УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ),
Т. А. Степанюк (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк)

ОЦІНКИ НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ КЛАСІВ НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ В РІВНОМІРНІЙ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ МЕТРИКАХ

We establish uniform [with respect to parameter p, $1 \leq p \leq \infty$] upper estimations of the best approximations by trigonometric polynomials for the classes $C^{\psi}_{\beta,p}$ of periodic functions generated by sequences $\psi(k)$ vanishing faster than any power function. The obtained estimations are exact in order and contain constants expressed in the explicit form and depending only on the function ψ. Similar estimations are obtained for the best approximations of the classes $L^{\psi}_{\beta,1}$ in metrics of the spaces L_s, $1 \leq s \leq \infty$.

Найдены равномерные относительно параметра p, $1 \leq p \leq \infty$, оценки сверху наилучших приближений тригонометрическими полиномами классов периодических функций $C^{\psi}_{\beta,p}$, порождаемых последовательностями $\psi(k)$, убывающими к нулю быстрее любой степенной функции. Полученные оценки точны по порядку и содержат выраженные в явном виде постоянные, зависящие только от функции ψ. Аналогичные оценки установлены для наилучших приближений классов $L^{\psi}_{\beta,1}$ в метриках пространств L_s, $1 \leq s \leq \infty$.

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_t |f(t)|$; L_p, $1 \leq p < \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних в p-му степені на $[0, 2\pi)$ функцій $f(t)$, в якому норму задано формулою $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$.

Нехай, далі, $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p \leq \infty$, — множина всіх 2π-періодичних функцій f, що майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x - t)\varphi(t)dt, \qquad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B^0_p, \tag{1}$$

де $\Psi_\beta(t)$ — сумовна на $[0, 2\pi)$ функція, ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \beta \in \mathbb{R}, \quad \psi(k) > 0,$$

а

$$B^0_p = \{\varphi \in L_1 \colon ||\varphi||_p \leq 1, \ \varphi \perp 1\}, \qquad 1 \leq p \leq \infty.$$

Функцію φ у зображенні (1), згідно з О. І. Степанцем [1, с. 132], називають (ψ, β)–похідною функції f і позначають через f^{ψ}_{β}. Підмножину неперервних функцій із $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p \leq \infty$, позначають через $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, що визначають класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ та $C^{\psi}_{\beta,p}$, зручно розглядати як звуження на множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких додатних неперервних опуклих донизу функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$ таких, що $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Множину всіх таких функцій $\psi(t)$ позначатимемо через $\mathfrak{M}$.

Наслідуючи О. І. Степанця (див., наприклад, [1, с. 160]), кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ поставимо у відповідність характеристики

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right), \qquad \mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t},$$

де ψ^{-1} — обернена до ψ функція, і покладемо

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \big\{\psi \in \mathfrak{M} \colon \mu(\psi; t) \uparrow \infty, \ t \to \infty\big\}.$$

Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то (див., наприклад, [2, с. 97]) функція $\psi(t)$ спадає до нуля швидше за довільну степеневу функцію, тобто

$$\lim_{t\to\infty} t^r \psi(t) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Це означає, що за умови $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ ряд Фур'є довільної функції f із $C^\psi_{\beta,p}$, $\beta \in \mathbb{R}$, можна диференціювати довільне число разів. В результаті будемо одержувати рівномірно збіжні ряди. Отже, класи $C^\psi_{\beta,p}$ при $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ складаються з нескінченно диференційовних функцій.

З іншого боку, як показано в [3, с. 1692], для кожної нескінченно диференційовної 2π-періодичної функції f можна вказати функцію ψ з множини $\mathfrak{M}_\infty^+$ таку, що $f \in C^\psi_{\beta,p}$ для довільних $\beta \in \mathbb{R}$.

Із множини $\mathfrak{M}_\infty^+$ виділяють підмножини $\mathfrak{M}'_\infty$ і $\mathfrak{M}''_\infty$; $\mathfrak{M}'_\infty$ — множина функцій $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, для яких величина $\eta(\psi; t) - t$ обмежена зверху, тобто існує стала $K_1 > 0$ така, що $\eta(\psi; t) - t \le K_1$, $t \ge 1$, а $\mathfrak{M}''_\infty$ — множина функцій $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, для яких величина $\eta(\psi; t) - t$ обмежена знизу деяким додатним числом, тобто існує стала $K_2 > 0$ така, що $\eta(\psi; t) - t \ge K_2$, $t \ge 1$.

Типовими представниками множини $\mathfrak{M}_\infty^+$ є функції $\psi_{r,\alpha}(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, $r > 0$, причому якщо $r \ge 1$, то $\psi_{r,\alpha} \in \mathfrak{M}'_\infty$, а якщо $r \in (0, 1]$, то $\psi_{r,\alpha} \in \mathfrak{M}''_\infty$. Класи $C^\psi_{\beta,p}$ та $L^\psi_{\beta,p}$, що породжуються функціями $\psi = \psi_{r,\alpha}$, будемо позначати через $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ та $L^{\alpha,r}_{\beta,p}$ відповідно.

Нехай, далі, $E_n(C^\psi_{\beta,p})_C$ та $E_n(L^\psi_{\beta,p})_s$ — найкращі наближення класів $C^\psi_{\beta,p}$ та $L^\psi_{\beta,p}$ в метриках просторів C та L_s, тобто величини вигляду

$$E_n(C^\psi_{\beta,p})_C = \sup_{f \in C^\psi_{\beta,p}} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C, \qquad 1 \le p \le \infty,$$

$$E_n(L^\psi_{\beta,p})_s = \sup_{f \in L^\psi_{\beta,p}} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_s, \qquad 1 \le p, s \le \infty,$$

де $\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$.

Дану роботу присвячено знаходженню точних порядкових оцінок величин $E_n(C^\psi_{\beta,p})_C$ і $E_n(L^\psi_{\beta,1})_s$ при $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ і $\beta \in \mathbb{R}$.

У роботі [2, с. 225] (див. також [4, с. 48]) встановлено точні порядкові оцінки величин $E_n(L^\psi_{\beta,p})_s$, $\beta \in \mathbb{R}$, при $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, $1 \le p, s \le \infty$, а також при $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, $1 < p, s < \infty$. У випадку $p = s = 1$ або $p = s = \infty$ в [5] встановлено асимптотичні рівності при $n \to \infty$ для величин $E_n(L^\psi_{\beta,p})_s$, $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Якщо ж для послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, виконуються умови:

1) $\Delta^2\psi(k) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2) \ge 0$, $\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \le \rho$, $0 < \rho < 1$, $k = n, n+1, \ldots$;

2) $\dfrac{\Delta^2\psi(n)}{\psi(n)} > \dfrac{(1+3\rho)\rho^{2n}}{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho^{2n}}}$, то при $p = s = 1$, $p = s = \infty$ в [6] отримано точні значення величин $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$.

У роботі [7] знайдено порядкові оцінки величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$, $1 \leq p < \infty$, і $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$, $1 < s \leq \infty$, у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, $\eta(t) - t \geq a > 2$, $\mu(t) \geq b > 2$. При цьому для оцінок зверху для найкращих наближень $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ і $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$ використовувались відповідно величини

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,p}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,1}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_s, \qquad 1 < s \leq \infty,$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинні суми Фур'є порядку $n-1$ функції f. Було встановлено нерівності

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq C_{a,b}\ (2p)^{1-\frac{1}{p}} \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty, \tag{2}$$

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq C_{a,b}\ \left(2s'\right)^{\frac{1}{s}} \psi(n)\left(\eta(n)-n\right)^{\frac{1}{s'}}, \qquad 1 < s \leq \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1, \tag{3}$$

де

$$C_{a,b} = \frac{1}{\pi} \max\left\{\frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a}, 2\pi\right\}. \tag{4}$$

Крім того, в [7] доведено, що при $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, $\eta(n) - n > 2$ суми Фур'є забезпечують порядок найкращих наближень тригонометричними поліномами, тобто

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \asymp \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}}, \qquad 1 < s \leq \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$$

(тут і далі запис $A(n) \asymp B(n)$ $(A(n) > 0,\ B(n) > 0)$ означає існування додатних сталих K_1 і K_2 таких, що $K_1 B(n) \leq A(n) \leq K_2 B(n)$, $n \in \mathbb{N}$).

Зазначимо, що порядкову рівність $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \asymp \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$, у випадку $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ встановлено в роботі [8]. Крім того, у роботах [9, 10] при $p = 2$, $s = \infty$ та $p = 1$, $s = 2$ за умови збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k)$ знайдено точні значення величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ для всіх $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$.

Водночас суми Фур'є, як апарат наближення, не дозволяють записати рівномірні відносно параметрів p, $1 \leq p \leq \infty$, та s, $1 \leq s \leq \infty$, оцінки зверху для величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$. Цей факт зумовлений тією обставиною, що при $p = \infty$ та $s = 1$ за умови $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$

$$\frac{\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C}{E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C} \asymp \ln^+(\eta(n)-n), \qquad \frac{\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s}{E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s} \asymp \ln^+(\eta(n)-n),$$

де $\ln^+ t = \max\{0, \ln t\}$ (див., наприклад, [1, с. 264, 285]; [4, с. 86, 87]).

У даній роботі побудовано лінійний метод наближення $V_{n,\psi}(t)$, що дозволяє записати рівномірні відносно параметрів p, $1 \le p \le \infty$, і s, $1 \le s \le \infty$, оцінки зверху найкращих наближень $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ і $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s$ при $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Показано, що знайдені оцінки є точними за порядком і містять виражені в явному вигляді сталі, які залежать лише від функції ψ.

Теорема 1. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$. Тоді для $n \in \mathbb{N}$ таких, що $\eta(n) - n \ge a > 2$, $\mu(n) \ge b > 2$, справджуються оцінки*

$$C_a \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}} \le E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le C^*_{a,b}\psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}, \tag{5}$$

де

$$C_a = \frac{\pi}{96\,(1+\pi^2)^2}\frac{(a-1)^2(a-2)^2}{a^3(3a-4)}, \tag{6}$$

$$C^*_{a,b} = \frac{2(1+\pi^2)}{\pi}\left(\frac{2b}{b-2} + \frac{a}{a-1}\right). \tag{7}$$

Доведення. Згідно з формулою (33) роботи [7] для довільної $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$ при $\eta(n) - n \ge a > 2$, $\mu(n) \ge b > 2$ має місце оцінка

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \ge C_a \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

в якій величина C_a означена рівністю (6). Для знаходження оцінки зверху величини $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ розглянемо лінійний метод $V_{n,\psi}(f;x)$ наближення функцій із множини $C^{\psi}_{\beta,p}(L^{\psi}_{\beta,1})$ вигляду

$$V_{n,\psi}(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n,[\eta(n)]-n+1}(k)\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

де

$$\lambda_{n,[\eta(n)]-n+1}(k) = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le 2n - [\eta(n)] - 1, \\ 1 - \dfrac{[\eta(n)] - 2n + k}{[\eta(n)] - n}\frac{\psi(n)}{\psi(k)}, & 2n - [\eta(n)] \le k \le n-1 \end{cases} \tag{9}$$

(тут і далі $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α).

Зауважимо, що суми (8) є частинним випадком узагальнених сум Валле Пуссена $U^{\nu}_{n,m}(f;x)$, тобто поліномів вигляду (див., наприклад, [11])

$$U^{\nu}_{n,m}(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n,m}(k)\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right),$$

де

$$\lambda_{n,m}(k) = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le n-m, \\ 1 - \dfrac{\nu(k)}{\nu(n)}, & n-m+1 \le k \le n-1, \end{cases}$$

а $\nu(k)$, $k \in \mathbb{N}$, — довільно монотонно зростаюча послідовність додатних чисел $m \in [1,n]$, $m \in \mathbb{N}$. Поклавши $\nu(k) = \dfrac{[\eta(n)] - 2n + k}{\psi(k)}$ і $m = [\eta(n)] - n + 1$, одержимо $U^{\nu}_{n,m}(f;x) = V_{n,\psi}(f;x)$.

Розглянемо величину

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,p}; V_{n,\psi})_C = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,p}} \|f(\cdot) - V_{n,\psi}(f;\cdot)\|_C, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Оскільки

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \le \mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,p}; V_{n,\psi})_C, \tag{10}$$

то для доведення теореми 1 достатньо показати, що при $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, $\eta(n) - n \ge a > 2$, $\mu(n) \ge b > 2$ має місце співвідношення

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,p}; V_{n,\psi})_C \le C^*_{a,b}\psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{11}$$

де $C^*_{a,b}$ означаються рівністю (7). Згідно з [2, с. 51] для всіх $x \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$f(x) - V_{n,\psi}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\left(\sum_{k=1}^{n-1}(1-\lambda_{n,[\eta(n)]-n+1}(k))\psi(k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)dt, \tag{12}$$

де $\lambda_{n,[\eta(n)]-n+1}(k)$ означаються формулою (9). Із (12) і (9) отримаємо

$$f(x) - V_{n,\psi}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t)\Psi^*_{\beta,n}(x-t)dt, \qquad \|f^{\psi}_{\beta}\|_p \le 1, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{13}$$

де

$$\Psi^*_{\beta,n}(t) = \psi(n)\sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1}\frac{[\eta(n)]-2n+k}{[\eta(n)]-n}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)=$$

$$=\psi(n)\sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1}\left(1-\frac{n-k}{[\eta(n)]-n}\right)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{14}$$

Згідно з твердженнями 8.1 і 8.2 роботи [1, с. 137, 138] для будь-якої функції $f \in C^{\psi}_{\beta,p}$ виконується нерівність

$$\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t)\Psi^*_{\beta,n}(x-t)dt\right\|_C \le \frac{1}{\pi}\|f^{\psi}_{\beta}\|_p\|\Psi^*_{\beta,n}\|_{p'} \le \frac{1}{\pi}\|\Psi^*_{\beta,n}(t)\|_{p'}, \qquad 1 \le p \le \infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1. \tag{15}$$

Оцінимо зверху величину $\|\Psi^*_{\beta,n}\|_{p'}$. Позначаючи

$$D_{k,\beta}(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{\beta\pi}{2}+\sum_{j=1}^{k}\cos\left(jt-\frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{16}$$

з (14) одержуємо

$$\Psi^*_{\beta,n}(t) = \psi(n)\left(D_{n-1,\beta}(t) - D_{2n-[\eta(n)],\beta}(t)\right) -$$

$$-\frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1}(n-k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right). \quad (17)$$

Далі скористаємось наступним твердженням роботи [7].

Лема 1. *Нехай* $\gamma \in \mathbb{R}$, *а* $\lambda(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, — *деяка послідовність дійсних чисел. Тоді для довільних* N, $M \in \mathbb{N}$ $(N < M)$ *має місце рівність*

$$\frac{1}{M-N}\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=1}^{k}\lambda(j)\cos(jt+\gamma) = \sum_{k=1}^{N}\lambda(k)\cos(kt+\gamma) +$$

$$+\frac{1}{M-N}\sum_{k=N+1}^{M-1}(M-k)\,\lambda(k)\cos(kt+\gamma)\,. \quad (18)$$

Поклавши в умовах леми 1 $M = n$, $N = 2n-[\eta(n)]$, $\lambda(k) \equiv 1$, $\gamma = -\frac{\beta\pi}{2}$, із (18) отримаємо

$$\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1}(n-k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1}D_{k,\beta}(t) - D_{2n-[\eta(n)],\beta}(t). \quad (19)$$

Із (17) і (19) випливає рівність

$$\Psi^*_{\beta,n}(t) = \psi(n)D_{n-1,\beta}(t) - \frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1}D_{k,\beta}(t) + \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right). \quad (20)$$

Застосовуючи до останнього доданка з правої частини рівності (20) перетворення Абеля, одержуємо, що при довільному $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right) = \sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)D_{k,\beta}(t) - \psi(n)D_{n-1,\beta}(t), \quad (21)$$

де $\Delta\psi(k) = \psi(k) - \psi(k+1)$.

Згідно з (20) і (21)

$$\Psi^*_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)D_{k,\beta}(t) - \frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1}D_{k,\beta}(t). \quad (22)$$

На підставі формули

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sin(\gamma+kt) = \sin\left(\gamma+\frac{N-1}{2}t\right)\sin\frac{Ny}{2}\operatorname{cosec}\frac{t}{2} \quad (23)$$

(див., наприклад, [12, c. 43]), при $N = k+1$, $\gamma = (1-\beta)\frac{\pi}{2}$, маємо

$$D_{k,\beta}(t)=\sum_{j=0}^{k}\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\cos\beta\pi 2=\frac{\cos\left(\dfrac{kt}{2}-\dfrac{\beta\pi}{2}\right)\sin\dfrac{k+1}{2}t}{\sin\dfrac{t}{2}}-\frac{1}{2}\cos\frac{\beta\pi}{2}=$$

$$=\frac{\sin\left(\left(k+\dfrac{1}{2}\right)t-\dfrac{\beta\pi}{2}\right)+\cos\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{\beta\pi}{2}}{2\sin\dfrac{t}{2}},\quad 0<|t|\leq\pi. \tag{24}$$

З (24) і (22) одержуємо

$$\Psi^*_{\beta,n}(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)\frac{\sin\left(\left(k+\dfrac{1}{2}\right)t-\dfrac{\beta\pi}{2}\right)+\cos\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{\beta\pi}{2}}{2\sin\dfrac{t}{2}}-$$

$$-\frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1}\frac{\sin\left(\left(k+\dfrac{1}{2}\right)t-\dfrac{\beta\pi}{2}\right)+\cos\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{\beta\pi}{2}}{2\sin\dfrac{t}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right). \tag{25}$$

Застосуємо перетворення Абеля до першої суми з правої частини рівності (25), внаслідок чого запишемо

$$\Psi^*_{\beta,n}(t)=\frac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\Delta^2\psi(k)\sum_{j=0}^{k}\sin\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)-\right.$$

$$-\Delta\psi(n)\sum_{j=0}^{n-1}\sin\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$\left.-\frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=2n-[\eta(n)]}^{n-1}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right),\quad 0<|t|\leq\pi, \tag{26}$$

де

$$\Delta^2\psi(k)=\Delta\psi(k)-\Delta\psi(k+1)=\psi(k)-2\psi(k+1)+\psi(k+2).$$

Оскільки

$$\sin\frac{t}{2}\geq\frac{t}{\pi},\quad 0\leq t\leq\pi, \tag{27}$$

то згідно з (23)

$$\left|\sum_{j=0}^{k} \sin\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \le \frac{\pi}{|t|}, \quad 0<|t|\le\pi. \tag{28}$$

З (26) – (28) маємо

$$\left|\Psi^*_{\beta,n}(t)\right| \le \frac{\pi^2}{2t^2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\Delta^2\psi(k)+\Delta\psi(n)+\frac{2\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{t^2}\left(\Delta\psi(n)+\frac{\psi(n)}{[\eta(n)]-n}\right), \quad 0<|t|\le\pi.$$

Оскільки $\psi\in\mathfrak{M}$, то

$$\Delta\psi(n)\le|\psi'(n)|, \qquad \psi'(n):=\psi'(n+0). \tag{29}$$

Оцінимо значення величини $|\psi'(n)|$. Для цього нам знадобиться наступне твердження.

Лема 2. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$, $\mu(t)\ge b>0$. *Тоді*

$$\frac{1}{2}\frac{b^2}{(b+1)^2}\,(\eta(t)-t)\le\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}\le 4\left(1+\frac{1}{b}\right)(\eta(t)-t)\,, \quad t\ge1. \tag{30}$$

Доведення. Згідно з [1, с. 165] справджується співвідношення

$$|\psi'(\eta(\eta(t)))|\,(\eta(\eta(t))-\eta(t))\le\frac{1}{4}\psi(t)\le|\psi'(\eta(t))|\,(\eta(\eta(t))-\eta(t))\,, \qquad \psi\in\mathfrak{M}. \tag{31}$$

З правої частини (31) випливає, що

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}\le\frac{4|\psi'(\eta(t))|}{|\psi'(t)|}\,(\eta(\eta(t))-\eta(t))\le 4\,(\eta(\eta(t))-\eta(t))\,. \tag{32}$$

Згідно з формулою (11) роботи [7] для довільної функції $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$ при $\mu(t)\ge b>0$ має місце співвідношення

$$\frac{1}{2}\,(\eta(t)-t)\le\eta(\eta(t))-\eta(t)<\left(1+\frac{1}{b}\right)(\eta(t)-t)\,, \tag{33}$$

тому з (32) отримуємо

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}\le 4\left(1+\frac{1}{b}\right)(\eta(t)-t)\,. \tag{34}$$

З іншого боку, на підставі (31) і (33)

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}\ge\frac{4|\psi'(\eta(\eta(t)))|}{|\psi'(t)|}\,(\eta(\eta(t))-\eta(t))\ge\frac{2|\psi'(\eta(\eta(t)))|}{|\psi'(t)|}\,(\eta(t)-t)\,. \tag{35}$$

Оскільки

$$\psi'(t)=(4\psi(\eta(\eta(t))))'=4\psi'\left(\eta(\eta(t))\right)\eta'(\eta(t))\eta'(t), \quad \psi\in\mathfrak{M},$$

(тут і далі $\eta'(t)=\eta'(t+0)$), то

$$\frac{\psi'\left(\eta(\eta(t))\right)}{\psi'(t)}=\frac{1}{4\eta'(\eta(t))\eta'(t)}. \tag{36}$$

Згідно з формулою (13) роботи [7] для довільної $\psi\in\mathfrak{M}^+_\infty$ при $\mu(t)\ge b>0$

$$\eta'(t) \leq 1 + \frac{1}{b}, \quad t \geq 1. \tag{37}$$

Тому з (36) і (37) випливає

$$\frac{2|\psi'(\eta(\eta(t)))|}{|\psi'(t)|} \left(\eta(t) - t\right) \geq \frac{1}{2}\frac{b^2}{(b+1)^2} \left(\eta(t) - t\right). \tag{38}$$

Об'єднуючи (35) і (38), отримуємо твердження леми.

Лему доведено.

Згідно з (29) і (30) маємо

$$\Delta\psi(n) \leq |\psi'(n)| \leq \frac{2(b+1)^2}{b^2}\frac{\psi(n)}{\eta(n)-n}, \qquad \psi \in \mathfrak{M}_\infty^+, \quad b > 0. \tag{39}$$

За лемою 2 роботи [7] якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\eta(n) - n \geq a > 1$, $\mu(n) \geq b > 0$, то

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)(\eta(n) - n) < [\eta(n)] - n. \tag{40}$$

З (), (39), і (40) випливає нерівність

$$|\Psi_{\beta,n}^*(t)| \leq \pi^2 \left(\frac{2(b+1)^2}{b^2} + \frac{a}{a-1}\right) \frac{\psi(n)}{\eta(n)-n}\frac{1}{t^2}, \quad 0 < t \leq \pi. \tag{41}$$

Покажемо також, що при $\eta(n) - n \geq a > 0$ і $\mu(n) \geq b > 2$ для довільних $t \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$|\Psi_{\beta,n}^*(t)| \leq \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\right)\psi(n)(\eta(n) - n). \tag{42}$$

З (14) маємо

$$|\Psi_{\beta,n}^*(t)| \leq \left|\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| + \psi(n) \sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1} \left(1 - \frac{n-k}{[\eta(n)]-n}\right). \tag{43}$$

Відповідно до формули (30) роботи [7] для довільних $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\beta \in \mathbb{R}$ при $\eta(n) - n \geq a > 0$ і $\mu(n) \geq b > 2$

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \leq \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a}\right)\psi(n)(\eta(n) - n), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{44}$$

Крім того, як неважко переконатись,

$$\psi(n) \sum_{k=2n-[\eta(n)]+1}^{n-1} \left(1 - \frac{n-k}{[\eta(n)]-n}\right) =$$

$$\psi(n)\left([\eta(n)] - n - 1 - \frac{([\eta(n)]-n)([\eta(n)]-n-1)}{2([\eta(n)]-n)}\right) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{2}\left([\eta(n)] - n - 1\right) < \frac{\psi(n)}{2}(\eta(n) - n). \tag{45}$$

З (43) – (45), отримуємо нерівність (42).

Враховуючи (41), (42), а також нерівності

$$\frac{a}{a-1} > \frac{1}{a} + \frac{1}{2}, \quad a > 1, \qquad \frac{b}{b-2} > \frac{(b+1)^2}{b^2}, \quad b > 2,$$

переконуємось, що при $1 \le p' < \infty$, $\eta(n) - n \ge a > 1$ і $\mu(n) \ge b > 2$

$$\|\Psi^*_{\beta,n}(t)\|_{p'} \le \psi(n) \left(\left(\frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \right)^{p'} \int\limits_{|t| \le \frac{1}{\eta(n)-n}} (\eta(n)-n)^{p'} dt + \right.$$

$$\left. + \pi^{2p'} \left(\frac{2(b+1)^2}{b^2} + \frac{a}{a-1} \right)^{p'} \frac{1}{(\eta(n)-n)^{p'}} \int\limits_{\frac{1}{\eta(n)-n} \le |t| \le \pi} \frac{dt}{t^{2p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} <$$

$$< \psi(n) \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{a}{a-1} \right) \left(\int\limits_{|t| \le \frac{1}{\eta(n)-n}} (\eta(n)-n)^{p'} dt + \frac{\pi^{2p'}}{(\eta(n)-n)^{p'}} \int\limits_{\frac{1}{\eta(n)-n} \le |t| \le \pi} \frac{dt}{t^{2p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} <$$

$$< \psi(n)(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p'}} \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{a}{a-1} \right) 2^{\frac{1}{p'}} \left(1 + \pi^{2p'} \frac{1}{2p'-1} \right)^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le 2(1+\pi^2) \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{a}{a-1} \right) \psi(n)(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p'}}. \tag{46}$$

У випадку $p' = \infty$ зі співвідношення (42) маємо, що при $\eta(n) - n \ge a > 1$ і $\mu(n) \ge b > 2$

$$\|\Psi^*_{\beta,n}(t)\|_{p'} = \|\Psi^*_{\beta,n}(t)\|_{\infty} \le \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \right) \psi(n)(\eta(n)-n) <$$

$$< 2(1+\pi^2) \left(\frac{2b}{b-2} + \frac{a}{a-1} \right) \psi(n)(\eta(n)-n). \tag{47}$$

Зі співвідношень (13), (15), (46) і (47) випливає справедливість нерівності (11).

Теорему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, $\lim_{n\to\infty}(\eta(\psi,n)-n) = \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$. *Тоді*

$$E_n(C^\psi_{\beta,p})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,p})_C \asymp \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}.$$

Неважко переконатися, що для функції $\psi_{r,\alpha}(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, $r \in (0,1)$

$$\eta(n) - n = \eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n = n \left(\left(1 + \frac{\ln 2}{\alpha n^r} \right)^{\frac{1}{r}} - 1 \right), \tag{48}$$

$$\mu(n) = \mu(\psi_{r,\alpha}; n) = \frac{n}{\eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n} = \frac{1}{\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r} + 1 \right)^{\frac{1}{r}} - 1},$$

і, як показано в [7, с. 257, 258], при

$$n \geq \max\left\{1 + \left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}}, 1 + 2\left(\frac{\ln 2}{\alpha(3^r - 2^r)}\right)^{\frac{1}{r}}\right\}$$

виконуються нерівності

$$\eta(n) - n \geq a(\alpha, r) > 2,$$

$$\mu(n) \geq a(\alpha, r) > 2,$$

де

$$a(\alpha, r) = \frac{\ln 2}{\alpha r}\left(1 + \left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}}\right)^{1-r}, \tag{49}$$

$$b(\alpha, r) = \left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\left(1 + 2\left(\frac{\ln 2}{\alpha(3^r - 2^r)}\right)^{\frac{1}{r}}\right)^{-r} + 1\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right)^{-1}. \tag{50}$$

Тоді з теореми 1 випливає наступне твердження.

Наслідок 2. *Нехай $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх n таких, що*

$$n \geq \max\left\{1 + \left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}},\ 1 + 2\left(\frac{\ln 2}{\alpha(3^r - 2^r)}\right)^{\frac{1}{r}}\right\}, \tag{51}$$

справедливі оцінки

$$C_a \exp\left(-\alpha n^r\right) n^{\frac{1}{p}} \left(\left(1 + \frac{\ln 2}{\alpha n^r}\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right)^{\frac{1}{p}} \leq E_n\left(C^{\alpha,r}_{\beta,p}\right)_C \leq$$

$$\leq C^*_{a,b} \exp\left(-\alpha n^r\right) n^{\frac{1}{p}} \left(\left(1 + \frac{\ln 2}{\alpha n^r}\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{52}$$

де величини C_a і $C^*_{a,b}$ означаються формулами (6) *і* (7) *при $a = a(\alpha, r)$, $b = b(\alpha, r)$, що задані за допомогою рівностей* (49) *і* (50).

Теорема 2. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq s \leq \infty$, $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$. Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$, таких, що $\eta(n) - n \geq a > 2$, $\mu(n) \geq b > 2$, справджуються оцінки*

$$C_a \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}} \leq E_n(L^\psi_{\beta,1})_s \leq C^*_{a,b} \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}}, \tag{53}$$

де сталі C_a і $C^*_{a,b}$ означаються формулами (6) *і* (7) *відповідно.*

Доведення. Згідно з формулою (70) роботи [7] для довільних $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ при $\eta(n) - n \geq a > 2$, $\mu(n) \geq b > 2$ має місце оцінка

$$E_n(L^\psi_{\beta,1})_s \geq C_a \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}},$$

в якій величина C_a означена рівністю (6). Для оцінки зверху найкращих наближень $E_n\big(L^\psi_{\beta,1}\big)_s$ розглянемо величину

$$\mathcal{E}(L^\psi_{\beta,1}; V_{n,\psi})_s = \sup_{f \in L^\psi_{\beta,1}} \|f(\cdot) - V_{n,\psi}(f;\cdot)\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty,$$

де суми $V_{n,\psi}$ означаються формулою (8).

Оскільки

$$E_n(L^\psi_{\beta,1})_s \leq \mathcal{E}(L^\psi_{\beta,1}; V_{n,\psi})_s, \tag{54}$$

то для доведення теореми 2 достатньо показати справедливість співвідношення

$$\mathcal{E}(L^\psi_{\beta,1}; V_{n,\psi})_s \leq C^*_{a,b} \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}}. \tag{55}$$

Для цього використаємо інтегральне зображення (13), яке у випадку $f \in L^\psi_{\beta,1}$ буде справедливим майже для всіх $x \in \mathbb{R}$, та нерівність (5.28) з [13, с. 43]. Тоді для довільних $1 \leq s \leq \infty$, одержимо

$$E_n\big(L^\psi_{\beta,1}\big)_s \leq \frac{1}{\pi}\|\Psi^*_{\beta,n}(\cdot)\|_s \|\varphi(\cdot)\|_1 \leq \frac{1}{\pi}\|\Psi^*_{\beta,n}(\cdot)\|_s. \tag{56}$$

Використовуючи співвідношення (46) і (47) і покладаючи $p' = s$, з (56) отримуємо (55).

Теорему 2 доведено.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\eta(\psi,n) - n) = \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq s \leq \infty$, $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$. *Тоді*

$$E_n(L^\psi_{\beta,1})_s \asymp \mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1})_s \asymp \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}}.$$

***Наслідок* 4.** *Нехай* $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $1 \leq s \leq \infty$, $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *таких, що задовольняють умову* (51), *справджуються оцінки*

$$C_a \exp(-\alpha n^r)\, n^{\frac{1}{s'}} \left(\left(1 + \frac{\ln 2}{\alpha n^r}\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right)^{\frac{1}{s'}} \leq E_n(L^{\alpha,r}_{\beta,1})_s \leq$$

$$\leq C^*_{a,b} \exp(-\alpha n^r)\, n^{\frac{1}{s'}} \left(\left(1 + \frac{\ln 2}{\alpha n^r}\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right)^{\frac{1}{s'}},$$

де величини C_a *і* $C^*_{a,b}$ *означаються формулами* (6) *і* (7) *при* $a = a(\alpha, r)$, $b = b(\alpha, r)$, *що задані рівностями* (49) *і* (50).

З рівності (48) для величини $\eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n$ неважко одержати двосторонні оцінки

$$\frac{\ln 2}{\alpha r} n^{1-r} \leq \eta(\psi_{r,\alpha}; n) - n \leq (1 + \ln 2^{1/\alpha})^{\frac{1-r}{r}} \frac{\ln 2}{\alpha r} n^{1-r}, \qquad \alpha > 0, \quad r \in (0,1), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{57}$$

З наслідків 2, 4 та формули (57) випливають порядкові рівності

$$E_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C \asymp \exp\left(-\alpha n^r\right) n^{\frac{1-r}{p}}, \qquad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$E_n(L^{\alpha,r}_{\beta,1})_s \asymp \exp\left(-\alpha n^r\right) n^{\frac{1-r}{s'}}, \qquad 1 \leq s \leq \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1.$$

Співставляючи співвідношення (2) і (3) з (5) і (53) відповідно, при виконанні умов теорем 1 та 2 можна записати оцінки

$$C_a \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}} \leq E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C \leq C_{a,b}(p)\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}},$$

$$C_a \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}} \leq E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_s \leq C_{a,b}(s')\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1,$$

де

$$C_{a,b}(p) = \min\left\{(2p)^{1-\frac{1}{p}} C_{a,b}, C^*_{a,b}\right\},$$

а величини $C_{a,b}$ і $C^*_{a,b}$ означені формулами (4) і (7) відповідно.

Обчислення показують, що при невеликих значеннях p, $1 \leq p \leq 7$, $C_{a,b,p} = (2p)^{1-\frac{1}{p}}\, C_{a,b}$, а при великих p, $p \geq 26$, $C_{a,b,p} = C^*_{a,b}$.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. I. – 427 с.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Степанец А. И., Сердюк А. С., Шидлич А. Л.* Классификация бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 12. – С. 1686 – 1708.
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. II. – 468 с.
5. *Сердюк А. С.* Про один лінійний метод наближення періодичних функцій// Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – **1**, № 1. – С. 294 – 336.
6. *Сердюк А. С.* Про найкраще наближення на класах згорток періодичних функцій // Теорія наближення та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **41**. – С. 168 – 189.
7. *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 255 – 282.
8. *Романюк В. С.* Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 131 – 135.
9. *Сердюк А. С., Соколенко І. В.* Рівномірні наближення класів $(\psi, \overline{\beta})$–диференційовних функцій лінійними методами // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2011. – **8**, № 1. – С. 181 – 189.
10. *Сердюк А. С., Соколенко І. В.* Наближення лінійними методами класів $(\psi, \overline{\beta})$-диференційовних функцій // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 245 – 254.
11. *Сердюк А. С., Овсий Е. Ю.* Равномерное приближение периодических функций тригонометрическими суммами специального вида // Arxiv preprint, arXiv:1212.3769, 2013. – 14 c.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.–М.: Физматиз, 1962. – 1100 с.
13. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Одержано 14.10.13