УДК 517.9

Е. В. Олейник (Харьк. нац. ун-т им. В. Н. Каразина)

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

We study system of nonlinear differential equations used as a basis for the construction of triangular models for commutative systems of linear nonself-adjoint bounded operators.

Вивчається система нелінійних диференціальних рівнянь, на якій ґрунтується побудова трикутних моделей для комутативних систем лінійних несамоспряжених обмежених операторів.

1. Введение. Пусть задана коммутативная система $\{A_1, A_2\}$ линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, и линейный ограниченный оператор $\varphi\colon H \to E$, где E — также гильбертово пространство, в котором заданы самосопряженные операторы $\{\sigma_k\}_1^2$, $\{\gamma^{\pm}\}$.

Совокупность

$$\Delta = \big(\{A_1, A_2\}; H; \varphi; E; \{\sigma_1, \sigma_2\}; \{\gamma^-\}; \{\gamma^+\}\big) \tag{1}$$

называется коммутативным узлом, если [1, с. 35]

$$\begin{gathered} [A_1, A_2] = 0, \\ A_k - A_k^* = i\varphi^*\sigma_k\varphi, \qquad \sigma_k = \sigma_k^*, \qquad k = 1,\, 2, \\ \sigma_1\varphi A_2^* - \sigma_2\varphi A_1^* = \gamma^-\varphi, \\ \gamma^+ = \gamma^- + (\sigma_1\varphi\varphi^*\sigma_2 - \sigma_2\varphi\varphi^*\sigma_1)\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Любая коммутативная система ограниченных линейных операторов $\{A_k\}_1^2$ может быть включена в узел [1, с. 36]. Рассмотрим коммутативный узел (1) в случае, когда $\dim E = r < \infty$, причем $\sigma_1 = J$ $(J = J^* = J^{-1})$ — инволюция. Обозначим через $S\,(\lambda)$ характеристическую функцию оператора A_1 узла Δ (1):

$$S\,(\lambda) = I - i\varphi(A_1 - \lambda I)^{-1}\varphi^*\sigma_1, \tag{3}$$

где I — единичный оператор в H. Характеристическая функция $S\,(\lambda)$ [2, с. 988] оператора A_1 в случае вещественного спектра оператора A_1 и абсолютной непрерывности матричной меры Стильтьеса мультипликативного интеграла имеет вид

$$S\,(\lambda) = S_l\,(\lambda)\,, \qquad S(x, \lambda) = \int\limits_0^{\widehat{x}} \exp\left\{\frac{iJa(t)dt}{\lambda - \alpha(t)}\right\}, \tag{4}$$

где $\alpha(x)$ — вещественная, ограниченная, неубывающая функция на $[0, l]$, $0 < l < \infty$, а матрица-функция $a(\cdot)$ является спектральной плотностью из мультипликативного представления Потапова для характеристической функции и имеет следующие свойства: $a(x) \geq 0$ размера $[r \times r]$

такая, что $\operatorname{tr} a(x) \equiv 1$. Из (2) следует, что характеристическая функция $S(\lambda)$ удовлетворяет условию сплетаемости [2, с. 989]

$$\left(\sigma_2\lambda + \gamma^-\right) JS(\lambda) = S(\lambda)\left(\sigma_2\lambda + \gamma^+\right) J. \tag{5}$$

Задача продолжения условия сплетаемости (5) вдоль цепочки инвариантных подпространств оператора A_1, которой соответствует мультипликативное представление $S(x,\lambda)$ (4), приводит к соотношению

$$\left(\sigma_2\lambda + \gamma^-(x)\right) JS(x,\lambda) = S(x,\lambda)\left(\sigma_2\lambda + \gamma^+\right) J \quad (\forall x \in [0,l]). \tag{6}$$

В [3, с. 69] показано, что выполнение условия сплетаемости (6) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} &[Ja(x), (\sigma_2\alpha(x) + \gamma(x))J] = 0, \quad x \in [0,l],\\ &\gamma'(x)J = i[Ja(x), \sigma_2 J], \quad x \in [0,l],\\ &\gamma(0) = \gamma^+. \end{aligned} \tag{7}$$

Решение этой системы $\gamma(x)$ используется при построении треугольных моделей коммутативных систем операторов [2, с. 989].

Целью данной работы является исследование и описание решений системы уравнений (7) в случае $\dim E = 3$, простого спектра матрицы $Ja(x)$ и в предположении гладкости матрицы $a(x)$ и $\alpha(x) = 0$. Получены уравнения (21) для собственных функций $\{h_k(x)\}_1^r$ матрицы $Ja(x)$ в терминах собственных значений $\{\mu_k(x)\}_1^r$ и собственных чисел оператора $\gamma(x)J$ (теорема 1). В случае $r = 3$ основная система уравнений (21) на собственные функции имеет вид (25), и ее решению посвящены пункты 3, 4. Найдены решения системы уравнений (25) в случае $r = 3$, $\alpha(x) = 0$ и простого спектра гладкой матрицы $a(x)$ при известном операторе σ_2 (теоремы 2, 3) и (теоремы 4, 5). Установлено, что в изучаемом случае решения системы (25) выражаются через тригонометрические функции от аргумента, зависящего от x, который строится по матрице σ_2.

2. Собственные значения и собственные векторы матрицы $Ja(x)$ в случае простого спектра. Исследуем разрешимость системы условий сплетаемости в общем случае, когда $\dim E = r < \infty$, для $a(x) \geq 0$, $\operatorname{tr} a(x) \equiv 1$, где $J = J^* = J^{-1}$, а $\alpha(x)$ — вещественная, ограниченная, неубывающая функция на $[0,l]$, $0 < l < \infty$.

Система условий сплетаемости (7) в случае $\alpha(x) = 0$ примет вид

$$\begin{aligned} &\gamma'(x)J = i\left[Ja(x), \sigma_2 J\right], \quad \gamma(0) = \gamma_0,\\ &[Ja(x), \gamma(x)J] = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Проинтегрировав первое уравнение системы (8), получим

$$\begin{aligned} &\gamma(x)J = i\left[A(x), \sigma_2 J\right] + \gamma_0 J,\\ &[A'(x), \gamma(x)J] = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $A(x) = \int_0^x Ja(t)dt$. Таким образом, задача нахождения решений системы уравнений (8) сводится к нахождению матрицы-функции $A(x)$ из нелинейного уравнения

$$[A'(x), i\,[A(x), \sigma_2 J] + \gamma_0 J] = 0, \tag{10}$$

т. е. необходимо найти матрицу $A(x)$ как решение нелинейного уравнения (10), а затем определить $\gamma(x)$ из (9).

Пусть $Ja(x)$ — матрица-функция с простым спектром, ее описание эквивалентно характеризации двух наборов: набору собственных функций и набору собственных чисел. Выберем базис $h_k(x)$ так, чтобы

$$Ja(x)h_k(x) = \mu_k(x)h_k(x), \tag{11}$$

где $\mu_k(x)$ — комплекснозначные собственные значения матрицы $Ja(x)$ и $\mu_k(x) \neq \overline{\mu}_s(x)$ $(k \neq s)$ такие, что при любом $x \in [0, l]$ матрица $Ja(x)$ в базисе $\{h_k(x)\}_1^r$ приводится к диагональному виду.

Лемма 1. *Если $\mu_k(x) \neq \overline{\mu}_s(x)$, $k \neq s$, то векторы $Jh_k(x)$ и $h_s(x)$ ортогональны при $k \neq s$ и каждом $x \in [0, l]$.*

Доказательство. Принимая во внимание (11), имеем

$$a(x)h_k(x) = \mu_k(x)Jh_k(x), \qquad a(x)h_s(x) = \mu_s(x)Jh_s(x). \tag{12}$$

Домножив скалярно первое уравнение (12) на $h_s(x)$, а второе на $h_k(x)$, получим

$$\langle a(x)h_k(x), h_s(x)\rangle = \mu_k(x)\langle Jh_k(x), h_s(x)\rangle, \qquad \langle a(x)h_s(x), h_k(x)\rangle = \mu_s(x)\langle Jh_s(x), h_k(x)\rangle. \tag{13}$$

Вычитая из первого уравнения (13) комплексно-сопряженное второе, имеем

$$(\mu_k(x) - \overline{\mu}_s(x))\langle Jh_k(x), h_s(x)\rangle = 0.$$

Поскольку $Ja(x)$ — гладкая матрица с простым спектром и $\mu_k(x) \neq \overline{\mu}_s(x)$ при $k \neq s$, то $\langle Jh_k(x), h_s(x)\rangle = 0$, значит, векторы $Jh_k(x)$ и $h_s(x)$ ортогональны.

В дальнейшем будем считать, что $\langle Jh_k(x), h_k(x)\rangle = 1$. Введем обозначение

$$\sigma_2 Jh_k(x) = \sum_{s=1}^{r} \alpha_{sk}(x)h_s(x), \qquad \langle \sigma_2 Jh_k(x), Jh_s(x)\rangle = \alpha_{sk}(x), \qquad 1 \leq k, \quad s \leq r, \tag{14}$$

где $\alpha_{sk}(x)$ — вещественные функции. Воспользуемся первым уравнением из (8):

$$\gamma'(x)Jh_k(x) = iJa(x)\sigma_2 Jh_k(x) - i\sigma_2 JJa(x)h_k(x) = i(Ja(x) - \mu_k(x))\sigma_2 Jh_k(x) =$$

$$= i\sum_{s=1}^{r} \alpha_{sk}(x)\left(Ja(x) - \mu_k(x)\right)h_s(x) = i\sum_{s\neq k} \alpha_{sk}(x)\left(\mu_s(x) - \mu_k(x)\right)h_s(x). \tag{15}$$

Лемма 2. *Пусть при каждом $x \in [0, l]$ матрица-функция $Ja(x)$ имеет простой спектр и $\{h_k(x)\}_1^r$ — базис соответствующих собственных векторов.*

Тогда векторы $\gamma(x)Jh_k(x)$ также являются ее собственными векторами, причем $\gamma(x)Jh_k(x) = \xi_k(x)h_k(x)$, где $\xi_k(x) \in \mathbb{C}$.

Если $\xi_k(x)$ — вещественные, то они не зависят от x.

Доказательство. Учитывая второе уравнение системы (8), имеем

$$Ja(x)\gamma(x)Jh_k(x) = \gamma(x)JJa(x)h_k(x) = \gamma(x)J\mu_k(x)h_k(x) = \mu_k(x)\gamma(x)Jh_k(x).$$

Таким образом, в случае простого спектра матрицы $Ja(x)$ векторы $\gamma(x)Jh_k(x)$ являются собственными векторами этой матрицы

$$\gamma(x)Jh_k(x) = \xi_k(x)h_k(x). \tag{16}$$

Предположим, что собственные значения $\xi_k(x)$ оператора $\gamma(x)$ зависят от x, и продифференцируем соотношение (16):

$$\gamma'(x)Jh_k(x) + \gamma(x)J(h_k(x))' = \xi_k(x)(h_k(x))' + (\xi_k(x))'h_k(x). \tag{17}$$

Умножим скалярно обе части равенства (17) на $Jh_k(x)$, и с учетом равенства $\langle Jh_k(x), h_s(x)\rangle = \delta_k^s$ и соотношения (14) получим

$$\left\langle i\sum_{s\neq k}\alpha_{sk}(x)\left(\mu_s(x)-\mu_k(x)\right)h_s(x), Jh_k(x)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \xi_k(x)(h_k(x))', Jh_k(x)\right\rangle - \left\langle \gamma(x)J(h_k(x))', Jh_k(x)\right\rangle + (\xi_k(x))'\left\langle h_k(x), Jh_k(x)\right\rangle, \tag{18}$$

т. е. $0 = \langle \xi_k(x)(h_k(x))', Jh_k(x)\rangle - \langle J(h_k(x))', \gamma(x)Jh_k(x)\rangle + (\xi_k(x))'$.

В силу самосопряженности $\gamma(x)$, вещественности $\xi_k(x)$ и (16)

$$\left\langle \xi_k(x)(h_k(x))', Jh_k(x)\right\rangle - \left\langle \xi_k(x)(h_k(x))', Jh_k(x)\right\rangle + (\xi_k(x))' = 0,$$

значит, $(\xi_k(x))' = 0$, следовательно, ξ_k не зависят от x.

Лемма 3. *Пусть $\xi_k(x) \in \mathbb{C}$ — собственные значения оператора $\gamma(x)J$, тогда $\xi_k(x)$ допускают представления $\xi_k(x) = v_k\left(2\int_0^x n_k(x)dt + i\right)$, где $\langle J(h_k(x))', h_k(x)\rangle = in_k(x)$ и $n_k(x)$, $v_k \in \mathbb{R}$, причем v_k от x не зависят.*

Доказательство. В случае, когда $\xi_k(x) \in \mathbb{C}$, из соотношения (18) следует

$$\left(\xi_k(x) - \overline{\xi_k(x)}\right)\left\langle J(h_k(x))', h_k(x)\right\rangle + (\xi_k(x))' = 0. \tag{19}$$

Продифференцировав соотношение $\langle Jh_k(x), h_k(x)\rangle = 1$, получим

$$\langle J(h_k(x))', h_k(x)\rangle + \langle Jh_k(x), (h_k(x))'\rangle = 0. \tag{20}$$

Обозначим $\langle J(h_k(x))', h_k(x)\rangle = m_k(x) + in_k(x)$, где $m_k(x)$, $n_k(x) \in \mathbb{R}$. В силу самосопряженности J с учетом (20) получим, что $m_k(x)+in_k(x)+m_k(x)-in_k(x) = 0$, т. е. $\mathrm{Re}(\langle J(h_k(x))', h_k(x)\rangle) = 0$, или $\langle J(h_k(x))', h_k(x)\rangle = in_k(x)$. Обозначим $\xi_k(x) = c_k(x)+iv_k(x)$, где $c_k(x)$, $v_k(x)$ — вещественные функции, и подставив в (19), получим $2iv_k(x)\times in_k(x)+(c_k(x))'+i(v_k(x))' = 0$. Приравняем вещественные и мнимые части: $(c_k(x))' = 2n_k(x)v_k(x)$, $(v_k(x))' = 0$. Отсюда следует, что $v_k(x) = v_k - \mathrm{const}$, а $c_k(x) = 2\int_0^x n_k(x)v_k dt$.

Теорема 1. *Пусть* $\mu_k(x) \in \mathbb{C}$ — *собственные значения* (11) *матрицы* $Ja(x)$, *а* $\{h_k(x)\}_1^r$ *соответствующий базис собственных векторов, причем* $\mu_k(x) \neq \overline{\mu}_s(x)(k \neq s)$. *Если* $\xi_k(x) \in \mathbb{C}$ — *собственные значения* (16) *оператора* $\gamma(x)J$, *тогда справедливо соотношение*

$$h'_k(x) = i \sum_{s \neq k} \alpha_{sk}(x) \frac{\mu_s(x) - \mu_k(x)}{\xi_k(x) - \overline{\xi_s(x)}} h_s(x). \tag{21}$$

Доказательство. Согласно лемме 3, $\xi_k(x) = 2\int_0^x n_k(x) v_k dt + i v_k$, где $\langle Jh'_k(x), h_k(x) \rangle = m_k(x) + i n_k(x)$, а $m_k(x), n_k(x), v_k \in \mathbb{R}$. Продифференцировав соотношение (16), получим (17). Применив соотношение (15), придем к равенству

$$i \sum_{p \neq k} \alpha_{pk}(x) \left(\mu_p(x) - \mu_k(x)\right) h_p(x) + \gamma(x) J h'_k(x) = \xi_k(x) h'_k(x) + 2 n_k(x) v_k h_k(x). \tag{22}$$

Домножив (22) скалярно на $Jh_s(x)$, будем иметь

$$i\alpha_{sk}(x) \left(\mu_s(x) - \mu_k(x)\right) + \langle Jh'_k(x), \gamma(x) J h_s(x) \rangle =$$

$$= \xi_k(x) \langle h'_k(x), Jh_s(x) \rangle + \langle 2 n_k(x) v_k h_k(x), Jh_s(x) \rangle.$$

Разложим $h'_k(x)$ по базисным векторам $h_k(x)$ с учетом леммы 1, тогда

$$h'_k(x) = \sum_{s=1}^r \eta_{ks}(x) h_s(x), \qquad \text{где} \quad \eta_{ks}(x) = \langle h'_k(x), Jh_s(x) \rangle.$$

В случае $s \neq k$

$$i\alpha_{sk}(x) \left(\mu_s(x) - \mu_k(x)\right) = \left(\xi_k(x) - \overline{\xi_s(x)}\right) \langle h'_k(x), Jh_s(x) \rangle =$$

$$= \left(\xi_k(x) - \overline{\xi_s(x)}\right) \eta_{ks}(x). \tag{23}$$

В результате получим (21).

Лемма 4. *Выражение* (21) *для* $h'_k(x)$ *имеет устранимую особенность при* $\xi_k(x) = \overline{\xi_s(x)}$.

Доказательство. Из соотношения (23) видно, что при $\xi_k(x) = \overline{\xi_s(x)}$ получим $\alpha_{sk}(x) = 0$, поэтому мы вправе записывать выражение для $h'_k(x)$ в виде (21).

Рассмотрим случай $\dim E = 3$, тогда система (21) примет вид

$$\begin{aligned}
&h'_1(x) = i \left(\alpha_{21}(x) \frac{\mu_2(x) - \mu_1(x)}{\xi_1(x) - \overline{\xi_2(x)}} h_2(x) + \alpha_{31}(x) \frac{\mu_3(x) - \mu_1(x)}{\xi_1(x) - \overline{\xi_3(x)}} h_3(x) \right), \\
&h'_2(x) = i \left(\alpha_{12}(x) \frac{\mu_1(x) - \mu_2(x)}{\xi_2(x) - \overline{\xi_1(x)}} h_1(x) + \alpha_{32}(x) \frac{\mu_3(x) - \mu_2(x)}{\xi_2(x) - \overline{\xi_3(x)}} h_3(x) \right), \\
&h'_3(x) = i \left(\alpha_{13}(x) \frac{\mu_1(x) - \mu_3(x)}{\xi_3(x) - \overline{\xi_1(x)}} h_1(x) + \alpha_{23}(x) \frac{\mu_2(x) - \mu_3(x)}{\xi_3(x) - \overline{\xi_2(x)}} h_2(x) \right), \\
&h_i(0) = h_i^0, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{24}$$

Обозначим

$$d(x) = \frac{\mu_2(x) - \mu_1(x)}{\xi_1(x) - \overline{\xi_2(x)}},$$

$$g(x) = \frac{\mu_3(x) - \mu_2(x)}{\xi_2(x) - \overline{\xi_3(x)}},$$

$$f(x) = \frac{\mu_1(x) - \mu_3(x)}{\xi_3(x) - \overline{\xi_1(x)}}.$$

В результате система (24) запишется в следующей форме:

$$\begin{aligned}
&h_1'(x) = i\Big(\alpha_{21}(x)d(x)h_2(x) + \alpha_{31}(x)\overline{f(x)}h_3(x)\Big),\\
&h_2'(x) = i\Big(\alpha_{12}(x)\overline{d(x)}h_1(x) + \alpha_{32}(x)g(x)h_3(x)\Big),\\
&h_3'(x) = i\Big(\alpha_{13}(x)f(x)h_1(x) + \alpha_{23}(x)\overline{g(x)}h_2(x)\Big),\\
&h_i(0) = h_i^0, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{25}$$

3. Решение системы уравнений (25), когда $r = 3$ (случай 1). Предположим, что оператор $\sigma_2 J$ действует на базисные вектора $\{h_i(x)\}_1^3$ так:

$$\begin{aligned}
&\sigma_2 J h_1(x) = \psi(x)h_1(x),\\
&\sigma_2 J h_2(x) = \nu(x)h_3(x),\\
&\sigma_2 J h_3(x) = \overline{\nu}(x)h_2(x),
\end{aligned} \tag{26}$$

где $\psi(x)$ — вещественная, а $\nu(x)$ — комплекснозначная функция. В силу ортогональности векторов $Jh_k(x)$, $h_s(x)$, и (14) имеем $\alpha_{12}(x) = \alpha_{21}(x) = \alpha_{13}(x) = \alpha_{31}(x) = 0$, $\alpha_{32}(x) = \nu(x)$, $\alpha_{23}(x) = \overline{\nu}(x)$. Обозначим $g(x)\nu(x) = c(x)$. Тогда система (25) примет вид

$$\begin{aligned}
&h_1'(x) = 0,\\
&h_2'(x) = ic(x)h_3(x),\\
&h_3'(x) = i\overline{c}(x)h_2(x),\\
&h_i(0) = h_0^i, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{27}$$

Отсюда следует, что $h_1(x) = h_1^0$.

Теорема 2. *Если $c(x) = a(x) + ib(x)$ — комплекснозначная функция, где $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$ линейно зависимы, т. е. найдутся такие числа λ и μ, что $\lambda a(x) + \mu b(x) \equiv 0$, $\lambda\mu \neq 0$, то система уравнений* (27) *имеет единственное решение*

$$
\begin{aligned}
&h_1(x) = h_1^0,\\
&h_2(x) = h_2^0 \cos\varphi(x) + h_3^0 \frac{-b(x)+ia(x)}{\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}} \sin\varphi(x),\\
&h_3(x) = h_3^0 \cos\varphi(x) + h_2^0 \frac{b(x)+ia(x)}{\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}} \sin\varphi(x),
\end{aligned} \tag{28}
$$

где $\varphi(x) = \int_0^x \sqrt{a^2(t)+b^2(t)}dt.$

***Замечание* 1.** Из условия $\lambda a(x) + \mu b(x) \equiv 0$ $(\lambda\mu \neq 0)$ следует, что выражение $h_2^0 \dfrac{b(x)+ia(x)}{\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}}$ не зависит от x, так как может быть выражено через λ и μ в виде $h_2^0 \dfrac{-\lambda+i\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$. Кроме того, $\varphi(x) = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}\displaystyle\int_0^x \frac{a(t)}{\mu}dt.$

Доказательство. Рассмотрим общий случай, когда $c(x) = a(x)+ib(x)$, где $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$ линейно зависимы. Исходная система (27) примет вид

$$
\begin{aligned}
&h_1'(x) = 0,\ h_1(x) = h_1^0,\\
&h_2'(x) = (-b(x)+ia(x))h_3(x),\ h_2(x) = h_2^0,\\
&h_3'(x) = \ (b(x)+ia(x))h_2(x), \quad h_3(x) = h_3^0.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Из третьего уравнения системы (29) получим $h_2(x) = \dfrac{1}{b(x)+ia(x)} h_3'(x)$. Продифференцируем полученное соотношение:

$$h_3''(x)\frac{1}{b(x)+ia(x)} - \frac{(b(x)+ia(x))'}{(b(x)+ia(x))^2} h_3'(x) = (-b(x)+ia(x))h_3(x).$$

Запишем его иначе:

$$h_3''(x) - \frac{(b(x)+ia(x))'}{b(x)+ia(x)} h_3'(x) + (b^2(x)+a^2(x))h_3(x) = 0. \tag{30}$$

По условию теоремы $a(x),\ b(x) \in \mathbb{R}$ линейно зависимы, т. е. найдутся такие ненулевые числа λ и μ, что $\lambda a(x) + \mu b(x) \equiv 0$. Обозначим $k = -\dfrac{\lambda}{\mu}$, тогда $b(x) = ka(x)$. Подставив последнее значение в (30), получим уравнение

$$h_3''(x) - \frac{a'(x)}{a(x)} h_3'(x) + a^2(x)(1+k^2)h_3(x) = 0. \tag{31}$$

Выполняя замену $h_3(x) = \eta(\zeta)$, где $\zeta = \displaystyle\int_0^x a(t)dt$, мы приходим к уравнению $\eta''(\zeta) + (1 + k^2)\eta(\zeta) = 0$, решением которого является $\eta(\zeta) = C_1 \cos\left(\zeta\sqrt{1+k^2}\right) + C_2 \sin\left(\zeta\sqrt{1+k^2}\right)$.

Соответственно, вернувшись к исходной переменной, получим

$$h_3(x) = C_1 \cos\varphi(x) + C_2 \sin\varphi(x), \qquad \text{где} \quad \varphi(x) = \sqrt{1+k^2}\int\limits_0^x a(t)dt.$$

Тогда решение имеет вид

$$h_3(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\int\limits_0^x \frac{a(t)}{\mu}dt\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\int\limits_0^x \frac{a(t)}{\mu}dt\right)$$

или

$$h_3(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\int\limits_0^x -\frac{b(t)}{\lambda}dt\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\int\limits_0^x -\frac{b(t)}{\lambda}dt\right).$$

Учитывая начальные условия, получаем, что $C_1 = h_3^0$, т. е. $h_2(x) = \dfrac{k-i}{\sqrt{1+k^2}}\big(-h_3^0 \sin\varphi(x) + C_2\cos\varphi(x)\big)$, где $\varphi(x) = \sqrt{1+k^2}\displaystyle\int_0^x a(t)dt$.

Из начальных условий найдем выражение для

$$C_2 = h_2^0\frac{k+i}{\sqrt{1+k^2}} = h_2^0\frac{-\lambda+i\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} = h_2^0\frac{b(x)+ia(x)}{\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}},$$

т. е.

$$h_2(x) = h_2^0 \cos\left(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\int\limits_0^x \frac{a(t)}{\mu}dt\right) + h_3^0\frac{\lambda+i\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \sin\left(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\int\limits_0^x \frac{a(t)}{\mu}dt\right).$$

Тогда решение системы уравнений (27) имеет вид (28).

Теорема 3. *Если $c(x) = a(x) + ib(x)$ — комплекснозначная функция, где $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$ таковы, что $a'(x)b(x) - a(x)b'(x) = k\sqrt{(a^2(x)+b^2(x))^3}$ (k — постоянная), то система уравнений* (27) *имеет единственное решение*

$$\begin{aligned} &h_1(x) = h_1^0; \\ &h_2(x) = \frac{b(x)-ia(x)}{\sqrt{b^2(x)+a^2(x)}}\cdot \\ &\left(\sqrt{\lambda_1}\left(B_1\exp^{\varphi(x)} - B_2\exp^{-\varphi(x)}\right) + \sqrt{\lambda_2}\left(B_3\exp^{\psi(x)} - B_4\exp^{-\psi(x)}\right)\right), \\ &h_3(x) = B_1\exp^{\varphi(x)} + B_2\exp^{-\varphi(x)} + B_3\exp^{\psi(x)} + B_4\exp^{-\psi(x)}, \end{aligned} \tag{32}$$

где $B_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,4}$, определяются из начальных условий,

$$\varphi(x) = \sqrt{\lambda_1}\int\limits_0^x \sqrt{a^2(p)+b^2(p)}\,dp, \qquad \psi(x) = \sqrt{\lambda_2}\int\limits_0^x \sqrt{a^2(p)+b^2(p)}\,dp,$$

а λ_i, $i = \overline{1,2}$, *— корни уравнения* $\lambda^2 = \dfrac{-(2+k^2) \pm \sqrt{k^2(k^2+4)}}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $c(x) = a(x) + ib(x)$. Исходная система (27) примет вид (29). Из третьего уравнения системы (29) получим (30). Пусть $h_3(x)$ представляется в виде $h_3(x) = z(x) + iy(x)$, где $z(x),\ y(x) \in \mathbb{R}$. Приравнивая вещественные и мнимые части (30), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &z'' - \frac{1}{2}\frac{(a^2(x)+b^2(x))'}{a^2(x)+b^2(x)}z' + \frac{(a'(x)b(x)-a(x)b'(x))}{a^2(x)+b^2(x)}y' + (a^2(x)+b^2(x))z = 0,\\ &y'' - \frac{1}{2}\frac{(a^2(x)+b^2(x))'}{a^2(x)+b^2(x)}y' - \frac{(a'(x)b(x)-a(x)b'(x))}{a^2(x)+b^2(x)}z' + (a^2(x)+b^2(x))y = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

В обозначениях $t(x) = \sqrt{a^2(x)+b^2(x)}$, $s(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$ система (33) принимает вид

$$z'' - \frac{t'(x)}{t(x)}z' + \frac{s'(x)}{1+s^2(x)}y' + t^2(x)z = 0,$$

$$y'' - \frac{t'(x)}{t(x)}y' - \frac{s'(x)}{1+s^2(x)}z' + t^2(x)y = 0.$$

Преобразуем эту систему:

$$\left(\frac{z'}{t(x)}\right)' + t^2(x)z = -\frac{s'(x)}{1+s^2(x)}y',$$

$$\left(\frac{y'}{t(x)}\right)' + t^2(x)y = \frac{s'(x)}{1+s^2(x)}z'.$$

Выполним подстановку $y = \eta(\xi) = \eta\left(\int_0^x t(p)\,dp\right)$, а $z = \zeta(\xi) = \zeta\left(\int_0^x t(p)\,dp\right)$, которая приведет к системе уравнений

$$\zeta'' + \zeta = -\frac{s'(x)}{(1+s^2(x))t(x)}\eta',$$

$$\eta'' + \eta = \frac{s'(x)}{(1+s^2(x))t(x)}\zeta'.$$

По условию теоремы $\dfrac{s'(x)}{(1+s^2(x))t(x)} = k$, где k — постоянная, т. е.

$$\begin{aligned} &\zeta'' + \zeta = -k\eta',\\ &\eta'' + \eta = k\zeta'. \end{aligned} \tag{34}$$

Преобразуем систему, тогда соответствующие дифференциальные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} &\zeta^{(4)} + (2+k^2)\zeta'' + \zeta = 0,\\ &\eta^{(4)} + (2+k^2)\eta'' + \eta = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

а решения

$$\zeta(\xi) = C_1 \exp^{\sqrt{\lambda_1}\xi} + C_2 \exp^{-\sqrt{\lambda_1}\xi} + C_3 \exp^{\sqrt{\lambda_2}\xi} + C_4 \exp^{-\sqrt{\lambda_2}\xi}, \tag{36}$$

где $\lambda^2 = \dfrac{-(2+k^2) \pm \sqrt{k^2(k^2+4)}}{2}$. Выражение для $\eta(\xi)$ аналогично (36). Тогда, возвращаясь к исходным переменным, в силу представления $h_3(x) = z(x) + iy(x)$ получаем

$$h_3(x) = B_1 \exp^{\varphi(x)} + B_2 \exp^{-\varphi(x)} + B_3 \exp^{\psi(x)} + B_4 \exp^{-\psi(x)}, \tag{37}$$

где $B_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,4}$, $\varphi(x) = \sqrt{\lambda_1} \displaystyle\int_0^x t(p)\, dp$, а $\psi(x) = \sqrt{\lambda_2} \displaystyle\int_0^x t(p) dp$. Соответственно

$$h_2(x) = \frac{(h_x^3)'(b(x) - ia(x))}{b^2(x) + a^2(x)} = \frac{b(x) - ia(x)}{\sqrt{b^2(x) + a^2(x)}} \left(\sqrt{\lambda_1} \left(B_1 \exp^{\varphi(x)} - B_2 \exp^{-\varphi(x)} \right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\lambda_2} \left(B_3 \exp^{\psi(x)} - B_4 \exp^{-\psi(x)} \right) \right) \tag{38}$$

Подставив начальные условия, можно определить константы $B_k \in \mathbb{C}$, $(k = \overline{1,4})$.

4. Решение системы уравнений (25) при $n = 3$ (случай 2). Пусть оператор $\sigma_2 J$ действует на базисные вектора $\{h_k(x)\}_1^3$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sigma_2 J h_1(x) = \psi(x) h_x^1 + \rho(x) h_3(x), \\ &\sigma_2 J h_2(x) = \nu(x) h_3(x), \\ &\sigma_2 J h_3(x) = \overline{\rho}(x) h_1(x) + \overline{\nu}(x) h_2(x), \end{aligned} \tag{39}$$

где $\psi(x)$ — вещественная функция, а $\nu(x)$, $\rho(x)$ — комплекснозначные функции. В силу ортогональности векторов $Jh_k(x), h_s(x)$ и (14), получим $\alpha_{12}(x) = \alpha_{21}(x) = 0$, $\alpha_{13}(x) = \overline{\rho}(x)\|h_1(x)\|^2$, $\alpha_{31}(x) = \rho(x)\|h_3(x)\|^2$, $\alpha_{23}(x) = \overline{\nu}(x)\|h_2(x)\|^2$, $\alpha_{32}(x) = \nu(x)\|h_3(x)\|^2$.

Таким образом, система (39) примет вид

$$\begin{aligned} &h_1'(x) = i\rho(x) f(x) h_3(x), \\ &h_2'(x) = i\nu(x) g(x) h_3(x), \\ &h_3'(x) = i\overline{\rho}(x) f(x) h_1(x) + i\overline{\nu}(x) g(x) h_2(x), \\ &h_i(0) = h_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{40}$$

Пусть $\nu(x)g(x) = c(x)$; $\rho(x)f(x) = k(x)$, а $c(x) = a(x) + ib(x)$, $k(x) = m(x) + in(x)$, где $a(x), b(x), m(x), n(x) \in \mathbb{R}$. В случае, когда $c(x) = a(x)$, $k(x) = m(x)$, система (40) имеет вид

$$\begin{aligned} &h_1'(x) = im(x) h_3(x), \\ &h_2'(x) = ia(x) h_3(x), \\ &h_3'(x) = im(x) h_1(x) + ia(x) h_2(x), \\ &h_i(0) = h_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{41}$$

Лемма 5. *Для системы уравнений* (41) *выполняется соотношение*

$$\|h_1(x)\|^2 + \|h_2(x)\|^2 + \|h_3(x)\|^2 = \mathrm{const}.$$

Утверждение леммы следует из системы уравнений (41).

Предположим, что $a(x)$, $m(x)$ линейно зависимы, причем $a(x) = k \cdot m(x)$, где $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, тогда система (41) примет вид

$$\begin{aligned} &h_1'(x) = im(x)h_3(x), \\ &h_2'(x) = ikm(x)h_3(x), \\ &h_3'(x) = im(x)(h_1(x) + kh_2(x)), \\ &h_i(0) = h_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{42}$$

Лемма 6. *Если $k \in \mathbb{R}$, то система уравнений* (42) *имеет единственное решение:*

$$\begin{aligned} h_1(x) &= h_1^0 \cos\varphi(x) + \frac{ih_3^0}{\sqrt{1+k^2}} \sin\varphi(x), \\ h_2(x) &= h_2^0 \cos\varphi(x) + \frac{ikh_3^0}{\sqrt{1+k^2}} \sin\varphi(x), \\ h_3(x) &= h_3^0 \cos\varphi(x) + ih_1^0\sqrt{1+k^2} \sin\varphi(x), \end{aligned} \tag{43}$$

где $\varphi(x) = \sqrt{1+k^2} \int_0^x m(t)dt$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 4. *Если $a'(x) = k(x)a(x)$, $m'(x) = k(x)m(x)$, $k(x) \neq 0$ то система уравнений* (41) *имеет единственное решение*

$$\begin{aligned} h_1(x) &= h_1^0 \cos\sqrt{C_2}\int_0^x m(t)dt + \frac{ih_3^0}{\sqrt{C_2}} \sin\sqrt{C_2}\int_0^x m(t)dt, \\ h_2(x) &= h_2^0 \cos\sqrt{C_1}\int_0^x a(t)dt + \frac{ih_3^0}{\sqrt{C_1}} \sin\sqrt{C_1}\int_0^x a(t)dt, \\ h_3(x) &= h_3^0 \cos\sqrt{C_1}\int_0^x a(t)dt + ih_2^0\sqrt{C_1} \sin\sqrt{C_1}\int_0^x a(t)dt, \end{aligned} \tag{44}$$

причем $C_1 = \dfrac{a^2(x) + m^2(x)}{a^2(x)}$, *а* $C_2 = \dfrac{a^2(x) + m^2(x)}{m^2(x)}$ *не зависят от x.*

Теорема 5. *Если* $a(x)\cos\varphi(x) + m(x)\sin\varphi(x) = 0$ *и* $\varphi(x)$ — *дифференцируемая функция, причем* $\varphi'(x) = C\sqrt{m^2(x) + a^2(x)}$, *где* C — *постоянная, то система уравнений* (41) *имеет единственное решение*

$$h_1(x) = h_1^0 \cos\beta(x) - Ch_2^0 \sin\beta(x) - i(1 - C^2)h_3^0 \sin\beta(x)\cos\varphi(x),$$

$$h_2(x) = h_2^0 \cos\beta(x) + Ch_1^0 \sin\beta(x) + i(1 - C^2)h_3^0 \sin\beta(x)\sin\varphi(x),$$

$$h_3(x) = \frac{h_1^0 - iCh_3^0 \sin\varphi(x)}{\cos\varphi(x)} \sin\beta(x) + ih_3^0 \cos\beta(x),$$

где $\beta(x) = \sqrt{C^2 + 1}\int_0^x \sqrt{m^2(t) + a^2(t)}dt.$

Таким образом, в случае $\dim E = 3$, $J \neq I$, $\alpha(x) = 0$ и простого спектра гладкой матрицы $Ja(x)$ показано, что можно найти собственные векторы матрицы $Ja(x)$ при известных собственных значениях матриц $Ja(x)$, $\gamma(x)J$ и действии σ_2 в базисе этих собственных векторов.

Выражаю искреннюю благодарность В. А. Золотареву за постановку задачи.

1. Золотарев В. А. Функциональные модели коммутативных систем линейных операторов и пространства де Бранжа на римановой поверхности // Мат. сб. – 2009. – **200**, № 3. – С. 31 – 48.
2. Золотарев В. А. Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности // Мат. сб. – 1990. – **181**, № 7. – С. 965 – 994.
3. Золотарев В. А. Спектральный анализ несамосопряженных коммутативных систем операторов и нелинейные дифференциальные уравнения // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1983. – Вып. 40. – С. 68 – 71.
4. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. – Харьков: Изд-во Харьков. нац. ун-та, 2003. – 342 с.
5. Золотарев В. А. Треугольные модели и задачи Коши для характеристических функций коммутирующих систем операторов. – Харьков, 1981. – 66 с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1Б916 деп.
6. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ. – М.: Наука, 1969. – 476 с.
7. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1971. – 160 с.

Получено 12.05.13,
после доработки — 09.07.14