g_1, g_2 (или оба одновременно) — циклы максимальной длины.

Случай 1: g_1 — цикл максимальной длины, а g_2 нет. Тогда $u^p = [f'_1, g_1^p]$, где $p \mid m$, $p \neq 1$ и $p \neq m$, является нецентральным (так как $g_1^p \neq 1_G$) элементом группы $H \wr G$ и при этом g_1 уже не будет циклом максимальной длины. Поскольку $u \sim u^p$, по лемме 6 получаем $\rho(u,v) \leq 4$. Если g_2 — цикл максимальной длины, а g_1 нет, то ситуация будет аналогичной.

Случай 2: g_1, g_2 — циклы максимальной длины. Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ — блоки системы импримитивности группы G. Тогда $n \mid m$ и $n < m$. Рассмотрим блок S_1. Поскольку g_1 — цикл максимальной длины, g_1 действует на $\mathcal{S}$ транзитивно (т. е. циклом). Тогда $S_1^{g_1^n} = S_1$, при этом, очевидно, $g_1^n \neq 1_G$. Аналогично, $S_1^{g_2^n} = S_1$ и $g_2^n \neq 1_G$.

Таким образом, $u^n = [f'_1, g_1^n]$ и $v^n = [f'_2, g_2^n]$ — нецентральные элементы группы $H \wr G$. Осталось доказать, что в $H \wr G$ существует нецентральный элемент w такой, что $u^n \sim w \sim v^n$. Для этого положим $w = [f, 1_G]$, где $f(x) = h \neq 1_H$ (h — некоторый фиксированный элемент группы H) при $x \in S_1$ и $f(x) = 1_H$ при $x \in X \setminus S_1$. Непосредственные вычисления показывают, что $u^n \sim w$ и $v^n \sim w$.

Следовательно, $u \sim u^n \sim w \sim v^n \sim v$ — путь длины 4 в $\Gamma(H \wr G)$.

Объединяя леммы 4 – 7, получаем теорему 1.

Итак, для того чтобы диаметр графа коммутативности сплетения не превышал 4, достаточно, чтобы (G,X) была импримитивной, но это условие не является необходимым. Например, $\mathrm{diam}(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \wr S_6)) = 4$.

Вопрос. Пусть (G,X), (H,Y) — группы подстановок, причем группа (G,X) транзитивна, а группа (H,Y) абелева. При каких условиях диаметр графа коммутативности группы $H \wr G$ равен 5?

3.2. Оценки диаметров снизу. Оценка диаметра графа $\Gamma(H \wr G)$ снизу предполагает знание дополнительной информации о строении групп (G,X) и (H,Y). Для групп с циклами максимальной длины имеет место следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть* (G, X), (H, Y) *— группы подстановок с циклами максимальной длины,* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$,

$$u = [f_n, g] \tag{3}$$

— таблица из $H \wr G$ *такая, что* g *— цикл максимальной длины в* (G, X), $f_n(x_n) = h$, *где* h *— цикл максимальной длины в* (H, Y), *и* $f_n(x) = 1_H$ *при* $x \neq x_n$. *Тогда* u *— цикл максимальной длины в* $(H \wr G, Y \times X)$.

Доказательство. Будем считать, что $g = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $h = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Покажем, что u действует на $Y \times X$ транзитивно, т. е. для любых $y_j \in Y$ и $x_i \in X$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$, существует такое α, что $(y_1, x_1)^{u^\alpha} = (y_j, x_i)$.

Для произвольного α путем непосредственных вычислений имеем

$$u^\alpha = [f_n f_n^g \ldots f_n^{g^{\alpha-1}}, g^\alpha].$$

При этом если $\alpha = n$, то для любого $x_i \in X$

$$f_n(x_i) f_n(x_i^g) \ldots f_n(x_i^{g^{n-1}}) = f_n(x_i) f_n(x_{i+1}) \ldots f_n(x_n) f_n(x_1) \ldots f_n(x_{i-1}) = h,$$

т. е. $u^n = [c_h, 1_G]$, $c_h(x) = h$ при всех $x \in X$. Более того, $(u^n)^k = [c_{h^k}, 1_G]$, где $c_{h^k}(x) = h^k$ при всех $x \in X$. При этом если $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то

$$(y_1, x_1)^{u^{i-1}} = (y_1^{f_n(x_1) f_n(x_1^g) \ldots f_n(x_1^{g^{i-2}})}, x_1^{g^{i-1}}) = (y_1^{f_n(x_1) f_n(x_2) \ldots f_n(x_{i-1})}, x_i) = (y_1, x_i).$$

Пусть $\alpha = (i-1) + n(j-1)$, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда

$$(y_1, x_1)^{u^\alpha} = (y_1, x_1)^{u^{i-1} \cdot (u^n)^{j-1}} = (y_1, x_i)^{(u^n)^{j-1}} = (y_1^{h^{j-1}}, x_i) = (y_j, x_i),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 9. *Пусть* $(G, X), (H, Y)$ *— группы подстановок с циклами максимальной длины, группа* (G, X) *транзитивна, а группа* (H, Y) *абелева. Тогда* $\mathrm{d}(\Gamma(H \wr G)) \geq 4$.

Доказательство. Пусть $|X| = n$ и $W = H \wr G$. Рассмотрим таблицы $u = [f_1, g]$ и $v = [e_H, g]$, где $g = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — цикл длины n в (G, X), u — таблица вида (3), т. е. $f_1(x_1) = h$, где h — цикл максимальной длины в (H, Y), и $f_1(x) = 1_H$ при $x \neq x_1$, а $e_H(x) = 1_H$ при всех $x \in X$. Докажем, что $\rho(u, v) \geq 4$. Для этого достаточно показать, что пересечение централизаторов любых элементов u_1 и v_1 таких, что $u_1 \sim u$ и $v_1 \sim v$, лежит в центре группы W.

Согласно лемме 8 таблица u — это цикл максимальной длины в W. Тогда u перестановочна в W только со своими степенями, т. е. если $u \sim u_1$, то

$$u_1 = \left[\prod_{i=0}^{\alpha-1} f_1^{g^i}, g^\alpha \right],$$

где $\alpha = \gamma + n\delta$, $\gamma = 1, 2, \ldots, n-1$ и $\delta = 0, 1, \ldots, m-1$. Другими словами, α — это число от 1 до $nm - 1$, которое не делится нацело на n, так как в противном случае (если $n \mid \alpha$) таблица u_1 принадлежит центру сплетения (вторая компонента равна 1_G, а первая — это функция, принимающая одинаковые значения при всех $x \in X$ (см. доказательство предыдущей леммы)).

Аналогично, поскольку g — цикл максимальной длины в (G, X) и при умножении таблиц из W умножаются их соответствующие вторые компоненты, из условия $v \sim v_1$ следует, что $v_1 = [f_2, g^\beta]$, где $\beta = 1, 2, \ldots, n-1$. Более того, из равенства первых компонент таблиц vv_1 и $v_1 v$ следует, что $f_2 = f_2^g$. Последнее, согласно лемме 1, означает, что $f_2 \equiv \mathrm{const}$ — постоянная функция. Итак,

$$v_1 = [\mathrm{const}, g^\beta],$$

где $\beta = 1, 2, \ldots, n-1$.

Предположим теперь, что $u_1 \sim v_1$. Тогда из равенства первых компонент таблиц $u_1 v_1$ и $v_1 u_1$ получаем

$$\prod_{i=0}^{\alpha-1} f_1^{g^i} = \prod_{i=0}^{\alpha-1} f_1^{g^\beta g^i} \quad \text{или} \quad \prod_{i=0}^{\alpha-1} f_1^{g^i} = \prod_{i=\beta}^{\alpha+\beta-1} f_1^{g^i}.$$

Последнее равносильно равенству

$$\prod_{i=0}^{\gamma-1} f_1(x^{g^i}) = \prod_{i=\beta}^{\beta+\gamma-1} f_1(x^{g^i}), \tag{4}$$

которое должно выполняться при всех $x \in X$. Возможны два случая.

1. Если $\beta < \gamma$, то выберем x_i, удовлетворяющее условию $x_i^{g^\beta} = x_2$. Тогда в равенстве (4) слева в произведении будет один сомножитель, равный h (а именно, $f_1(x_1)$; все остальные сомножители, которых не больше чем $n-1$, равны 1_H). При этом произведение справа можно представить как $f_1(x_2) f_1(x_3) \ldots f_1(x_{\gamma+1})$, $\gamma + 1 \le n$, которое равно 1_H. Таким образом, получаем противоречие $h = 1_H$.

2. Если $\beta \ge \gamma$, то выберем x_i, удовлетворяющее условию $x_i^{g^\gamma} = x_2$. Тогда $x_i^{g^{\gamma-1}} = x_1$ и в равенстве (4) произведение слева равно h, а произведение справа снова не содержит $f_1(x_1)$. Действительно, $x_i^{g^\beta} = x_j$, где $j \ge 2$ и $j \ne i$, а $x_i^{g^{\beta+\gamma-1}} = x_1^{g^\beta} = x_{\beta+1}$, где $\beta + 1 \le n$.

Полученные противоречия показывают, что u_1 и/или v_1 должны принадлежать центру сплетения.

В качестве непосредственного следствия леммы 7 и леммы 9 получаем теорему 2.

4. Примеры оценок диаметров графов коммутативности для некоторых p-групп. Нам понадобится следующее утверждение, которое может быть легко обобщено на любое конечное число сомножителей.

Лемма 10 ([7], теорема 1.2)**.** *Пусть* $G = A \times B$. *Тогда*:

1) *если* A *и* B *неабелевы, то* $\mathrm{d}(\Gamma(G)) \le \min\{3, \mathrm{d}(\Gamma(A)), \mathrm{d}(\Gamma(B))\}$; *при этом если граф коммутативности каждой из групп имеет диаметр не меньше* 3, *то* $\mathrm{d}(\Gamma(G)) = 3$;

2) *если одна из групп, например* B, *абелева, то* $\mathrm{d}(\Gamma(G)) = \mathrm{d}(\Gamma(A))$.

4.1. Силовские p-подгруппы симметрических групп. Пусть S_{p^m} — симметрическая группа степени p^m, $m \in \mathbb{N}$. Тогда ее силовская p-подгруппа $\mathcal{P}_{p,m}$ может быть описана в терминах сплетений циклических групп простого порядка: $\mathcal{P}_{p,m} \cong \mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p \wr \ldots \wr \mathbb{Z}_p$ (m множителей). Если $n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_t p^t$, где $0 \le a_i < p$ для всех $i \in \{0, 1, \ldots, t\}$, то силовскую p-подгруппу $\mathrm{Syl}_p(S_n)$ группы S_n можно представить в виде прямого произведения базовых подгрупп:

$$\mathrm{Syl}_p(S_n) \cong \mathcal{P}_{p,1}^{a_1} \times \mathcal{P}_{p,2}^{a_2} \times \ldots \times \mathcal{P}_{p,t}^{a_t}.$$

Силовскую p-подгруппу группы S_{p^m} при $m \geq 3$ можно представить как $\mathcal{P}_{p,m} = \mathbb{Z}_p \wr \mathcal{P}_{p,m-1}$, где группа $\mathcal{P}_{p,m-1}$ импримитивна с циклом максимальной длины (см., например, [14], теорема 2.4.2, и [15], лемма 6). Следовательно, по теореме 2 получаем $\mathrm{d}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,m})) = 4$. Отсюда непосредственно следует один из результатов [12].

***Пример* 4** ([12], теорема 4). Пусть P — силовская p-подгруппа симметрической группы S_n. Тогда:

1) если $n < p^2$, то группа P абелева;
2) если $p^2 \leq n < 2p^2$, то граф $\Gamma(P)$ несвязный;
3) если $n = a_0 + a_1 p + p^k$, где $0 \leq a_0, a_1 < p$, а $k \geq 3$, то граф $\Gamma(P)$ связный с диаметром 4;
4) в остальных случаях граф $\Gamma(P)$ связный с диаметром 3.

4.2. Силовские p-подгруппы полной линейной группы над конечным полем из q элементов, $p > 2$. Пусть p — нечетное простое число и $GL_n(q)$ — полная линейная группа степени n над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов. Если $p \mid q$, то силовская p-подгруппа группы $GL_n(q)$ изоморфна унитреугольной (специальной треугольной) группе матриц. Другими словами,

$$\mathrm{Syl}_p(GL_n(q)) \cong UT_n(q) \quad \text{при} \quad p \mid q.$$

Граф коммутативности $\Gamma(UT_3(q))$ несвязный и имеет $q+1$ компоненту связности, каждая из которых — полный подграф на $q^2 - q$ вершинах (см. [12], пример 2.2). Если же $n \geq 4$, то граф $\Gamma(UT_n(q))$ связный и имеет диаметр равный 3 (см. [7], утверждение 4.1).

Если $(p,q) = 1$, $p > 2$, то силовская p-подгруппа группы $GL_n(q)$ конструируется следующим образом (подробнее см. в [16]). Пусть r определяется из уравнения $q^e - 1 = p^r m$, где $(p,m) = 1$ и q^e — наименьшая степень числа q такая, что $q^e \equiv 1 (\bmod p)$. Тогда силовская p-подгруппа группы $GL_e(q)$ изоморфна $\mathbb{Z}_{p^r}$ (циклической группе порядка p^r). Обозначим $\mathcal{Q}_{p,0} = \mathbb{Z}_{p^r}$ и $\mathcal{Q}_{p,i} = \mathbb{Z}_{p^r} \wr \mathcal{P}_{p,i}$ при $i > 0$ (здесь $\mathcal{P}_{p,i}$ обозначает силовскую p-подгруппу симметрической группы S_{p^i} — i-кратное сплетение циклических групп порядка p). Предположим, что $n = b + ea$, где $0 \leq b < e$, и $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_t p^t$, $0 \leq a_i < p$ для всех $i \in \{0, 1, \ldots, t\}$. Тогда

$$\mathrm{Syl}_p(GL_n(q)) \cong \mathcal{Q}_{p,0}^{a_0} \times \mathcal{Q}_{p,1}^{a_1} \times \mathcal{Q}_{p,2}^{a_2} \times \ldots \times \mathcal{Q}_{p,t}^{a_t}$$

— силовская p-подгруппа группы $GL_n(q)$.

В случае $(p,q) = 1$ ключевую роль играют группы $\mathcal{Q}_{p,i}$. Если $i > 1$, то по теореме 2 граф $\Gamma(\mathcal{Q}_{p,i})$ связный и имеет диаметр 4. При этом граф коммутативности группы $\mathcal{Q}_{p,1} = \mathbb{Z}_{p^r} \wr \mathbb{Z}_p$ является несвязным (лемма 4).

***Пример* 5.** Пусть $(p,q) = 1$, параметры r, b, a определены так, как описано выше, и $P = \mathrm{Syl}_p(GL_n(q))$. Тогда:

1) если $a < p$, то группа P абелева;
2) если $a = a_0 + p$, где $0 \leq a_0 < p$, то граф $\Gamma(P)$ несвязный;
3) если $a = a_0 + p^k$, где $0 \leq a_0 < p$, $k \geq 2$, то граф $\Gamma(P)$ связный с диаметром 4;
4) в остальных случаях граф $\Gamma(P)$ связный с диаметром 3.

Доказательство. 1. Если $a < p$, то $P \cong \mathcal{Q}_{p,0}^{a_0}$ — абелева группа.

2. Если $a = a_0 + p$, где $0 \leq a_0 < p$, то $P \cong \mathcal{Q}_{p,0}^{a_0} \times \mathcal{Q}_{p,1}$. Тогда по лемме 10 получаем $\mathrm{d}(\Gamma(P)) = \mathrm{d}(\Gamma(\mathcal{Q}_{p,0}^{a_0} \times \mathcal{Q}_{p,1})) = \mathrm{d}(\Gamma(\mathcal{Q}_{p,1})) = \infty$ — граф не связный.

3. Если $a = a_0 + p^k$, где $0 \leq a_0 < p$, $k \geq 2$, то $P \cong \mathcal{Q}_{p,0}^{a_0} \times \mathcal{Q}_{p,k}$ и, аналогично предыдущему пункту, $\mathrm{d}(\Gamma(P)) = \mathrm{d}(\Gamma(\mathcal{Q}_{p,k})) = 4$.

4. В остальных случаях в разложении P на прямое произведение хотя бы два сомножителя будут неабелевыми с диаметром соответствующего графа коммутативности не меньше 4. Применяя лемму 10, получаем нужный результат.

Аналогичную классификацию касательно диаметров графов коммутативности можно получить и в случае, когда $p = 2$.

1. *Iranmanesh A., Jafarzadeh A.* On the commuting graph associated with the symmetric and alternating groups // J. Algebra and Appl. – 2008. – **7**, № 1. – P. 129 – 146.
2. *Giudici M., Parker C.* There is no upper bound for the diameter of the commuting graph of a finite group [электронный ресурс] / http://arxiv.org/abs/1210.0348v1.
3. *Akbari S., Mohammadian A., Radjavi H., Raja P.* On the diameters of commuting graphs // Linear Algebra and Appl. – 2006. – **418**, № 1. – P. 161 – 176.
4. *Могхаддамфар А. Р.* О графах некоммутативности // Сиб. мат. журн. – 2006. – **47**, № 5. – С. 1112 – 1116.
5. *Abdollahi A., Akbari S., Dorbidi H., Shahverdi H.* Commutativity pattern of finite non-abelian p-groups determine their orders // Communs Algebra. – 2013. – **41**, № 2. – P. 451 – 461.
6. *Morgan G. L., Parker C. W.* The diameter of the commuting graph of a finite group with trivial centre [электронный ресурс] / Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1301.2341v1.
7. *Guidici M., Pope A.* On bounding the diameter of the commuting graph of a group [электронный ресурс] / http://arxiv.org/abs/1206.3731.
8. *Kaloujnine L.* La structure des p-groupes de Sylow des groupes symetriques finis // Ann. sci. Ecole norm. supér. – 1948. – **65**. – P. 239 – 276.
9. *Олийнык А. С., Сущанский В. И.* Группы ZC-автоматных преобразований // Сиб. мат. журн. – 2010. – **51**, № 5. – С. 1102 – 1119.
10. *Neumann P. M.* On the structure of standard wreath products of groups // Math. Z. – 1964. – **84**. – S. 343 – 373.
11. *Isaacs I. M.* Finite group theory // Grad. Stud. Math. – Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 2008. – **92**. – 350 p.
12. *Лещенко Ю. Ю., Зоря Л. В.* Оценки диаметров графов коммутативности силовских p-подгрупп симметрических групп // Карпат. мат. публ. – 2013. – **5**, № 1. – С. 70 – 78.
13. *The GAP group,* GAP — groups, algorithms, and programming, Version 4.6.3; 2013 / http://www.gap-system.org.
14. *Сущанський В. І., Сікора В. С.* Операції на групах підстановок. Теорія та застосування. – Чернівці: Рута, 2003. – 256 с.
15. *Slupik A. J., Sushchansky V. I.* Minimal generating sets and Cayley graphs of Sylow p-subgroups of finite symmetric groups // Algebra and Discrete Math. – 2009. – **4**. – P. 167 – 184.
16. *Weir A. J.* Sylow p-subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to p // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – **6**, № 4. – P. 529 – 533.

Получено 25.06.13,
после доработки — 14.11.13