УДК 517.5

Н. В. Дерев'янко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ ЛІНІЙНИХ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ L_q

The exact-order estimates of linear widths of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q are established under certain relations imposed on the parameters p and q.

Получены точные по порядку оценки линейных поперечников классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q для некоторых соотношений между параметрами p и q.

Вступ. У даній роботі знайдено точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q. Більш детально про ці величини мова буде йти пізніше, а спочатку наведемо необхідні позначення та означення.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — d-вимірний евклідів простір з елементами $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_d)$, $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$ і $L_p(\pi_d)$ — простір 2π-періодичних за кожною змінною і сумовних у степені p, $1 \leq p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$), на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[0, 2\pi]$ функцій $f(\mathrm{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$, норма в якому визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \big|f(\mathrm{x})\big|^p d\mathrm{x}\right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{x}\in\pi_d} \big|f(\mathrm{x})\big|.$$

Далі для зручності позначень замість $L_p(\pi_d)$ будемо писати L_p.

Для $f \in L_p$ і $\mathrm{h} \in \mathbb{R}^d$ покладемо

$$\Delta_{\mathrm{h}} f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x} + \mathrm{h}) - f(\mathrm{x})$$

і означимо за формулою

$$\Delta^l_{\mathrm{h}} f(\mathrm{x}) = \Delta_{\mathrm{h}} \Delta^{l-1}_{\mathrm{h}} f(\mathrm{x}), \qquad \Delta^0_{\mathrm{h}} f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}),$$

кратну різницю порядку $l \in \mathbb{N}$ функції f у точці $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ з кроком h, яку також можна подати у вигляді

$$\Delta^l_{\mathrm{h}} f(\mathrm{x}) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l+n} C^n_l f(\mathrm{x} + n\mathrm{h}).$$

Означимо модуль неперервності порядку $l \in \mathbb{N}$ функції $f \in L_p$ згідно з формулою

$$\Omega_l(f; t)_p = \sup_{|\mathrm{h}| \leq t} \big\|\Delta^l_{\mathrm{h}} f(\cdot)\big\|_p,$$

де $|\mathrm{h}|$ — евклідова норма h.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l, тобто $\Omega(t)$ задана на $\mathbb{R}_+ = \{t \colon t \geq 0\}$ і задовольняє такі умови:

1) $\Omega(0) = 0$, $\Omega(t) > 0$ для $t > 0$;

2) $\Omega(t)$ є неперервною;

3) $\Omega(t)$ не спадає;

4) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ $\Omega(nt) \le C_1 n^l \Omega(t)$, де $l \in \mathbb{N}$, стала $C_1 > 0$ не залежить від n і t.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l. Зауважимо, що якщо $f \in L_p$, то $\Omega_l(f,t)_p \in \Psi_l$.

Також будемо вважати, що Ω належить множинам S^α і S_l. Це означає наступне:

I. $\Omega \in S^\alpha$, $\alpha > 0$, якщо функція $\Omega(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_2 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2.$$

II. $\Omega \in S_l$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що функція $\Omega(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_3 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \ge C_3 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2.$$

Умови належності функції Ω до множин S^α і S_l називають умовами Барі – Стєчкіна [1].

Покладемо також $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

Для наочності наведемо приклад функції $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$:

$$\Omega(t) = \begin{cases} t^r \left(\log^+\left(\frac{1}{t}\right)\right)^b, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

де $\log^+(\tau) = \max\{1, \log(\tau)\}$, $\alpha < r < l$, а b — фіксоване дійсне число.

Тепер перейдемо безпосередньо до означення просторів $B^\Omega_{p,\theta}$ (див., наприклад, [2]).

Нехай $1 \le p, \theta \le \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$. Будемо вважати, що $f \in B^\Omega_{p,\theta}$, якщо f задовольняє такі умови:

1) $f \in L_p$;

2) $|f|_{B^\Omega_{p,\theta}} < \infty$,

де напівнорма $|f|_{B^\Omega_{p,\theta}}$ визначається співвідношенням

$$|f|_{B^\Omega_{p,\theta}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простір $B^\Omega_{p,\theta}$ є лінійним нормованим з нормою

$$\|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{B^\Omega_{p,\theta}} .$$

Якщо $\Omega(t) = t^r$, то простори $B^\Omega_{p,\theta}$ збігаються з просторами О. В. Бєсова $B^r_{p,\theta}$ [3] і, зокрема, при $\theta = \infty$ отримаємо $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, де H^r_p — простори, введені С. М. Нікольським [4]. Якщо

$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1$, то будемо говорити, що функція f належить класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$, зберігаючи при цьому для класів ті ж самі позначення, що і для відповідних просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Зауважимо, що для класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ при $1 < \theta < \theta' < \infty$ мають місце вкладення

$$B^{\Omega}_{p,1} \subset B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta'} \subset B^{\Omega}_{p,\infty} \equiv H^{\Omega}_{p}. \tag{1}$$

Далі будемо вважати, що для двох невід'ємних величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існує стала $C_4 > 0$ така, що $C_4^{-1}A \le B \le C_4 A$. Запис $A \ll B$ ($A \gg B$) означає, що $C_4^{-1}A \le B$ ($B \le C_4 A$). Всі сталі C_i, $i \in \mathbb{N}$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Далі нам зручно буде користуватися означенням класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в дещо іншому вигляді.

Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt.$$

Багатовимірне ядро $V_m(\mathrm{x})$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$, означимо за формулою

$$V_m(\mathrm{x}) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Для функції $f \in L_p$ розглянемо оператор згортки $\mathbf{V}_m$ цієї функції з ядром V_m, тобто

$$\mathbf{V}_m f = f * V_m = \mathrm{V}_m(f,\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Таким чином, $V_m(f,\mathrm{x})$ — кратна сума Валле Пуссена функції f. Покладемо для $f \in L_p$

$$\sigma_0(f,\mathrm{x}) = V_1(f,\mathrm{x}), \qquad \sigma_s(f,\mathrm{x}) = V_{2^s}(f,\mathrm{x}) - V_{2^{s-1}}(f,\mathrm{x}), \qquad s \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d.$$

В наведених позначеннях при $1 \le p \le \infty$ (з точністю до абсолютних сталих) класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна означити таким чином (див., наприклад, [2]): $B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p \colon \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\}$, де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \left(\dfrac{\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s \in \mathbb{Z}_+} \dfrac{\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Варто зазначити, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентне співвідношення для норм функцій із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, використовуючи в (2) замість $\sigma_s(f,\mathrm{x})$ двійкові „блоки" ряду Фур'є функції f.

Наведемо далі означення апроксимативних характеристик, які будуть нами досліджуватись.

Нехай W — центрально-симетрична множина у банаховому просторі $\mathcal{X}$. Тоді лінійний поперечник множини W у просторі $\mathcal{X}$ означується згідно з формулою

$$\lambda_m(W,\ \mathcal{X}) = \inf_{A} \sup_{x \in W} \|x - Ax\|_{\mathcal{X}},$$

де інфімум береться по всіх діючих в $\mathcal{X}$ лінійних операторах A, розмірність області значень яких не перевищує m. Поняття лінійного поперечника ввів В. М. Тихомиров [5]. З історією дослідження лінійних поперечників тих або інших класів функцій багатьох змінних можна ознайомитися у роботах [6 – 10], в яких наведено також детальну бібліографію.

При одержанні оцінок знизу лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ будемо використовувати відомі оцінки їх колмогоровських поперечників. Нагадаємо, що колмогоровським поперечником центрально-симетричної множини W банахового простору $\mathcal{X}$ називається величина [11]

$$d_m(W,\ \mathcal{X}) = \inf_{L_m} \sup_{f\in W} \inf_{u\in L_m} \|f-u\|_{\mathcal{X}},$$

де L_m — підпростір розмірності не більшої ніж m простору $\mathcal{X}$.

Легко бачити, що згідно з означеннями лінійного і колмогоровського поперечників для них має місце нерівність

$$d_m(W,\ \mathcal{X}) \le \lambda_m(W,\ \mathcal{X}). \tag{3}$$

1. Допоміжні твердження. При доведенні основних результатів нам знадобляться деякі відомі твердження, які ми будемо формулювати згідно з уведеними позначеннями.

Нехай l^m_p позначає простір всеможливих упорядкованих систем з m дійсних чисел, норма в якому визначається таким чином:

$$\|x\|_{l^m_p} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}, & 1\le p<\infty,\\ \max\limits_{1\le i\le m} |x_i|, & p=\infty, \end{cases}$$

і B^m_p — одинична куля в цьому просторі.

Теорема А [12]. *Нехай* $m<M$, $1\le p<2\le q<\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\ge 1$. *Тоді*

$$\lambda_m\left(B^M_p,\ l^M_q\right) \asymp \max\left\{M^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \min\left\{1, M^{1/q}m^{-\frac{1}{2}}\right\}\sqrt{1-\frac{m}{M}}\right\}.$$

Зауважимо, що у випадку $p=1$, $q>2$ відповідний результат випливає із твердження про колмогоровський поперечник октаедра B^M_1 у просторі l^M_q, встановленого Б. С. Кашиним [13].

Для $s\in\mathbb{N}$ через $\rho(s)$ позначимо підмножину цілочислової решітки $\mathbb{Z}^d$ вигляду

$$\rho(s) = \left\{\mathrm{k}=(k_1,\ldots,k_d)\colon 2^{s-1}\le |k_j| < 2^s,\ j=\overline{1,d}\right\}.$$

Для $f\in L_1$ покладемо

$$\delta_s(f,\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{k}\in\rho(s)} \widehat{f}(\mathrm{k})e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})},$$

де $\widehat{f}(\mathrm{k}) = (2\pi)^{-d}\displaystyle\int_{\pi_d} f(\mathrm{t})e^{-i(\mathrm{k},\mathrm{t})}d\mathrm{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Через $\mathcal{T}(\rho(s))$ позначимо множину функцій f вигляду

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{k}\in\rho(s)} c_{\mathrm{k}}e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})}.$$

Теорема Б. *Між простором тригонометричних поліномів* $f \in \mathcal{T}\big(\rho(s)\big)$ *і простором* $\mathbb{R}^{2^{sd}}$ *існує ізоморфізм, який ставить у відповідність функції* f *вектор* $\delta_s f^j = \big\{f_{\mathrm{n}}(\tau_j)\big\} \in \mathbb{R}^{2^{sd}}$,

$$f_{\mathrm{n}}(\mathrm{t}) = \sum_{sgnk_l = n_l} c_{\mathrm{k}} e^{i(\mathrm{k},\mathrm{t})}, \qquad l = \overline{1,d}, \quad \mathrm{n} = (\pm 1, \ldots, \pm 1) \in \mathbb{R}^d,$$

$$\tau_j = \pi 2^{2-s}(j_1, \ldots, j_d), \qquad j_i = 1, 2, \ldots, 2^{s-1}, \quad i = \overline{1,d},$$

і при цьому має місце співвідношення

$$\big\|f(\cdot)\big\|_p \asymp 2^{-sd/p} \|\delta_s f^j\|_{l_p^{2^{sd}}}, \quad p \in (1, \infty).$$

Дана теорема доводиться аналогічно теоремі Марцинкевича – Зигмунда про дискретизацію для функції однієї змінної [14, с. 46]. У випадку функцій багатьох змінних і для $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_d)$ цю теорему наведено у роботі [15].

Теорема В (Літтлвуда – Пелі [16]). *Нехай* $f \in L_p$, $1 < p < \infty$. *Тоді існують додатні сталі* C_5 *і* C_6 *такі, що*

$$C_5 \|f\|_p \le \left\| \left(\sum_{s=0}^{\infty} \big|\delta_s(f, \cdot)\big|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le C_6 \|f\|_p.$$

Як наслідок з означення лінійного поперечника, теореми Б і теореми Літтлвуда – Пелі легко отримати наступне твердження.

Лема А. *Нехай* $s \in \mathbb{N}$ *і* $f \in \mathcal{T}\big(\rho(s)\big)$, $m_s \in \mathbb{Z}_+$, $m_s \le 2^{sd}$. *Якщо* $1 < p$, $q < \infty$, *то існує лінійний оператор* $\Lambda_{m_s} \colon \mathcal{T}\big(\rho(s)\big) \to \mathcal{T}\big(\rho(s)\big)$, *розмірність області значень якого не перевищує* m_s, *такий, що*

$$\|f - \Lambda_{m_s} f\|_q \asymp \lambda_{m_s}\big(B_p^{2^{sd}}, l_q^{2^{sd}}\big) 2^{sd(1/p - 1/q)} \|f\|_p. \tag{4}$$

Зауважимо, що аналогічне твердження у випадку $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, наведено у роботі [6].

Лема Б. *Нехай* $1 \le p < q < \infty$ *і* $f \in L_p$. *Тоді має місце співвідношення*

$$\|f\|_q^q \ll \sum_s \Big(\|\delta_s(f, \cdot)\|_p 2^{sd(1/p - 1/q)} \Big)^q.$$

Ця лема доводиться за допомогою елементарної модифікації міркувань, які використовував В. М. Темляков (див. [17, с. 25]) при встановленні відповідної леми у випадку $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_d)$.

Теорема Г [4]. *Нехай* $n_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, *і*

$$t(\mathrm{x}) = \sum_{|k_j| \le n_j} c_{\mathrm{k}} e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})}.$$

Тоді при $1 \le q < p \le \infty$ *виконується нерівність*

$$\|t\|_p \le 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{1/q - 1/p} \|t\|_q. \tag{5}$$

Нерівність (5) доведена С. М. Нікольським і має назву „нерівності різних метрик”. У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність встановив Джексон [18].

2. Основні результати. Перейдемо до формулювання і доведення отриманих результатів.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p < 2 \le q < p'$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > d/p$. *Тоді має місце оцінка*

$$\lambda_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \Omega(m^{-1/d}) m^{1/p-1/2}, \tag{6}$$

де $1/p + 1/p' = 1$.

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху величини $\lambda_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$. Зауважимо, що згідно з вкладеннями (1) її достатньо встановити для класу H^{Ω}_p. Розглянемо випадок $1 < p < 2 \le q < p'$.

Для довільного $m \in \mathbb{N}$ будемо підбирати $n \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувалось співвідношення $m \asymp 2^{nd}$. Кожному $s \in \mathbb{Z}_+$ поставимо у відповідність числа

$$m_s = \begin{cases} 2^{sd}, & 0 \le s \le n, \\ \left[2^{nd+\beta(nd-sd)}\right], & s > n, \end{cases}$$

де $\beta > 0$ — деяке число, яке буде підібрано нижче, і $[a]$ — ціла частина числа a.

Оцінимо $\sum_s m_s$:

$$\sum_s m_s \le \sum_{s=0}^{n} 2^{sd} + \sum_{s>n} 2^{nd+\beta(nd-sd)} \ll$$

$$\ll 2^{nd} + 2^{nd+\beta nd} \sum_{s>n} 2^{-\beta sd} \ll 2^{nd} + 2^{nd} \asymp 2^{nd} \asymp m.$$

Отже, нехай f — довільна функція з класу H^{Ω}_p. Розглянемо лінійний оператор Λ_m рангу m, який діє на f за формулою

$$\Lambda_m f(\mathrm{x}) = \sum_s \Lambda_{m_s} \delta_s(f, \mathrm{x}),$$

де Λ_{m_s} — оператори, побудовані відповідно до леми А.

Оцінимо $\|f(\cdot) - \Lambda_m f(\cdot)\|_q$. Використавши послідовно теорему Літтлвуда – Пелі, нерівність Мінковського і співвідношення (4), отримаємо

$$\left\| f(\cdot) - \Lambda_m f(\cdot) \right\|_q \ll \left\| \left(\sum_{s>n} \left| \delta_s(f,\cdot) - \Lambda_{m_s}\delta_s(f,\cdot) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q =$$

$$= \left(\left\| \sum_{s>n} \left| \delta_s(f,\cdot) - \Lambda_{m_s}\delta_s(f,\cdot) \right|^2 \right\|_{q/2} \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{s>n} \left\| \delta_s(f,\cdot) - \Lambda_{m_s}\delta_s(f,\cdot) \right\|_q^2 \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{s>n} \lambda^2_{m_s}\left(B^{2^{sd}}_p, l^{2^{sd}}_q\right) 2^{2sd(1/p-1/q)} \left\| \delta_s(f,\cdot) \right\|_p^2 \right)^{1/2} = \mathcal{I}_1.$$

Оскільки згідно з теоремою A

$$\lambda_{m_s}\left(B_p^{2^{sd}}, l_q^{2^{sd}}\right) \asymp \max\left\{2^{sd(1/q-1/p)}, \min\left\{1, 2^{sd/q} m_s^{-1/2}\right\}\sqrt{1-\frac{m_s}{2^{sd}}}\right\} \ll$$

$$\ll \max\left\{2^{sd(1/q-1/p)}, 2^{sd/q} m_s^{-1/2}\sqrt{1-\frac{m_s}{2^{sd}}}\right\} \ll 2^{sd/q} m_s^{-1/2},$$

то продовжимо оцінку $\mathcal{I}_1$ таким чином:

$$\mathcal{I}_1 \ll \left(\sum_{s>n} 2^{2sd/q} m_s^{-1} 2^{2sd(1/p-1/q)} \left\|\delta_s(f,\cdot)\right\|_p^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{s>n} 2^{2sd/p} m_s^{-1} \left\|\delta_s(f,\cdot)\right\|_p^2\right)^{1/2} = \mathcal{I}_2.$$

Підставивши в $\mathcal{I}_2$ замість m_s їхні значення і врахувавши, що для функції $f \in H_p^{\Omega}$ виконується нерівність

$$\left\|\delta_s(f,\cdot)\right\|_p \ll \Omega(2^{-s}),$$

одержимо

$$\mathcal{I}_2 \ll \left(\sum_{s>n} 2^{2sd/p} 2^{-nd-\beta(nd-sd)} \Omega^2(2^{-s})\right)^{1/2} =$$

$$= 2^{-nd/2-\beta nd/2}\left(\sum_{s>n} 2^{2sd/p} 2^{\beta sd} \frac{\Omega^2(2^{-s})}{2^{-2\alpha s}} 2^{-2\alpha s}\right)^{1/2}.$$

Далі, взявши до уваги, що $\Omega \in S^{\alpha}$, $\alpha > d/p$, продовжимо оцінку величини $\mathcal{I}_2$:

$$\mathcal{I}_2 \ll 2^{-nd/2-\beta nd/2} \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{s>n} 2^{2sd(1/p+\beta/2-\alpha/d)}\right)^{1/2} = \mathcal{I}_3.$$

Підібравши $\beta > 0$ з умови $1/p + \beta/2 - \alpha/d < 0$ (це можливо зробити тому, що $\alpha > d/p$), отримаємо

$$\mathcal{I}_3 \ll 2^{-nd/2-\beta nd/2} \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{nd(1/p+\beta/2-\alpha/d)} =$$

$$= \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1/2)} \asymp \Omega(m^{-1/d}) m^{1/p-1/2}.$$

Таким чином, оцінку зверху для $\lambda_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ у випадку $1 < p < 2 \le q < p'$ встановлено.

Нехай тепер $p = 1$, $2 \le q < \infty$. В цьому випадку необхідно повторити міркування, які використовувались у роботі [19] для встановлення оцінки зверху тригонометричного поперечника $d_m^T(H_1^{\Omega}, L_q)$, $2 \le q < \infty$.

Оцінку знизу отримаємо з нерівності (3) і відомих оцінок для колмогоровських поперечників $d_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ [20].

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** У випадку $d = 1$ і при $1 < p < 2 \leq q < p'$, $1 \leq \theta \leq \infty$ та $p = 1$, $2 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ (тут $\alpha > 1$) теорему 1 встановлено у роботах [21] та [22] відповідно.

Теорема 2. *Нехай* $1 < p \leq 2$, $p' < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > d(1 - 1/q)$. *Тоді*

$$\lambda_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \Omega(m^{-1/d}) m^{1/2 - 1/q}, \tag{7}$$

де $1/p + 1/p' = 1$.

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху величини $\lambda_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$. Як і за умов попередньої теореми, її достатньо встановити для величини $\lambda_m(H^{\Omega}_p, L_q)$.

Нехай $m \in \mathbb{N}$ і $n \in \mathbb{N}$ такі, що $m \asymp 2^{nd}$. Далі будемо вважати, що числа m_s, $s \in \mathbb{Z}_+$, і оператори Λ_m і Λ_{m_s} мають той же сенс, що і в теоремі 1.

Оцінимо $\|f - \Lambda_m f\|_q$. Оскільки за умовою теореми $2 \leq p' < q < \infty$, то згідно з лемою Б будемо мати

$$\|f\|_q^q \ll \sum_s \left(\big\|\delta_s(f, \cdot)\big\|_{p'} 2^{sd(1/p' - 1/q)} \right)^q.$$

Враховуючи це співвідношення, можемо записати

$$\Big\| f(\cdot) - \Lambda_m f(\cdot) \Big\|_q \ll \left\| \sum_{s > n} \Big(\delta_s(f, \cdot) - \Lambda_{m_s} \delta_s(f, \cdot) \Big) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s > n} \left(2^{sd(1/p' - 1/q)} \big\|\delta_s(f, \cdot) - \Lambda_{m_s} \delta_s(f, \cdot)\big\|_{p'} \right)^q \right)^{1/q} = \mathcal{I}_4.$$

Використовуючи співвідношення (4), продовжимо оцінку $\mathcal{I}_4$:

$$\mathcal{I}_4 \ll \left(\sum_{s > n} \left(2^{sd(1/p' - 1/q)} \lambda_{m_s} \Big(B_p^{2^{sd}}, l_{p'}^{2^{sd}} \Big) 2^{sd(1/p - 1/p')} \big\|\delta_s(f, \cdot)\big\|_p \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{s > n} \left(2^{sd(1/p - 1/q)} \lambda_{m_s} \Big(B_p^{2^{sd}}, l_{p'}^{2^{sd}} \Big) \big\|\delta_s(f, \cdot)\big\|_p \right)^q \right)^{1/q} = \mathcal{I}_5.$$

Оскільки згідно з теоремою А має місце порядкова оцінка

$$\lambda_{m_s} \Big(B_p^{2^{sd}}, l_{p'}^{2^{sd}} \Big) \ll 2^{sd/p'} m_s^{-1/2},$$

то

$$\mathcal{I}_5 \ll \left(\sum_{s > n} \left(2^{sd(1/p - 1/q)} 2^{sd/p'} m_s^{-1/2} \big\|\delta_s(f, \cdot)\big\|_p \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{s > n} \left(2^{sd(1 - 1/q)} m_s^{-1/2} \big\|\delta_s(f, \cdot)\big\|_p \right)^q \right)^{1/q}.$$

Підставивши в останнє співвідношення замість m_s їхні значення і врахувавши той факт, що $f \in H^{\Omega}_p$, отримаємо

$$\mathcal{I}_5 \ll \left(\sum_{s>n} \left(2^{sd(1-1/q)} 2^{-nd/2-\beta/2(nd-sd)} \Omega(2^{-s}) \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= 2^{-nd/2(1+\beta)} \left(\sum_{s>n} \left(2^{sd(1-1/q+\beta/2)} \Omega(2^{-s}) \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= 2^{-nd/2(1+\beta)} \left(\sum_{s>n} \left(2^{sd(1-1/q+\beta/2-\alpha/d)} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} \right)^q \right)^{1/q} = \mathcal{I}_6.$$

Далі, оскільки за умовою теореми $\Omega \in S^{\alpha}$, $\alpha > d(1-1/q)$, то має місце співвідношення

$$\frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} \ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}, \quad s > n. \tag{8}$$

Підберемо число $\beta > 0$ з умови

$$1 - 1/q + \beta/2 - \alpha/d < 0. \tag{9}$$

Це можливо зробити, тому що $\alpha > d(1-1/q)$.

Підставивши (8) в $\mathcal{I}_6$ і врахувавши (9), будемо мати

$$\mathcal{I}_6 \ll 2^{-nd/2(1+\beta)} \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{s>n} 2^{qsd(1-1/q+\beta/2-\alpha/d)} \right)^{1/q} \ll$$

$$\ll 2^{-nd/2(1+\beta)} \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{nd(1-1/q+\beta/2-\alpha/d)} =$$

$$= \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/2-1/q)} \asymp \Omega(m^{-1/d}) m^{1/2-1/q}.$$

Використовуючи означення лінійного поперечника, отримуємо шукану оцінку зверху.

Тепер одержимо оцінку знизу для $\lambda_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$. Оскільки при $1 < p \leq 2$ виконується $B^{\Omega}_{p,\theta} \supset B^{\Omega}_{2,\theta}$, то з огляду на вкладення $B^{\Omega}_{p,\theta} \supset B^{\Omega}_{p,1}$ (див. (1)) оцінку знизу достатньо встановити для поперечника $\lambda_m(B^{\Omega}_{2,1}, L_q)$.

Задамо $m \in \mathbb{N}$ і виберемо $l \in \mathbb{N}$ з умов $m \asymp 2^{ld}$, $2^{ld} \geq 2m$. Через $\mathcal{T}_l$ позначимо множину тригонометричних поліномів із номерами гармонік із $\rho(l)$. Згідно з означенням лінійного поперечника будемо мати

$$\lambda_m(B^{\Omega}_{2,1}, L_q) \geq \lambda_m(B^{\Omega}_{2,1} \cap \mathcal{T}_l, L_q). \tag{10}$$

Нехай далі P_l — оператор ортогонального проектування на множину $\mathcal{T}_l$. Тоді для $f \in L_q$ і $t \in \mathcal{T}_l$ виконується співвідношення

$$\|P_l f - t\|_q = \big\|P_l(f-t)\big\|_q \leq \|f - t\|_q. \tag{11}$$

З (11) з огляду на (10) будемо мати

$$\lambda_m\big(B^{\Omega}_{2,1}, L_q\big) \geq \lambda_m\big(B^{\Omega}_{2,1} \cap \mathcal{T}_l, L_q \cap \mathcal{T}_l\big). \tag{12}$$

Нехай тепер $f \in L_2 \cap \mathcal{T}_l$. Використовуючи співвідношення (2) і теорему Б, отримуємо

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{2,1}} \asymp \Omega^{-1}(2^{-l})\|\delta_l(f,\cdot)\|_2 \asymp \Omega^{-1}(2^{-l})2^{-ld/2}\|\delta_l f^j\|_{l_2^{2^{ld}}}. \tag{13}$$

Звідси, якщо для функції $f \in L_2 \cap \mathcal{T}_l$ виконується співвідношення

$$\|\delta_l f^j\|_{l_2^{2^{ld}}} \ll \Omega(2^{-l})2^{ld/2}, \tag{14}$$

маємо $C_6 f \in B^{\Omega}_{2,1} \cap \mathcal{T}_l$, $C_6 > 0$.

Іншими словами, кулі $C_6\Omega(2^{-l})2^{ld/2}B_2^{2^{ld}}$ радіуса $C_6\Omega(2^{-l})2^{ld/2}$ ставиться у відповідність одинична куля з простору $B^{\Omega}_{2,1}\cap\mathcal{T}_l$. Крім того, якщо $g \in L_q\cap\mathcal{T}_l$, то внаслідок теореми Літтлвуда – Пелі та теореми Б отримуємо

$$\|g\|_q \asymp \|\delta_l(g,\cdot)\|_q \asymp 2^{-ld/q}\|\delta_l g^j\|_{l_q^{2^{ld}}}. \tag{15}$$

Беручи до уваги співвідношення (12) – (15), одержуємо

$$\lambda_m(B^{\Omega}_{2,1}, L_q) \gg \Omega(2^{-l})2^{ld(1/2-1/q)}\lambda_m\left(B_2^{2^{ld}}, l_q^{2^{ld}}\right).$$

Звідси і з відомого співвідношення [23, с. 209]

$$\lambda_m(B_2^{2^{ld}}, l_q^{2^{ld}}) = d_m(B_{q'}^{2^{ld}}, l_2^{2^{ld}})$$

маємо

$$\lambda_m(B^{\Omega}_{2,1}, L_q) \gg \Omega(2^{-l})2^{ld(1/2-1/q)}d_m\left(B_{q'}^{2^{ld}}, l_2^{2^{ld}}\right). \tag{16}$$

Далі нам знадобиться допоміжне твердження.

Лема В [24]. *Нехай* $m < n$ *і* $1 \le p \le 2 \le q < \infty$. *Тоді*

$$d_m(B_p^n, l_q^n) \asymp \max\left\{n^{1/q-1/p}, \min\left\{1, n^{1/q}m^{-1/2}\right\}\sqrt{1-m/n}\right\}. \tag{17}$$

З (17) при розглядуваних умовах можемо записати

$$d_m\left(B_{q'}^{2^{ld}}, l_2^{2^{ld}}\right) \asymp \max\left\{2^{ld(1/2-1/q')}, \min\left\{1, 2^{ld/2}m^{-1/2}\right\}\sqrt{1-\frac{m}{2^{ld}}}\right\} \ge$$

$$\ge \min\left\{1, 2^{ld/2}m^{-1/2}\right\}\sqrt{1-\frac{m}{2^{ld}}} \gg \min\left\{1, 2^{ld/2}2^{-(ld-1)/2}\right\}\sqrt{1-\frac{2^{ld}/2}{2^{ld}}} = C_7 > 0. \tag{18}$$

Таким чином, з (16) і (18) отримуємо

$$\lambda_m\left(B^{\Omega}_{2,1}, L_q\right) \gg \Omega(2^{-l})2^{ld(1/2-1/q)} \asymp \Omega(m^{-1/d})m^{1/2-1/q}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай* $2 \le p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > d(1/p-1/q)$. *Тоді*

$$\lambda_m\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) \asymp \Omega\left(m^{-1/d}\right)m^{1/p-1/q}. \tag{19}$$

Доведення. Оцінка зверху величини $\lambda_m\Big(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\Big)$ випливає з відповідної оцінки наближення функцій із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ їх кубічними сумами Фур'є [25].

Встановимо оцінку знизу. Згідно з „нерівністю різних метрик" (див. теорему Г) для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ при $p \geq 2$ маємо

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\big\|\sigma_s(f,\cdot)\big\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \Omega^{-\theta}(2^{-s})2^{sd\theta(1/2-1/p)}\big\|\sigma_s(f,\cdot)\big\|_2^{\theta}\right)^{1/\theta} =$$

$$= \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \Omega_1^{-\theta}(2^{-s})\big\|\sigma_s(f,\cdot)\big\|_2^{\theta}\right)^{1/\theta} \asymp \|f\|_{B^{\Omega_1}_{2,\theta}},$$

де $\Omega_1(\tau) = \Omega(\tau)\tau^{d(1/2-1/p)}$.

Очевидно, що $\Omega_1 \in \Phi_{\alpha_1,l+1}$, $\alpha_1 = \alpha + d(1/2 - 1/p) > d(1/2 - 1/q)$. Тоді при $2 \leq p < \infty$ буде виконуватись вкладення $B^{\Omega_1}_{2,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta}$. Звідси і з теореми 2 отримуємо

$$\lambda_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \gg \lambda_m(B^{\Omega_1}_{2,\theta}, L_q) \asymp \Omega_1(m^{-1/d})m^{1/2-1/q} = \Omega(m^{-1/d})m^{1/p-1/q}.$$

Таким чином, теорему доведено.

***Зауваження* 2.** В одновимірному випадку при тих же самих співвідношеннях на параметри p і q та $2 \leq \theta \leq q$ теореми 2 та 3 було отримано у роботі [26], при всіх інших θ — у роботі [22].

Далі сформулюємо ще два твердження, які є наслідками відомих результатів.

Теорема 4. *Нехай* $1 \leq p < q \leq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > d(1/p - 1/q)$. *Тоді*

$$\lambda_m\Big(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\Big) \asymp \Omega\big(m^{-1/d}\big)m^{1/p-1/q}. \tag{20}$$

Теорема 5. *Нехай* $2 \leq q \leq p \leq \infty$, $(p,q) \neq (\infty,\infty)$, $1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$. *Тоді*

$$\lambda_m\Big(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\Big) \asymp \Omega\big(m^{-1/d}\big). \tag{21}$$

Оцінки зверху в (20) і (21) випливають із відповідних оцінок наближення функцій із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ їх кубічними сумами Фур'є [25]. Оцінки знизу отримаємо, використавши нерівність (3) та відповідні оцінки для колмогоровських поперечників $d_m\Big(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\Big)$ [20].

***Зауваження* 3.** При $d = 1$, $1 < p < q \leq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$ теорему 4 доведено у [21], при $p = 1$, $1 < q \leq 2$, $1 \leq \theta \leq q$ — у [22].

***Зауваження* 4.** В одновимірному випадку при $2 \leq q \leq p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ та $p = \infty$, $2 \leq q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ теорему 5 встановлено у роботах [26] та [22] відповідно.

Нехай тепер $\Omega(t) = t^r$. Використовуючи теореми 1 – 5, отримуємо наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$. *Тоді при* $r > r(d,p,q)$

$$\lambda_m(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp \begin{cases} m^{-r/d}, & 2 \le q \le p \le \infty, \quad (p,q) \ne (\infty,\infty), \\ m^{-r/d+1/p-1/q}, & 1 \le p < q \le 2, \quad 2 \le p < q < \infty, \\ m^{-r/d+1/p-1/2}, & 1 \le p < 2 \le q < p', \\ m^{-r/d+1/2-1/q}, & 1 < p \le 2, \quad p' < q < \infty, \end{cases}$$

де

$$r(d,p,q) = \begin{cases} d(1/p-1/q)_+, & 2 \le q \le p \le \infty, \quad 1 \le p < q \le 2, \\ & 2 \le p < q < \infty, \\ \max\{d/p, d(1-1/q)\}, & 1 \le p < 2 \le q < p', \\ & 1 < p \le 2, \quad p' < q < \infty, \end{cases}$$

і $a_+ = \max\{a,0\}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

***Зауваження* 5.** В одновимірному випадку теорему 6 доведено А. С. Романюком [8–10], окрім випадків $p \le 2$, $1/p + 1/q < 1$ та $2 \le p < q < \infty$ при $\theta = \infty$, які були розглянуті Е. М. Галєєвим [7].

На завершення роботи звернемо увагу на наступні обставини. Співставляючи одержані в роботі результати з оцінками колмогоровських поперечників $d_m(B^\Omega_{p,\theta}, L_q)$, помічаємо, що при умовах на параметри p і q, що містяться у теоремах 1, 4 і 5, має місце співвідношення

$$\lambda_m\Big(B^\Omega_{p,\theta}, L_q\Big) \asymp d_m\Big(B^\Omega_{p,\theta}, L_q\Big).$$

Якщо ж $1 < p \le 2$, $p' < q < \infty$ і $2 \le p < q < \infty$, то справджуються відповідно порядкові рівності

$$\lambda_m\Big(B^\Omega_{p,\theta}, L_q\Big) \asymp m^{1-1/q-1/p} d_m\Big(B^\Omega_{p,\theta}, L_q\Big),$$

$$\lambda_m\Big(B^\Omega_{p,\theta}, L_q\Big) \asymp m^{1/p-1/q} d_m\Big(B^\Omega_{p,\theta}, L_q\Big).$$

У роботі [2] було встановлено точні за порядком оцінки лінійних поперечників $\lambda_m(B^\Omega_{p,\theta}, L_q)$, які містяться у теоремах 1 – 5, але для більш вузького (а в деяких випадках іншого) спектра гладкісного параметра α. Крім цього зазначимо, що при встановленні оцінок лінійних поперечників класів $B^\Omega_{p,\theta}$ у даній роботі використано методи, які відрізняються від тих, що використовувалися у роботі [2].

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
2. *Xu Guiqiao.* The n-widths for a generalized periodic Besov classes // Acta Math. Sci. – 2005. – **25**, № 4. – P. 663 – 671.
3. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 6. – С. 1163 – 1165.
4. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.

5. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
6. *Галеев Э. М.* О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных // Вестн. Моск. ун-та. Математика, Механика. – 1987. – **4**. – С. 13 – 16.
7. *Галеев Э. М.* Линейные поперечники классов Гельдера – Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 2. – С. 189 – 199.
8. *Романюк А. С.* Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5. – С. 647 – 661.
9. *Романюк А. С.* Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. II // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 6. – С. 820 – 829.
10. *Романюк А. С.* Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. – 2011. – **37**, № 3. – P. 181 – 213.
11. *Kolmogoroff A.* Über die beste Anneherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. – 1963. – **37**, № 1. – S. 107 – 110.
12. *Глускин Е. Д.* Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. – 1983. – **120**, № 2. – С. 180 – 189.
13. *Кашин Б. С.* О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l^n_2 в l^m_2 // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. – 1980. – **15**, № 5. – С. 379 – 394.
14. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – Т. 2.
15. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\widetilde{W}^{\bar{\alpha}}_p$ и $\widetilde{H}^{\bar{\alpha}}_p$ в пространстве $\widetilde{L}_q$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1985. – **49**, № 5. – С. 916 – 934.
16. *Лизоркин П. И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношение с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 5. – С. 1127 – 1152.
17. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 3 – 113.
18. *Jackson D.* Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1993. – **39**, № 3. – P. 889 – 906.
19. *Дерев'янко Н. В.* Тригонометричні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1041 – 1052.
20. *Соліч К. В.* Колмогоровські поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1416 – 1425.
21. *Федуник О. В.* Лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – **1**, № 1. – С. 375 – 388.
22. *Конограй А. Ф.* Лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 94 – 112.
23. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1987. – **14**. – С. 103 – 260.
24. *Кашин Б. С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классы гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **41**, № 2. – С. 334 – 351.
25. *Стасюк С. А.* Наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях // Мат. студ. – 2011. – **35**, № 1. – С. 66 – 73.
26. *Федуник О. В.* Лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Укр. мат. журн. – 2006. – **56**, № 1. – С. 93 – 104.

Одержано 01.10.13