УДК 517.9

Ю. Б. Зелинский, Б. А. Клищук, М. В. Ткачук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРЕМЫ О ВКЛЮЧЕНИИ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ*

The paper is devoted to the investigation of some properties of multivalued mappings in Euclidean spaces. Theorems on fixed point were proved for multivalued mappings whose restrictions to a certain subset in the closure of the domain satisfy a "coacute angle condition" or a "strict coacute angle condition". Similar results for the restrictions of multivalued mappings satisfying certain metric restrictions were also obtained.

Вивчаються деякі властивості багатозначних відображень в евклідовому просторі. Доведено теореми про нерухому точку для багатозначних відображень, звуження яких на деяку підмножину в замиканні області задовольняють „умову когострого кута" або „умову строгого когострого кута". Подібні результати отримано і для звужень багатозначних відображень, які задовольняють деякі метричні обмеження.

1. Введение. В настоящей работе мы продолжаем исследование многозначных включений, начатое в [1] и основанное на использовании геометрической формы теоремы Хана – Банаха. Мы избавляемся от условия содержания искомой областью начала координат, рассматриваем отображения не только в то же пространство, но и в другое, а также уменьшаем размеры множества, на котором справедливы „ограничения типа острого угла" [2 – 5].

2. Обозначения и основные определения. Пусть E^n — n-мерное евклидово (действительное или комплексное) пространство, x, y — некоторые точки E^n, A, B — подмножества E^n, $\langle *, * \rangle$ — скалярное произведение в E^n, $\operatorname{conv} A$ — выпуклая оболочка множества A, $\angle xOy = \arccos \dfrac{\operatorname{Re}\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}}$.

Далее будем рассматривать многозначные (в том числе однозначные и разрывные) отображения подмножеств евклидового пространства.

Пусть X и Y — топологические пространства. Если $F_1, F_2\colon\ X \to Y$ — два многозначных отображения, то будем говорить, что F_2 есть сужение отображения F_1, если $F_1(x) \supset F_2(x)$ для всех точек $x \in X$ (в частности, если $A \supset B$ и $F_1\colon A \to Y$, $F_2\colon B \to Y$ — два отображения, то отображение F_2 является сужением отображения F_1 на B, если $F_1(x) = F_2(x)$ при $x \in B$ и $F_2(x) = \varnothing$ при $x \notin B$, т. е. не исключено, что для отдельных точек образы сужения — пустые множества).

3. „Условие коострого угла". Пусть Y^* — дуальное (сопряженное) пространство к пространству Y [6]. Будем говорить, что отображение $F\colon A \to Y$ $(A \subset X)$ удовлетворяет „условию коострого угла" на A, если для каждой точки $y^* \in Y^*$, $y^* \neq 0$, существует точка $x \in A$ такая, что выполнено условие $\operatorname{Re}\langle y, y^*\rangle \geq 0$ для всех точек $y \in F(x)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть D — область евклидова пространства $E^n = X$, $K \subset \overline{D}$ — подмножество в замыкании этой области, существует такое сужение F_1 многозначного отображения $F\colon \overline{D} \to E^n = Y$ на подмножество K, которое удовлетворяет „условию коострого угла", и $\operatorname{conv} F_1(K)$ — компакт. Тогда если $\operatorname{conv} F_1(K) \subset F(\overline{D})$, то $0 \in F(\overline{D})$.*

Доказательство. Предположим, что $0 \notin F(\overline{D})$. Следовательно, $0 \notin \operatorname{conv} F_1(K)$. Тогда согласно геометрической форме теоремы Хана – Банаха существует гиперплоскость L, которая отделяет начало координат от компактного выпуклого множества $\operatorname{conv} F_1(K)$. Выберем луч l,

* Частично поддержана грантом Тюбитек-НАН Украины (№ 110T558).

© Ю. Б. ЗЕЛИНСКИЙ, Б. А. КЛИЩУК, М. В. ТКАЧУК, 2014

выходящий из начала координат перпендикулярно к гиперплоскости L и направленный в сторону, противоположную $\operatorname{conv} F_1(K)$. Для евклидовых пространств отображение двойственности $\mathfrak{F}\colon Y \to Y^*$ биективно. Выберем произвольную точку y^*, отличную от начала координат, на луче l. С одной стороны, по построению $y^* \notin \operatorname{conv} F_1(K)$, а с другой — согласно „условию коострого угла”, существует точка $x \in K$, образ $F_1(x)$ которой должен находиться в том же полупространстве по отношению к гиперплоскости L, что и точка y^*. Полученное противоречие доказывает теорему.

4. „Условие строгого коострого угла”. Отображение $F\colon A \to Y$ $(A \subset X)$ удовлетворяет „условию строгого коострого угла” на A, если для каждой точки $y^* \in Y^*$, $y^* \neq 0$, существует точка $x \in A$ такая, что выполнено условие $\operatorname{Re}\langle y, y^*\rangle > 0$ для всех точек $y \in F(x)$.

Используя рассуждения, примененные при доказательстве предыдущей теоремы, а также при доказательстве теоремы 2 [1], получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть D — область евклидова пространства $E^n = X$, $K \subset \overline{D}$ — подмножество в замыкании этой области и существует такое сужение F_1 многозначного отображения $F\colon \overline{D} \to E^n = Y$ на подмножество K, которое удовлетворяет „условию строгого коострого угла”. Тогда если $\operatorname{conv} F_1(K) \subset F(\overline{D})$, то $0 \in F(\overline{D})$.*

Доказательство. Предположим, что $0 \notin F(\overline{D})$ и, следовательно, $0 \notin \operatorname{conv} F_1(K)$. Внутренность $\operatorname{Int}(\operatorname{conv} F_1(K))$ будет выпуклым открытым множеством, не содержащим начало координат. Если $\operatorname{Int}(\operatorname{conv} F_1(K)) = \varnothing$, то множество $\operatorname{conv} F_1(K)$ имеет размерность не выше $n-1$ и поэтому полностью лежит в некоторой гиперплоскости, так как размерность выпуклого множества совпадает с размерностью его аффинной оболочки [7, с. 29]. Следовательно, существует гиперплоскость L, которая проходит через начало координат и либо полностью содержит множество $\operatorname{conv} F_1(K)$, либо же с ним не пересекается. Если же $\operatorname{Int}(\operatorname{conv} F_1(K)) \neq \varnothing$, то существует гиперплоскость L, которая проходит через начало координат и не пересекает множество $\operatorname{Int}(\operatorname{conv} F_1(K))$. Для произвольного выпуклого множества A с непустой внутренностью ($\operatorname{Int} A \neq \varnothing$) справедливо $\overline{\operatorname{Int} A} = \overline{A}$. Следовательно, в обоих случаях множество $\operatorname{conv} F_1(K)$ полностью лежит в одном из замкнутых полупространств, на которые плоскость L разбивает пространство. Теперь можно выбрать луч l, выходящий из начала координат перпендикулярно к гиперплоскости L и направленный в сторону, противоположную полупространству, содержащему множество $\operatorname{conv} F_1(K)$. Выберем произвольную точку $y^* \in l$, отличную от начала координат, на этом луче. С одной стороны, $y^* \notin \operatorname{conv} F_1(K)$, а с другой — согласно „условию строгого коострого угла”, существует точка $x \in K$, образ $F_1(x)$ которой должен находиться в том же полупространстве по отношению к гиперплоскости L, что и точка y^*. Полученное противоречие доказывает теорему.

5. „ε-Условие острого угла”. Зададимся целью уменьшить размеры множества, на котором выполнены „условия типа острого угла”, за счет более строгих неравенств.

Скажем, что множество A является радианной (угловой) ε-сетью, если для каждого луча, выходящего из начала координат, существует луч, образующий с ним угол радианной величины меньше ε и пересекающий A.

Будем говорить, что на множестве A отображение F удовлетворяет „ε-условию острого угла”, если $X = Y$ и для произвольной точки $x \in A$ существует точка $y \in F(x)$ такая, что выполняется условие $\angle xOy < \pi/2 - \varepsilon$.

Теорема 3. *Пусть D — область евклидова пространства $E^n = X$, $K \subset \overline{D}$ — подмножество в замыкании этой области, являющееся радианной ε-сетью, и существует сужение F_1*

многозначного отображения $F\colon \overline{D} \to E^n = X$ *на подмножество* K, *которое удовлетворяет „*ε*-условию острого угла". Тогда если* $\operatorname{conv} F_1(K) \subset F(\overline{D})$, *то* $0 \in F(\overline{D})$.

Доказательство. Предположим, что $0 \notin F(\overline{D})$. Как и при доказательстве теоремы 2, найдем гиперплоскость L, которая проходит через начало координат и которая или полностью содержит множество $\operatorname{conv} F_1(K)$, или же с ним не пересекается. Выберем луч l, выходящий из начала координат перпендикулярно к гиперплоскости L и направленный в сторону, противоположную полупространству, содержащему множество $\operatorname{conv} F_1(K)$. По условию найдется луч l_1 такой, что $\angle lOl_1 < \varepsilon$. Согласно „$\varepsilon$-условию острого угла" найдется на луче l_1 точка $x_1 \in l_1 \cap K$ такая, что угол $\angle x_1Oy < \pi/2 - \varepsilon$ для всех точек $y \in F_1(x_1)$. С одной стороны, множество $F_1(x_1) \subset F_1(K) \subset \operatorname{conv} F_1(K)$, а с другой — $\angle lOy = \angle x_1Oy + \angle lOl_1 < \pi/2 - \varepsilon + \varepsilon = \pi/2$. Полученное противоречие доказывает теорему.

6. „δ-Условие коострого угла". Скажем, что отображение F удовлетворяет „δ-условию коострого угла", если для каждой точки y^* некоторой ε-сети Σ на единичной сфере $S^* = \{y^* \in \in Y^*\colon \|y^*\| = 1\}$ в Y^* существует точка $x \in X$ такая, что выполнено условие $\operatorname{Re}\langle y, y^*\rangle > \delta\|y\|$ для всех точек $y \in F(x)$.

Теорема 4. *Пусть D — область евклидова пространства $E^n = X$, $K \subset \overline{D}$ — подмножество в замыкании этой области и существует такое сужение F_1 многозначного отображения $F\colon \overline{D} \to E^n = Y$ на подмножество K, которое удовлетворяет „δ-условию коострого угла" для некоторой $\dfrac{\varepsilon}{2}$-сети Σ в S^* такой, что $\delta > \sin\delta > \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда если* $\operatorname{conv} F_1(K) \subset F(\overline{D})$, *то* $0 \in F(\overline{D})$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $y_1^* \in S^* \subset Y^*$. Согласно условию теоремы, существуют точки $y^* \in \Sigma \subset S^* \subset Y^*$, $\|y^* - y_1^*\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, и $x \in X$ такие, что выполнено условие $\operatorname{Re}\langle y, y^*\rangle = \|y\|\,\|y^*\|\cos\angle yOy^* = \|y\|\cos\angle yOy^* > \delta\|y\| > \|y\|\sin\,\delta > \dfrac{\varepsilon\|y\|}{2}$ для всех точек $y \in F_1(x)$. Тогда $\operatorname{Re}\left\langle \dfrac{y}{\|y\|}, y_1^*\right\rangle = \operatorname{Re}\left\langle \dfrac{y}{\|y\|}, y^*\right\rangle + \operatorname{Re}\left\langle \dfrac{y}{\|y\|}, y_1^* - y^*\right\rangle > \dfrac{\varepsilon}{2} - \|y_1^* - y^*\| > 0$. Теперь данный результат следует из теоремы 2.

***Замечания.* 1.** Все предыдущие результаты будут справедливы, если отображение области имеет сужение, удовлетворяющее условиям теоремы.

2. Другие теоремы о включении, основанные на использовании степени отображения, можно найти в [8].

Авторы признательны профессору К. Н. Солтанову за обсуждение результатов и ценные замечания.

1. *Зелинский Ю. Б., Клищук Б. А., Ткачук М. В.* Теоремы о неподвижной точке для многозначных отображений // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 175 – 179.
2. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 с.
3. *Солтанов К. Н.* О нелинейных отображениях и разрешимости нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. – 1986. – **289**, № 6. – С. 1318 – 1323.
4. *Soltanov K. N.* Remarks on separation of convex sets, fixed-point theorem and applications in theory of linear operators // Fixed Point Theory and Appl. – 2007. – 14 p.
5. *Soltanov K. N.* On semi-continuous mappings, equations and inclusions in the Banach space // Hacettepe J. Math. Statist. – 2008. – **37**. – P. 9 – 24.
6. *Муратов М. А., Островский В. Л., Самойленко Ю. С.* Конечномерный линейный анализ. I. Линейные операторы в конечномерных векторных пространствах (L). – Киев: Центр учеб. лит., 2011. – 150 с.
7. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 471 с.
8. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 264 с.

Получено 17.09.13