УДК 517.524

Р. І. Дмитришин (Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ)

ПРИЄДНАНІ ГІЛЛЯСТІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ З ДВОМА НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

We construct an algorithm for the expansion of a given formal double power series in the associated branched continued fraction with two independent variables and establish the conditions for the existence of this expansion.

Построен алгоритм разложения заданного формального двойного степенного ряда в присоединенную ветвящуюся цепную дробь с двумя неравнозначными переменными и установлены условия существования такого разложения.

1. Вступ. Багатовимірним узагальненням неперервних дробів є гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) [1] (див. також [2, с. 274 – 280]). При побудові зображень аналітичних функцій гіллястими ланцюговими дробами використовується поняття відповідності. Загальну теорію відповідності для функцій однієї змінної викладено в роботі [3, с. 148 – 160] (див. також [2, с. 241 – 274]), а деякі її аспекти для функцій багатьох змінних — у роботах [4; 5, с. 107 – 109]. Використовуючи принцип відповідності, побудовано алгоритми розвинення функцій двох змінних, заданих формальними подвійними степеневими рядами (ФПСР), у відповідні ГЛД [5, с. 107 – 122; 6 – 14].

У цій статті розглянуто приєднаний ГЛД з двома нерівнозначними змінними

$$1 + F_0(z_1) + \cfrac{k_{01}z_2}{1 + l_{01}z_2 + z_2F_1(z_1) - \mathop{\mathrm{D}}_{s=2}^{\infty} \dfrac{k_{0s}z_2^2}{1 + l_{0s}z_2 + z_2F_s(z_1)}}, \tag{1}$$

де

$$F_p(z_1) = \cfrac{k_{1p}z_1}{1 + l_{1p}z_1 - \mathop{\mathrm{D}}_{r=2}^{\infty} \dfrac{k_{rp}z_1^2}{1 + l_{rp}z_1}}, \quad p \geq 0,$$

$k_{rs},\ l_{rs},\ r \geq 0,\ s \geq 0,\ r + s \geq 1,$ — комплексні числа, $k_{rs} \neq 0,\ r \geq 0,\ s \geq 0,\ r + s \geq 1,$ $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, який є узагальненням приєднаного неперервного дробу

$$1 + \cfrac{k_1z}{1 + l_1z - \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty} \dfrac{k_nz^2}{1 + l_nz}} = 1 + \cfrac{k_1z}{1 + l_1z - \cfrac{k_2z^2}{1 + l_2z - \cfrac{k_3z^2}{1 + l_3z - \ddots}}},$$

де $k_n,\ l_n,\ n \geq 1,$ — комплексні числа, $k_n \neq 0,\ n \geq 1,\ z \in \mathbb{C}$. Доведено існування єдиного ФПСР

$$L(z_1, z_2) = 1 + \sum_{\substack{r+s\geq 1\\ r\geq 0,\ s\geq 0}} c_{rs}z_1^rz_2^s, \tag{2}$$

де $c_{rs} \in \mathbb{C},\ r \geq 0,\ s \geq 0,\ r + s \geq 1,\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, до якого дріб (1) буде відповідним, і встановлено, що порядок відповідності його n-го підхідного дробу дорівнює $\nu_n = 2n + 1$. Побудовано і досліджено алгоритм розвинення заданого ФПСР (2) у відповідний приєднаний ГЛД з двома нерівнозначними змінними (1).

2. Відповідність приєднаних ГЛД з двома нерівнозначними змінними. Позначимо через $\mathcal{L}$ множину всіх ФПСР вигляду (2). Очевидно, що ця множина утворює кільце з одиницею відносно операцій додавання і множення рядів. Задамо відображення $\lambda\colon \mathcal{L} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ за таким правилом: $\lambda\big(L(z_1,z_2)\big) = \infty$, якщо $L(z_1,z_2) \equiv 0$; $\lambda\big(L(z_1,z_2)\big) = n$, якщо $L(z_1,z_2) \not\equiv 0$, де n — найменший степінь однорідного многочлена, для якого $c_{rs} \neq 0$, тобто $n = r+s$. Розглянемо послідовність раціональних функцій

$$f_n(z_1,z_2) = \frac{P_{m_n}(z_1,z_2)}{Q_{l_n}(z_1,z_2)}, \quad n \geq 1,$$

де $P_{m_n}(z_1,z_2)$, $Q_{l_n}(z_1,z_2)$ — многочлени степеня m_n і l_n відповідно, $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$, причому $Q_{l_n}(0,0) \neq 0$.

Послідовність $\big\{f_n(z_1,z_2)\big\}$ є відповідною до ФПСР (2) в точці $(0,0)$, якщо

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda\Big(L(z_1,z_2) - L\big(f_n(z_1,z_2)\big)\Big) = +\infty,$$

де $L\big(f_n(z_1,z_2)\big)$ — розвинення функції $f_n(z_1,z_2)$ в подвійний ряд Тейлора в точці $(0,0)$. Порядок відповідності ν_n до функції $f_n(z_1,z_2)$ визначається за формулою $\nu_n = \lambda\Big(L(z_1,z_2) - L\big(f_n(z_1,z_2)\big)\Big)$. Це означає, що розвинення функції $f_n(z_1,z_2)$ у ФПСР збігається з $L(z_1,z_2)$ за всіма однорідними многочленами до степеня $\nu_n - 1$ включно.

Для залишків дробу (1) введемо позначення:

$$Q_p^{(s-p)}(z_1,z_2) = 1 + l_{0p}z_2 + z_2F_p^{(s-p)}(z_1) - \mathop{\mathrm{D}}_{r=p+1}^{s} \frac{k_{0r}z_2^2}{1 + l_{0r}z_2 + z_2F_r^{(s-r)}(z_1)},$$

$$F_n^{(s-n)}(z_1) = \frac{k_{1n}z_1}{1 + l_{1n}z_1 - \mathop{\mathrm{D}}_{r=2}^{s-n} \dfrac{k_{rn}z_1^2}{1 + l_{rn}z_1}}, \qquad Q_{p+m,p}^{(s-p)}(z_1) = 1 + l_{mp}z_1 - \mathop{\mathrm{D}}_{r=m+1}^{s-p} \frac{k_{rp}z_1^2}{1 + l_{rp}z_1},$$

де $s \geq 1$, $1 \leq p \leq s-1$, $p \leq n \leq s-2$, $1 \leq m \leq s-p-1$, причому $Q_s^{(0)}(z_1,z_2) = 1 + l_{0s}z_2$, $F_s^{(0)}(z_1) = 0$, $F_{s-1}^{(1)}(z_1) = k_{1,s-1}z_1/(1 + l_{1,s-1}z_1)$, $Q_{s,p}^{(s-p)}(z_1) = 1 + l_{s-p,p}z_1$. Звідси отримаємо такі рекурентні співвідношення:

$$Q_p^{(s-p)}(z_1,z_2) = 1 + l_{0p}z_2 + z_2F_p^{(s-p)}(z_1) - \frac{k_{0,p+1}z_2^2}{Q_{p+1}^{(s-p-1)}(z_1,z_2)}, \tag{3}$$

$$Q_{p+m,p}^{(s-p)}(z_1) = 1 + l_{mp}z_1 - \frac{k_{m+1,p}z_1^2}{Q_{p+m+1,p}^{(s-p)}(z_1)}, \tag{4}$$

де $s \geq 1$, $1 \leq p \leq s-1$, $1 \leq m \leq s-p-1$.

Нехай

$$g_n(z_1,z_2) = 1 + F_0^{(n)}(z_1) + \frac{k_{01}z_2}{Q_1^{(n-1)}(z_1,z_2)}$$

— n-й підхідний дріб приєднаного ГЛД з двома нерівнозначними змінними (1), $n \geq 1$.

Відповідність дробу (1) до ФПСР (2) означає, що послідовність $\big\{g_n(z_1,z_2)\big\}$ є відповідною до $L(z_1,z_2)$.

Теорема 1. *Для приєднаного ГЛД з двома нерівнозначними змінними* (1) *існує єдиний ФПСР вигляду* (2), *до якого цей дріб буде відповідним. Порядок відповідності n-го підхідного дробу $g_n(z_1, z_2)$ дорівнює $\nu_n = 2n+1$, і, отже, розвинення $g_n(z_1, z_2)$ у подвійний ряд Тейлора у точці $(0,0)$ має вигляд*

$$g_n(z_1, z_2) = 1 + \sum_{\substack{1 \le r+s \le 2n \\ r \ge 0,\, s \ge 0}} c_{rs} z_1^r z_2^s + \sum_{\substack{p+q \ge 2n+1 \\ p \ge 0,\, q \ge 0}} \gamma_{pq}^{(n)} z_1^p z_2^q, \quad n \ge 1, \tag{5}$$

де $c_{rs} \in \mathbb{C}$, $r \ge 0$, $s \ge 0$, $1 \le r+s \le 2n$, $\gamma_{pq}^{(n)} \in \mathbb{C}$, $p \ge 0$, $q \ge 0$, $p+q \ge 2n+1$, $n \ge 1$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

Доведення. Оскільки $Q_p^{(n-p)}(0,0) = 1$ для будь-якого індексу p, $1 \le p \le n$, $n \ge 1$, і $Q_{p+m,p}^{(n-p)}(0) = 1$ для будь-якого індексу m, $1 \le m \le n-p$, $1 \le p \le n$, $n \ge 1$, то дріб $1/Q_p^{(n-p)}(z_1, z_2)$ має розвинення у ФПСР вигляду (2) і $1/Q_{p+m,p}^{(n-p)}(z_1)$ також має розвинення у ФПСР вигляду (2), де $s = 0$. Тоді для кожного n, $n \ge 1$, n-й підхідний дріб $g_n(z_1, z_2)$ є голоморфною функцією в початку координат.

Нехай розвинення $g_n(z_1, z_2)$ у подвійний ряд Тейлора у точці $(0,0)$ має вигляд

$$g_n(z_1, z_2) = 1 + \sum_{\substack{r+s \ge 1 \\ r \ge 0,\, s \ge 0}} \gamma_{rs}^{(n)} z_1^r z_2^s,$$

де $\gamma_{rs}^{(n)} \in \mathbb{C}$, $r \ge 0$, $s \ge 0$, $r+s \ge 1$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $n \ge 1$. Оскільки $Q_p^{(n-p)}(z_1, z_2) \not\equiv 0$ і $Q_{p+m,p}^{(n-p)}(z_1) \not\equiv 0$ для всіх індексів, то, застосовуючи метод, запропонований в [1, с. 28], і рекурентні співвідношення (3), (4), отримуємо формулу різниці підхідних дробів приєднаного ГЛД з двома нерівнозначними змінними (1) при $m > n \ge 2$, а саме,

$$g_m(z_1, z_2) - g_n(z_1, z_2) = F_0^{(m)}(z_1) - F_0^{(n)}(z_1) -$$

$$- \sum_{r=1}^{n} \frac{z_2^{2r} \prod_{s=1}^{r} k_{0s} \left(F_r^{(m-r)}(z_1) - F_r^{(n-r)}(z_1) \right)}{\prod_{s=1}^{r} Q_s^{(m-s)}(z_1, z_2) Q_s^{(n-s)}(z_1, z_2)} + \frac{z_2^{2n+1} \prod_{s=1}^{n+1} k_{0s}}{\prod_{s=1}^{n+1} Q_s^{(m-s)}(z_1, z_2) \prod_{s=1}^{n} Q_s^{(n-s)}(z_1, z_2)},$$

де

$$F_p^{(m-p)}(z_1) - F_p^{(n-p)}(z_1) = \frac{z_1^{2(n-p)+1} \prod_{r=1}^{n-p} k_{rp}}{\prod_{r=1}^{n-p-1} Q_{p+r,p}^{(n-p)}(z_1) \prod_{r=1}^{n-p} Q_{p+r,p}^{(m-p)}(z_1)}, \quad 0 \le p \le n.$$

Звідси маємо

$$g_m(z_1, z_2) - g_n(z_1, z_2) = \sum_{\substack{r+s \ge 2n+1 \\ r \ge 0,\, s \ge 0}} \left(\gamma_{rs}^{(m)} - \gamma_{rs}^{(n)} \right) z_1^r z_2^s, \quad m > n \ge 2,$$

в деякому околі $(0,0)$.

Таким чином, для кожного m, $m > n \ge 2$, рівності $\gamma_{rs}^{(m)} = \gamma_{rs}^{(n)}$ справджуються для будь-яких індексів $r \ge 0$ і $s \ge 0$ таких, що $1 \le r+s \le 2n$. Приєднаний ГЛД з двома нерівнозначними змінними (1) є відповідним до ФПСР (2), де

$$c_{rs} = \gamma_{rs}^{(\varphi(r,s))}, \qquad \varphi(r,s) = 1 + \left[\frac{2(r+s)-1}{4}\right]$$

(тут квадратні дужки означають цілу частину числа) для всіх r і s таких, що $r+s \geq 1$, оскільки при $n \geq 1$

$$L(z_1,z_2) - g_n(z_1,z_2) = \sum_{\substack{r+s \geq 2n+1\\ r\geq 0,\, s\geq 0}} (\gamma_{rs}^{(\varphi(r,s))} - \gamma_{rs}^{(n)}) z_1^r z_2^s.$$

Звідси порядок відповідності n-го підхідного дробу $g_n(z_1,z_2)$ дорівнює $\nu_n = 2n+1$ і розвинення $g_n(z_1,z_2)$ у подвійний ряд Тейлора у точці $(0,0)$ має вигляд (5).

Доведемо, що ФПСР $L(z_1,z_2)$ відповідний до ГЛД з двома нерівнозначними змінними (1) визначається однозначно. Припустимо, що дріб (1) є також відповідним до ряду

$$L'(z_1,z_2) = 1 + \sum_{\substack{r+s \geq 1\\ r\geq 0,\, s\geq 0}} \alpha_{rs}^{(\varphi(r,s))} z_1^r z_2^s,$$

де $\alpha_{rs}^{(\varphi(r,s))} \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s \geq 1$, $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$. Оскільки для будь-якого $n \geq 1$

$$L'(z_1,z_2) - g_n(z_1,z_2) = \sum_{\substack{r+s \geq 2n+1\\ r\geq 0,\, s\geq 0}} (\alpha_{rs}^{(\varphi(r,s))} - \gamma_{rs}^{(n)}) z_1^r z_2^s,$$

то безпосередньо маємо $\alpha_{rs}^{(\varphi(r,s))} = \gamma_{rs}^{(\varphi(r,s))}$ для всіх r і s таких, що $1 \leq r+s \leq 2n$, тобто $L(z_1,z_2)$ є єдиним.

Теорему доведено.

3. Алгоритм розвинення заданого ФПСР у приєднаний ГЛД з двома нерівнозначними змінними. Нехай задано ФПРС (2). Позначимо $c_{rs}^{(0)} = c_{rs}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s \geq 1$. Ряд (2) за умови, що $c_{01}^{(0)} \neq 0$, запишемо у вигляді $L(z_1,z_2) = P_0(z_1) + c_{01}^{(0)} z_2 R_0(z_1,z_2)$, де

$$P_0(z_1) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} c_{r0}^{(0)} z_1^r, \qquad R_0(z_1,z_2) = \sum_{\substack{r+s \geq 0\\ r\geq 0,\, s\geq 0}} \frac{c_{r,s+1}^{(0)}}{c_{01}^{(0)}} z_1^r z_2^s.$$

Нехай

$$H_{10}^{(0)}(n) = \begin{vmatrix} c_{10}^{(0)} & c_{20}^{(0)} & \ldots & c_{n0}^{(0)} \\ c_{20}^{(0)} & c_{30}^{(0)} & \ldots & c_{n+1,0}^{(0)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n0}^{(0)} & c_{n+1,0}^{(0)} & \ldots & c_{2n-1,0}^{(0)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad n \geq 1 \tag{6}$$

(зауважимо, що $H_{10}^{(0)}(n)$ — визначник Ганкеля, який позв'язаний з формальним степеневим рядом $P_0(z_1)$). Тоді згідно з теоремою 7.14 [3, с. 244–248] існують числа k_{n0} і l_{n0}, $n \geq 1$, такі, що $k_{n0} \neq 0$, $n \geq 1$, і

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} c_{r0}^{(0)} z_1^r \sim 1 + \cfrac{k_{10} z_1}{1 + l_{10} z_1 - \mathrm{D}_{r=2}^{\infty} \dfrac{k_{r0} z_1^2}{1 + l_{r0} z_1}},$$

де символ "$\sim$" означає відповідність між рядом і дробом. Коефіцієнти k_{n0} і l_{n0}, $n \geq 1$, обчислюються за формулами

$$k_{n0} = \frac{H_{10}^{(0)}(n)H_{10}^{(0)}(n-2)}{(H_{10}^{(0)}(n-1))^2}, \qquad l_{n0} = \frac{\chi_{10}^{(0)}(n-1)}{H_{10}^{(0)}(n-1)} - \frac{\chi_{10}^{(0)}(n)}{H_{10}^{(0)}(n)}, \quad n \geq 1, \tag{7}$$

де $H_{10}^{(0)}(-1) = H_{10}^{(0)}(0) = 1$, $\chi_{10}^{(0)}(0) = 0$, $\chi_{10}^{(0)}(1) = c_{20}^{(0)}$,

$$\chi_{10}^{(0)}(n) = \begin{vmatrix} c_{10}^{(0)} & c_{20}^{(0)} & \ldots & c_{n-1,0}^{(0)} & c_{n+1,0}^{(0)} \\ c_{20}^{(0)} & c_{30}^{(0)} & \ldots & c_{n0}^{(0)} & c_{n+2,0}^{(0)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n0}^{(0)} & c_{n+1,0}^{(0)} & \ldots & c_{2n-2,0}^{(0)} & c_{2n,0}^{(0)} \end{vmatrix}, \quad n \geq 2.$$

Нехай

$$H_{01}^{(0)}(n) = \begin{vmatrix} c_{01}^{(0)} & c_{02}^{(0)} & \ldots & c_{0n}^{(0)} \\ c_{02}^{(0)} & c_{03}^{(0)} & \ldots & c_{0,n+1}^{(0)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{0n}^{(0)} & c_{0,n+1}^{(0)} & \ldots & c_{0,2n-1}^{(0)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad n \geq 1. \tag{8}$$

Тоді згідно з теоремою 7.14 [3, с. 244 – 248] існують числа k'_{0n} і l'_{0n}, $n \geq 1$, такі, що $k'_{0n} \neq 0$, $n \geq 1$, і

$$\sum_{s=1}^{\infty} c_{0s}^{(0)} z_2^s \sim \frac{k'_{01} z_2}{1 + l'_{01} z_2 - \mathop{\mathrm{D}}_{s=2}^{\infty} \dfrac{k'_{0s} z_2^2}{1 + l'_{0s} z_2}}.$$

Коефіцієнти k'_{0n} і l'_{0n}, $n \geq 1$, обчислюються за формулами

$$k'_{0n} = \frac{H_{01}^{(0)}(n)H_{01}^{(0)}(n-2)}{\left(H_{01}^{(0)}(n-1)\right)^2}, \qquad l'_{0n} = \frac{\chi_{01}^{(0)}(n-1)}{H_{01}^{(0)}(n-1)} - \frac{\chi_{01}^{(0)}(n)}{H_{01}^{(0)}(n)}, \quad n \geq 1, \tag{9}$$

де $H_{01}^{(0)}(-1) = H_{01}^{(0)}(0) = 1$, $\chi_{01}^{(0)}(0) = 0$, $\chi_{01}^{(0)}(1) = c_{02}^{(0)}$,

$$\chi_{01}^{(0)}(n) = \begin{vmatrix} c_{01}^{(0)} & c_{02}^{(0)} & \ldots & c_{0,n-1}^{(0)} & c_{0,n+1}^{(0)} \\ c_{02}^{(0)} & c_{03}^{(0)} & \ldots & c_{0n}^{(0)} & c_{0,n+2}^{(0)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{0n}^{(0)} & c_{0,n+1}^{(0)} & \ldots & c_{0,2n-2}^{(0)} & c_{0,2n}^{(0)} \end{vmatrix}, \quad n \geq 2.$$

Позначимо через

$$R'_0(z_1, z_2) = 1 + \sum_{\substack{r+s \geq 1 \\ r \geq 0,\, s \geq 0}} c_{rs}^{(1)} z_1^r z_2^s \tag{10}$$

ряд, обернений до ряду $R_0(z_1, z_2)$. Коефіцієнти ряду (10) однозначно визначаються за допомогою рекурентних формул

$$c_{rs}^{(1)} = -\sum_{\substack{1\leq p+q\leq r+s\\ p\geq 0,\ q\geq 0}} c_{r-p,s-q}^{(1)} \frac{c_{p,q+1}^{(0)}}{c_{01}^{(0)}}, \qquad r\geq 0, \quad s\geq 0, \quad r+s\geq 1, \tag{11}$$

де $c_{00}^{(1)} = 1$, причому $c_{kl}^{(1)} = 0$, якщо $k<0$ або $l<0$. Ряд (10) за умов, що $c_{02}^{(1)} \neq 0$ і

$$c_{n0}^{(h)} = 0, \quad n\geq 1, \tag{12}$$

при $h=1$, запишемо у вигляді $R_0'(z_1,z_2) = 1 + c_{01}^{(1)} z_2 + z_2 P_1(z_1) + c_{02}^{(1)} z_2^2 R_1(z_1,z_2)$, де

$$P_1(z_1) = \sum_{r=1}^{\infty} c_{r1}^{(1)} z_1^r, \qquad R_1(z_1,z_2) = \sum_{\substack{r+s\geq 0\\ r\geq 0,\ s\geq 0}} \frac{c_{r,s+2}^{(1)}}{c_{02}^{(1)}} z_1^r z_2^s.$$

Тоді $R_0(z_1,z_2)$ запишемо у вигляді

$$R_0(z_1,z_2) = \frac{1}{1 + c_{01}^{(1)} z_2 + z_2 P_1(z_1) + c_{02}^{(1)} z_2^2 R_1(z_1,z_2)}.$$

Оскільки $c_{01}^{(0)} = k_{01}'$, $c_{01}^{(1)} = -c_{02}^{(0)}/c_{01}^{(0)} = l_{01}'$, то покладемо $k_{01} = k_{01}'$ і $l_{01} = l_{01}'$.

Нехай

$$H_{11}^{(h)}(n) = \begin{vmatrix} c_{11}^{(h)} & c_{21}^{(h)} & \ldots & c_{n1}^{(h)} \\ c_{21}^{(h)} & c_{31}^{(h)} & \ldots & c_{n+1,1}^{(h)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}^{(h)} & c_{n+1,1}^{(h)} & \ldots & c_{2n-1,1}^{(h)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad n\geq 1, \tag{13}$$

при $h=1$. Тоді згідно з теоремою 7.14 [3, с. 244–248] існують числа k_{n1} і l_{n1}, $n\geq 1$, такі, що $k_{n1}\neq 0$, $n\geq 1$, і

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_{r1}^{(1)} z_1^r \sim \frac{k_{11} z_1}{1 + l_{11} z_1 - \mathrm{D}_{r=2}^{\infty} \dfrac{k_{r1} z_1^2}{1 + l_{r1} z_1}}.$$

Коефіцієнти k_{n1} і l_{n1}, $n\geq 1$, обчислюються за формулами

$$k_{nh} = \frac{H_{11}^{(h)}(n) H_{11}^{(h)}(n-2)}{(H_{11}^{(h)}(n-1))^2}, \qquad l_{nh} = \frac{\chi_{11}^{(h)}(n-1)}{H_{11}^{(h)}(n-1)} - \frac{\chi_{11}^{(h)}(n)}{H_{11}^{(h)}(n)}, \quad n\geq 1, \tag{14}$$

де $H_{11}^{(h)}(-1) = H_{11}^{(h)}(0) = 1$, $\chi_{11}^{(h)}(0) = 0$, $\chi_{11}^{(h)}(1) = c_{11}^{(h)}$,

$$\chi_{11}^{(h)}(n) = \begin{vmatrix} c_{11}^{(h)} & c_{21}^{(h)} & \ldots & c_{n-1,1}^{(h)} & c_{n+1,1}^{(h)} \\ c_{21}^{(h)} & c_{31}^{(h)} & \ldots & c_{n1}^{(h)} & c_{n+2,1}^{(h)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}^{(h)} & c_{n+1,1}^{(h)} & \ldots & c_{2n-2,1}^{(h)} & c_{2n,1}^{(h)} \end{vmatrix}$$

при $h=1$.

Позначимо через

$$R_1'(z_1, z_2) = 1 + \sum_{\substack{r+s\geq 1 \\ r\geq 0,\ s\geq 0}} c_{rs}^{(2)} z_1^r z_2^s \tag{15}$$

ряд, обернений до ряду $R_1(z_1, z_2)$. Коефіцієнти ряду (15) однозначно визначаються за допомогою рекурентних формул

$$c_{rs}^{(h)} = -\sum_{\substack{1\leq p+q\leq r+s \\ p\geq 0,\ q\geq 0}} c_{r-p,s-q}^{(h)} \frac{c_{p,q+2}^{(h-1)}}{c_{02}^{(h-1)}}, \qquad r\geq 0, \quad s\geq 0, \quad r+s\geq 1, \tag{16}$$

де $c_{00}^{(h)} = 1$, причому $c_{kl}^{(h)} = 0$, якщо $k < 0$ або $l < 0$, при $h = 2$. Ряд (15) за умов (12) при $h = 2$ і $c_{02}^{(2)} \neq 0$ запишемо у вигляді $R_1'(z_1, z_2) = 1 + c_{01}^{(2)} z_2 + z_2 P_2(z_1) + c_{02}^{(2)} z_2^2 R_2(z_1, z_2)$, де

$$P_2(z_1) = \sum_{r=1}^{\infty} c_{r1}^{(2)} z_1^r, \qquad R_2(z_1, z_2) = \sum_{\substack{r+s\geq 0 \\ r\geq 0,\ s\geq 0}} \frac{c_{r,s+2}^{(2)}}{c_{02}^{(1)}} z_1^r z_2^s.$$

Тоді $R_1(z_1, z_2)$ запишемо у вигляді

$$R_1(z_1, z_2) = \frac{1}{1 + c_{01}^{(2)} z_2 + z_2 P_2(z_1) + c_{02}^{(2)} z_2^2 R_2(z_1, z_2)}.$$

Оскільки

$$c_{02}^{(1)} = -\frac{c_{01}^{(1)} c_{02}^{(0)} + c_{03}^{(0)}}{c_{01}^{(0)}} = -\frac{c_{03}^{(0)} c_{01}^{(0)} - (c_{02}^{(0)})^2}{(c_{01}^{(0)})^2} = -k_{02}',$$

$$c_{01}^{(2)} = -\frac{c_{03}^{(1)}}{c_{02}^{(1)}} = -\frac{c_{02}^{(1)} c_{02}^{(0)} + c_{01}^{(1)} c_{03}^{(0)} + c_{04}^{(0)}}{c_{01}^{(1)} c_{02}^{(0)} + c_{03}^{(0)}} = \frac{c_{02}^{(0)}}{c_{01}^{(0)}} - \frac{c_{04}^{(0)} c_{01}^{(0)} - c_{03}^{(0)} c_{02}^{(0)}}{c_{03}^{(0)} c_{01}^{(0)} - (c_{02}^{(0)})^2} = l_{02}',$$

то покладемо $k_{02} = k_{02}'$ і $l_{02} = l_{02}'$.

Обчислюючи далі коефіцієнти $c_{rs}^{(h)}$, $r\geq 0$, $s\geq 0$, $r+s\geq 1$, $h\geq 3$, за допомогою рекурентних формул (16) і продовжуючи процес ітерації, за умов (6), (8) та умов (12) і (13) при $h\geq 1$, для ряду (2) отримуємо дріб (1), де $k_{n0}, l_{n0}, n\geq 1$, і $k_{nh}, l_{nh}, n\geq 1, h\geq 1$, визначаються за формулами (7) і (14) відповідно; $k_{0n} = k_{0n}'$, $l_{0n} = l_{0n}'$, $n\geq 1$, де $k_{0n}', l_{0n}', n\geq 1$, визначаються за формулами (9).

Таким чином, побудовано рекурентний алгоритм обчислення коефіцієнтів приєднаного ГЛД з двома нерівнозначними змінними (1), відповідного до заданого ФПСР (2). Відповідність дробу (1) до ряду (2)доводиться за схемою, запропонованою в роботі [11].

Отже, справджується така теорема.

Теорема 2. *Приєднаний ГЛД з двома нерівнозначними змінними* (1) *є відповідним до заданого ФПСР* (2) *тоді і лише тоді, коли виконуються умови* (6), (8) *і умови* (12), (13) *при* $h\geq 1$.

Розглянемо приклад застосування алгоритму розвинення заданого ФПСР у приєднаний ГЛД з двома нерівнозначними змінними.

Функція

$$h(z_1,z_2)=1+\sqrt{z_1}\mathrm{arctg}\sqrt{z_1}+\sqrt{\frac{z_2}{1+z_2\sqrt{z_1}\mathrm{arctg}\sqrt{z_1}}}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{z_2}{1+z_2\sqrt{z_1}\mathrm{arctg}\sqrt{z_1}}}$$

розвивається в точці $(0,0)$ у ФПСР вигляду

$$L(z_1,z_2)=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}z_1^r}{2r-1}+$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}z_2^s}{2s-1}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{\alpha(r)=r}\frac{(n-\alpha'(r))!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_r!}\prod_{p=1}^{r}\left(\frac{-z_2}{2p-1}\right)^{\alpha_p}\right)z_1^r\right)^s,$$

де α_p, $1\le p\le r$, $r\ge 1$, — цілі невід'ємні числа, $\alpha(r)=\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+r\alpha_r$, $\alpha'(r)=\alpha_2+2\alpha_3+\ldots$ $\ldots+(r-1)\alpha_r$, $r\ge 1$, $\sqrt{1}=1$. Можна показати, що коефіцієнти цього ряду задовольняють умови теореми 2. Застосовуючи побудований вище алгоритм, отримуємо значення коефіцієнтів k_{rs}, l_{rs}, $r\ge 0$, $s\ge 0$, $r+s\ge 1$, приєднаного ГЛД з двома нерівнозначними змінними, наведені в табл. 1 для $1\le r\le 5$ і $s\ge 0$.

Таблиця 1

r	1	2	3	4	5
$k_{rs}=k_{0r}$	1	4/45	16/245	300/1573	3136/49725
$l_{rs}=l_{0r}$	1/3	11/21	39/77	83/165	143/285

Звідси маємо такі наближення для $h(z_1,z_2)$:

$$h_1(z_1,z_2)=1+\frac{z_1}{1+\frac{1}{3}z_1}+\frac{z_2}{1+\frac{1}{3}z_2},$$

$$h_2(z_1,z_2)=1+\frac{z_1}{1+\frac{1}{3}z_1-\frac{\frac{4}{45}z_1^2}{1+\frac{11}{21}z_1}}+\frac{z_2}{1+\frac{1}{3}z_2+\frac{z_1z_2}{1+\frac{1}{3}z_1}-\frac{\frac{4}{45}z_2^2}{1+\frac{11}{21}z_2}},\quad\ldots.$$

Результати обчислення функції $h(z_1,z_2)$ і її наближень $h_n(z_1,z_2)$, $1\le n\le 5$, для різних значень z_1, z_2 наведено у табл. 2.

Із аналізу результатів обчислень робимо висновок, що абсолютна похибка $\Delta_n(z_1,z_2)=$ $=\left|h_n(z_1,z_2)-h(z_1,z_2)\right|$ наближення функції $h(z_1,z_2)$ із ростом індексу n зменшується, і в точках, близьких до нуля, якість наближення є найкращою:

$$\Delta_5(0.03,0.03)=2.90878\cdot 10^{-14},\qquad \Delta_5(1,0.4)=6.57215\cdot 10^{-5},$$

Таблиця 2

(z_1, z_2)	$(0.03, 0.03)$	$(1, 0.4)$	$(0.2, 2)$	$(2, 3)$
$h(z_1, z_2)$	1.0593843828577	2.0635398612573	2.2469308606102	2.8568705236563
$h_1(z_1, z_2)$	1.0594059405940	2.1029411764705	2.3875	3.7
$h_2(z_1, z_2)$	1.0593843866619	2.0656918134485	2.2587179272919	2.9067907536846
$h_3(z_1, z_2)$	1.0593843828581	2.0636107315514	2.2475421732550	2.8600491449866
$h_4(z_1, z_2)$	1.0593843828577	2.0636107726801	2.2475107042783	2.8590461344314
$h_5(z_1, z_2)$	1.0593843828577	2.0636055827164	2.2474069299011	2.8585104446459

$$\Delta_5(0.2, 2) = 4.76069 \cdot 10^{-4}, \qquad \Delta_5(2, 3) = 1.639921 \cdot 10^{-3}.$$

4. Приєднані ГЛД з двома нерівнозначними змінними і двовимірні J-дроби з нерівнозначними змінними. Якщо в приєднаному ГЛД з двома нерівнозначними змінними (1) покласти $z_1 = 1/\xi_1$, $z_2 = 1/\xi_2$, знехтувати першим членом, що дорівнює 1, і провести перетворення еквівалентності (див. [1, с. 29–33]), то отримаємо двовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними

$$\Psi_0(\xi_1) + \cfrac{k_{01}}{l_{01} + \xi_2 + \Psi_1(\xi_1) - \mathop{\mathrm{D}}_{s=2}^{\infty} \dfrac{k_{0s}}{l_{0s} + \xi_2 + \Psi_s(\xi_1)}}, \tag{17}$$

де

$$\Psi_p(\xi_1) = \cfrac{k_{1p}}{l_{1p} + \xi_1 - \mathop{\mathrm{D}}_{r=2}^{\infty} \dfrac{k_{rp}}{l_{rp} + \xi_1}}, \quad p \geq 0,$$

k_{rs}, l_{rs}, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + s \geq 1$, — комплексні числа, $k_{rs} \neq 0$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + s \geq 1$, $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$, який є узагальненням неперервного J-дробу

$$\cfrac{k_1}{l_1 + \xi - \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty} \dfrac{k_n}{l_n + \xi}} = \cfrac{k_1}{l_1 + \xi - \cfrac{k_2}{l_2 + \xi - \cfrac{k_3}{l_3 + \xi - \ddots}}},$$

в якому k_n, l_n, $n \geq 1$, — комплексні числа, $k_n \neq 0$, $n \geq 1$, $\xi \in \mathbb{C}$.

Послідовність раціональних функцій $\{f_n(\xi_1, \xi_2)\}$, де $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$, є відповідною до формального подвійного ряду Лорана (ФПРЛ)

$$L^*(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\substack{r+s \geq 1 \\ r \geq 0,\, s \geq 0}} \frac{c_{rs}}{\xi_1^r \xi_2^s}, \tag{18}$$

де $c_{rs} \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + s \geq 1$, $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$, в (∞, ∞), якщо послідовність $\{f_n(1/z_1, 1/z_2)\}$ є відповідною до ФПСР в точці $(0, 0)$, отриманого із (18) заміною ξ_1, ξ_2 на $1/z_1$, $1/z_2$ відповідно.

У наступній теоремі йдеться про зв'язок між приєднаними ГЛД з двома нерівнозначними змінними і двовимірними J-дробами з нерівнозначними змінними; її доведення є простим застосуванням теореми 1.

Теорема 3. *Нехай* $g_n(z_1, z_2)$ *і* $g_n^*(\xi_1, \xi_2)$ — n*-ті підхідні дроби відповідно приєднаного ГЛД з двома нерівнозначними змінними* (1) *і двовимірного* J*-дробу з нерівнозначними змінними* (17), *де* $z_1 = 1/\xi_1$, $z_2 = 1/\xi_2$, *і нехай приєднаний ГЛД з двома нерівнозначними змінними* (1) *є відповідним до ФПСР* (2) *в точці* $(0, 0)$. *Тоді*:

1) *для будь-якого* n, $n \geq 1$, *справджується рівність* $g_n(z_1, z_2) = 1 + g_n^*(\xi_1, \xi_2)$;

2) *формальне розвинення Лорана* n*-го підхідного дробу* $g_n^*(\xi_1, \xi_2)$ *в* (∞, ∞) *має вигляд*

$$g_n^*(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\substack{1 \leq r+s \leq 2n \\ r \geq 0, s \geq 0}} \frac{c_{rs}}{\xi_1^r \xi_2^s} + \sum_{\substack{p+q \geq 2n+1 \\ p \geq 0, q \geq 0}} \frac{\gamma_{pq}^{(n)}}{\xi_1^p \xi_2^q}, \quad n \geq 1,$$

де $c_{rs} \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $1 \leq r + s \leq 2n$, $\gamma_{pq}^{(n)} \in \mathbb{C}$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q \geq 2n + 1$, $n \geq 1$, $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$, *і, отже, двовимірний* J*-дріб з нерівнозначними змінними* (17) *є відповідним до ФПРЛ* (18) *в* (∞, ∞).

1. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam etc.: North-Holland, 1992. – 606 p.
3. *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications // Encycl. Math. and its Appl. – London etc.: Addison-Wesley, 1980. – **11**. – 429 p.
4. *Гоєнко Н. П.* Принцип відповідності та збіжність послідовностей аналітичних функцій багатьох змінних // Мат. вісн. НТШ. – 2007. – **4**. – С. 42 – 48.
5. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, 2010. – 218 с.
6. *Баран О. Є., Дмитришин Р. І.* Деякі типи гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до кратних степеневих рядів // Теорія наближення функцій та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2000. – Вип. 31. – С. 82 – 92.
7. *Боднар Д. И.* Соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными частными числителями для двойного степенного ряда // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 474 – 482.
8. *Cuyt A., Verdonk B.* A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximations // Appl. Numer. Math. – 1988. – **4**. – P. 263 – 271.
9. *Dmytryshyn R. I.* On the expansion of some functions in a two-dimensional g-fraction with independent variables // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, № 3. – P. 320 – 327.
10. *Dmytryshyn R. I.* The multidimensional generalization of g-fractions and their application // J. Comput. and Appl. Math. – 2004. – **164-165**. – P. 265 – 284.
11. *Dmytryshyn R. I.* The two-dimensional g-fraction with independent variables for double power series // J. Approxim. Theory. – 2012. – **164**, № 12. – P. 1520 – 1539.
12. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. – 1978. – № 7. – С. 614 – 617.
13. *Murphy J. F., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comput. and Appl. Math. – 1978. – **4**, № 3. – P. 181 – 190.
14. *Siemaszko W.* Branched continued fractions for double power series // J. Comput. and Appl. Math. – 1980. – **6**, № 2. – P. 121 – 125.

Одержано 22.08.13,
після доопрацювання — 04.05.14