УДК 515.14

С. И. Максименко, Б. Г. Фещенко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА 2-ТОРЕ

Let $f: T^2 \to \mathbb{R}$ be a Morse function on a 2-torus, let $\mathcal{S}(f)$ and $\mathcal{O}(f)$ be, respectively, its stabilizer and orbit with respect to the right action of the group $\mathcal{D}(T^2)$ of diffeomorphisms of T^2, let $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$, be the identity path component of the group $\mathcal{D}(T^2)$, and let $\mathcal{S}'(f) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$. We present sufficient conditions under which

$$\pi_1\mathcal{O}(f) \;\cong\; \pi_1\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2) \times \pi_0\mathcal{S}'(f) \;\equiv\; \mathbb{Z}^2 \times \pi_0\mathcal{S}'(f).$$

The obtained result is true for a larger class of functions whose critical points are equivalent to homogeneous polynomials without multiple factors.

Нехай $f: T^2 \to \mathbb{R}$ — функція Морса на 2-торі, $\mathcal{S}(f)$ та $\mathcal{O}(f)$ — її стабілізатор та орбіта відносно правої дії групи дифеоморфізмів $\mathcal{D}(T^2)$, $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$ — тотожна компонента групи $\mathcal{D}(T^2)$ і $\mathcal{S}'(f) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$. В статті наведено достатні умови, за яких

$$\pi_1\mathcal{O}(f) \;\cong\; \pi_1\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2) \times \pi_0\mathcal{S}'(f) \;\equiv\; \mathbb{Z}^2 \times \pi_0\mathcal{S}'(f).$$

Отриманий результат є справедливим для більш широкого класу функцій, особливості яких еквівалентні однорідним многочленам без кратних множників.

1. Введение. Пусть M — гладкая замкнутая ориентированная поверхность и $\mathcal{D}(M)$ — группа ее диффеоморфизмов, действующая справа на $C^\infty(M, \mathbb{R})$ по закону

$$(f, h) \;\longmapsto\; f \circ h \colon M \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \tag{1}$$

для $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ и $h \in \mathcal{D}(M)$. Обозначим через

$$\mathcal{S}(f) = \{f \in \mathcal{D}(M) \mid f \circ h = f\} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{O}(f) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M)\}$$

соответственно стабилизатор и орбиту функции f относительно действия (1). Наделим пространства $\mathcal{D}(M)$ и $C^\infty(M, \mathbb{R})$ сильными C^∞-топологиями Уитни. Эти топологии индуцируют некоторые топологии на $\mathcal{S}(f)$ и $\mathcal{O}(f)$. Обозначим через $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M)$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ компоненты линейной связности тождественного отображения групп $\mathcal{D}(M)$ и $\mathcal{S}(f)$, а через $\mathcal{O}_f(f)$ компоненту линейной связности f в орбите $\mathcal{O}(f)$.

Пусть $\mathrm{Morse}(M, \mathbb{R}) \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$ — подмножество, состоящее из функций Морса, т. е. функций, которые имеют только невырожденные критические точки. Известно, что $\mathrm{Morse}(M, \mathbb{R})$ является открытым и всюду плотным множеством в $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Компоненты связности $\mathrm{Morse}(M, \mathbb{R})$ описаны в [1 – 3], а гомотопический тип описан в [4].

Напомним, что ростки гладких функций $f, g\colon (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ называются *гладко эквивалентными* в точке $0 \in \mathbb{R}^2$, если существуют ростки диффеоморфизмов $h\colon (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ и $\phi\colon (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ такие, что $\phi \circ g = f \circ h$.

Обозначим через $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ подмножество в $C^\infty(M, \mathbb{R})$, которое состоит из функций f, имеющих свойство **(*L*)**:

для любой критической точки z функции f ее росток в точке z эквивалентен некоторому ***однородному многочлену*** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ***без кратных множителей****.*

Отметим, что если z — невырожденная критическая точка гладкой функции $f: M \to \mathbb{R}$, то росток f в этой точке эквивалентен однородному многочлену $\pm x^2 \pm y^2$, который, очевидно, не имеет кратных множителей. Следовательно, имеет место включение

$$\mathrm{Morse}(M, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(M, \mathbb{R}).$$

Известно [5, 6] (см. также [7], § 11), что для функций из $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ отображение

$$p\colon \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{O}(f), \qquad p(h) = f \circ h, \tag{2}$$

является расслоением Серра.

В работах [7, 8] установлено, что компонента связности $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ стягиваема за исключением единственного случая, когда $M = S^2$ и $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ — функция Морса, у которой ровно две невырожденные критические точки, одна из которых максимум, а вторая — минимум. В этом случае $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ гомотопически эквивалентна окружности S^1.

Будем предполагать далее, что $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ стягиваема. Тогда из описания гомотопического типа групп $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M)$ (см. [9 – 11]), точной последовательности гомотопических групп расслоения (2), а также из результатов [8, 12] следует, что $\pi_i \mathcal{O}_f(f) = \pi_i M$ для $i \geq 3$, $\pi_2 \mathcal{O}_f(f) = 0$, а для $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ имеет место короткая точная последовательность

$$1 \longrightarrow \pi_1 \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M) \xrightarrow{p_1} \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0 \mathcal{S}'(f) \longrightarrow 1, \tag{3}$$

в которой $\mathcal{S}'(f) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M)$.

Отметим, что если M отлична от 2-сферы S^2 и 2-тора T^2, то группа $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M)$ стягиваема и мы получаем изоморфизм $\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f)$.

Если же $M = S^2$ или $M = T^2$, то структура последовательности (3) не ясна.

Цель данной работы — для случая $M = T^2$ дать достаточные условия, при которых последовательность (3) расщепляется (см. теорему 1).

1.1. Граф гладких функций. Пусть $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$ и ω — компонента связности множества уровня $f^{-1}(t)$. Назовем ω *критической*, если она содержит критическую точку f, и *регулярной* — в противном случае.

Рассмотрим разбиение M на связные компоненты множеств уровня f. Известно, что соответствующее фактор-пространство, далее обозначаемое через $\Gamma(f)$, имеет структуру одномерного CW-комплекса и называется *графом Кронрода – Риба* или просто *графом* функции f. Вершины $\Gamma(f)$ — критические компоненты множеств уровня f, а открытые ребра — связные компоненты дополнения M к объединению всех критических компонент множеств уровня f.

Отметим, что f можно представить как композицию

$$f = \phi \circ p_f : M \xrightarrow{p_f} \Gamma(f) \xrightarrow{\phi} \mathbb{R},$$

где p_f — фактор-отображение, а ϕ — функция на графе, индуцированная f.

1.2. Действие $\mathcal{S}(f)$ на $\Gamma(f)$. Пусть $h \in \mathcal{S}(f)$. Это означает, что $f \circ h = f$, и, следовательно, $h(f^{-1}(t)) = f^{-1}(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому h переставляет компоненты связности множеств уровня f, т. е. точки графа $\Gamma(f)$. Легко проверяется, что h индуцирует некоторый гомеоморфизм $\rho(h)$ графа $\Gamma(f)$ такой, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{p_f} & \Gamma(f) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle \rho(h)}\downarrow & & \Vert \\ M & \xrightarrow{p_f} & \Gamma(f) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}\,, \end{array} \tag{4}$$

а соответствие $h \mapsto \rho(h)$ — гомоморфизм $\rho\colon \mathcal{S}(f) \to \mathrm{Aut}(\Gamma(f))$ в группу автоморфизмов графа $\Gamma(f)$.

Рассмотрим группу $\mathcal{S}'(f) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}(T^2)$, содержающуся в правой части точной последовательности (3), и пусть

$$G := \rho(\mathcal{S}'(f))$$

— ее образ в $\mathrm{Aut}(\Gamma(f))$. Таким образом, G — группа автоморфизмов графа $\Gamma(f)$, индуцированных изотопными тождественному диффеоморфизмами h из $\mathcal{S}(f)$. Отметим, что изотопия между h и id_{T^2} не обязательно должна состоять из диффеоморфизмов, принадлежащих $\mathcal{S}(f)$.

Заметим также, что из (4) и того, что функция $\phi\colon \Gamma(f) \to \mathbb{R}$ монотонна на ребрах, следует, что группа G конечна.

Пусть v — вершина графа $\Gamma(f)$,

$$G_v = \{g \in G \mid g(v) = v\}$$

— стабилизатор v относительно G. Под *звездой* $\mathrm{star}(v)$ вершины v будем понимать произвольную связную замкнутую G_v-инвариантную окрестность v в $\Gamma(f)$, не содержащую других вершин.

Зафиксируем звезду $\mathrm{star}(v)$ вершины v и обозначим через

$$G_v^{\mathrm{loc}} = \{g|_{\mathrm{star}(v)} \mid g \in G_v\}$$

подгруппу в $\mathrm{Aut}(\mathrm{star}(v))$, состоящую из ограничений элементов из G на $\mathrm{star}(v)$. Назовем G_v^{loc} *локальным стабилизатором* вершины v относительно группы G. Очевидно, что G_v^{loc} не зависит от выбора звезды $\mathrm{star}(v)$.

Основным результатом данной работы являются следующие утверждения.

Предложение 1. *Пусть функция $f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ такова, что $\Gamma(f)$ — дерево. Тогда существует единственная вершина v графа $\Gamma(f)$ такая, что дополнение $T^2 \setminus p_f^{-1}(v)$ является несвязным объединением открытых 2-дисков.*

Теорема 1. *Пусть функция $f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ такова, что $\Gamma(f)$ — дерево, и v — вершина графа $\Gamma(f)$, описанная в утверждении 1. Предположим, что локальный стабилизатор вершины v тривиален, т. е. $G_v^{\mathrm{loc}} = 1$. Тогда последовательность (3) расщепляется, а значит,*

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \;\cong\; \pi_1 \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2) \times \pi_0 \mathcal{S}'(f) \;\cong\; \mathbb{Z}^2 \times \pi_0 \mathcal{S}'(f).$$

2. Доказательство утверждения 1. Пусть функция $f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ такая, что $\Gamma(f)$ дерево. Следующая лемма очевидна.

Лемма 1. *Пусть e — открытое ребро дерева $\Gamma(f)$, $z \in e$ — точка на ребре e и $C = p_f^{-1}(z)$ — соответствующая регулярная компонента некоторого множества уровня f, являющаяся простой замкнутой кривой в T^2. Тогда*:

(1) *z разбивает $\Gamma(f)$*;

(2) *C разбивает T^2 и, следовательно, ровно одна из компонент связности $T^2 \setminus C$ является 2-диском.*

Пусть $e = (u_0 u_1)$ — открытое ребро дерева $\Gamma(f)$, $z \in e$ и $C = p_f^{-1}(z)$, как в лемме 1. Для $i = 0, 1$ обозначим через T_{zu_i} замыкание связной компоненты $\Gamma(f) \setminus z$, содержащей точку u_i, и положим

$$A_i = p_f^{-1}(T_{zu_i}).$$

В силу леммы 1 ровно одна из подповерхностей A_0 или A_1 является 2-диском. Ориентируем ребро от u_0 к u_1, если A_0 является 2-диском, и от u_1 к u_0 — в противном случае, т. е. когда диском является A_1.

Таким образом, на каждом ребре графа $\Gamma(f)$ задано направление, значит, $\Gamma(f)$ — ориентированное дерево.

Лемма 2. *Из любой вершины u дерева $\Gamma(f)$ выходит не более одного ребра.*

Доказательство. Предположим, что из вершины u выходят два ребра, которые входят в вершины v_0 и v_1 соответственно. Выберем произвольные точки $z_0 \in (uv_0)$ и $z_1 \in (uv_1)$ и обозначим

$$A = p_f^{-1}(T_{z_0 u}), \qquad A' = p_f^{-1}(T_{z_0 v_0}), \qquad B = p_f^{-1}(T_{z_1 u}), \qquad B' = p_f^{-1}(T_{z_1 v_1})$$

(см. рис. 1). По определению ориентации ребер A и B являются 2-дисками. Более того, так как $T^2 = A \cup A' = B \cup B'$,

$$A' \subset B, \qquad B' \subset A, \tag{5}$$

а пересечения $A \cap A' = p_f^{-1}(z_0)$ и $B \cap B' = p_f^{-1}(z_1)$ — простые замкнутые кривые, каждая из поверхностей A' и B' является тором с дыркой. Но тогда ни A', ни B' не может быть вложена в 2-диск, что противоречит включениям (5). Следовательно, из каждой вершины дерева $\Gamma(f)$ выходит не более одного ребра.

Лемма 2 доказана.

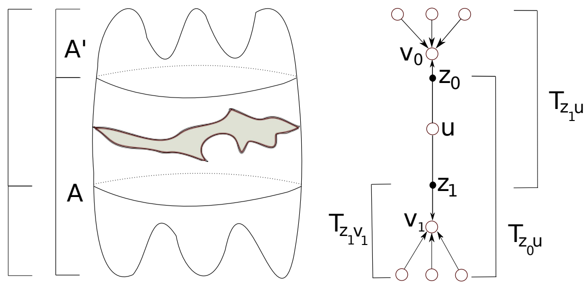

Рис. 1

Пусть v — вершина графа $\Gamma(f)$. Дополнение $T^2 \setminus p_f^{-1}(v)$ является объединением 2-дисков тогда и только тогда, когда все ребра, инцидентные v, входят в эту вершину. Назовем такую вершину *максимальной*.

Таким образом, для доказательства предложения 1 достаточно установить, что в ориентированном дереве $\Gamma(f)$ существует единственная максимальная вершина. Это следует из такой леммы.

Лемма 3. *Пусть Γ — ориентированное дерево.*

1. *Если Γ конечно, то в нем существуют максимальные вершины.*

2. *Если из любой вершины* Γ *выходит не более одного ребра* (*остальные ребра, инцидентные ей, входят в эту вершину*), *то максимальных вершин не более одной.*

Доказательство. 1. Предположим, что в Γ нет максимальных вершин, т. е. из любой вершины выходит хотя бы одно ребро. Пусть $v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n$ — произвольный ориентированный путь в Γ, состоящий из попарно разных вершин. Поскольку ребро $(v_{n-1}v_n)$ входит в v_n, то по предположению 1 найдется ребро $(v_n v_{n+1})$, которое выходит из v_n. Отметим, что $v_{n+1} \neq v_i$, $i = 0, \ldots, n$, иначе $v_0, \ldots, v_n, v_{n+1}$ был бы циклом в дереве Γ, что невозможно. Следовательно, любой ориентированный путь может быть продолжен до более длинного пути. Но это противоречит конечности Γ. Следовательно, максимальные вершины существуют.

2. Предположим, что Γ имеет две максимальные вершины v_1 и v_2 и $\gamma\colon e_0, \ldots, e_k$ — единственный путь, соединяющий v_1 и v_2. Поскольку ребра e_0 и e_k направлены к v_1 и v_2 соответственно, для одной из вершин u пути γ инцидентные ей ребра e_i и e_{i+1} выходят из u, что невозможно в силу предположения (см. рис. 2). Получили противоречие. Следовательно, существует не более одной максимальной вершины v графа Γ.

Лемма 3 доказана.

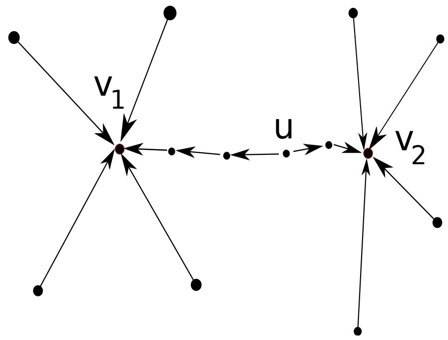

Рис. 2

Существование максимальной вершины в $\Gamma(f)$ вытекает из пункта 1 леммы 3, а ее единственность — из пункта 2.

Утверждение 1 доказано.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть функция $f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ такова, что $\Gamma(f)$ — дерево, и v — единственная максимальная вершина графа $\Gamma(f)$, описанная в утверждении 1. Предположим, что $G_v^{\mathrm{loc}} = 1$. Необходимо показать, что последовательность

$$1 \longrightarrow \pi_1 \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2) \xrightarrow{p_1} \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0 \mathcal{S}'(f) \longrightarrow 1 \tag{6}$$

расщепляется.

Заметим, что согласно лемме 2.2 из [7] образ $p_1(\pi_1 \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2))$ содержится в центре группы $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$. Поэтому для того, чтобы эта последовательность расщеплялась, достаточно построить сечение $s\colon \pi_0 \mathcal{S}'(f) \to \pi_1 \mathcal{O}_f(f)$, т. е. гомоморфизм такой, что $\partial_1 \circ s = \mathrm{id}$.

Напомним построение граничного гомоморфизма ∂_1. Пусть ω_t — петля в $\mathcal{O}_f(f)$, т. е. непрерывное отображение $\omega\colon [0,1] \to \mathcal{O}_f(f)$ такое, что $\omega_0 = \omega_1$. Поскольку $p\colon \mathcal{D}(T^2) \to \mathcal{O}(f)$ — расслоение Серра, ω поднимается до пути в $\mathcal{D}(T^2)$. Другими словами, существует непрерывное отображение $h : [0,1] \to \mathcal{D}(T^2)$ такое, что $\omega = p \circ h$, т. е. $\omega_t = p(h_t) = f \circ h_t$ для всех $t \in [0,1]$. Тогда, по определению, $\partial_1(\omega) = [h_1]$, где $[h_1]$ — класс h_1 в $\pi_0 \mathcal{S}'(f)$.

Таким образом, если $h \in \mathcal{S}'(f)$ и $h\colon [0,1] \to \mathcal{D}(T^2)$ — путь такой, что $h_0 = \mathrm{id}$ и $h_1 = h$, то $\omega_t = f \circ h_t$ — петля в $\mathcal{O}_f(f)$ такая, что $\partial_1(\omega) = h$.

Теорема 1 является следствием такой леммы.

Лемма 4. *Пусть v — максимальная вершина графа $\Gamma(f)$, (vu) — какое-нибудь открытое ребро графа $\Gamma(f)$, инцидентное вершине v, $z \in (vu)$ — точка и $C = p_f^{-1}(z)$ — соответствующая простая замкнутая кривая на T^2. Если группа G_v^{loc} тривиальна, то справедливы следующие утверждения*:

(i) *Пусть $h \in \mathcal{S}'(f)$. Тогда $h(C) = C$ и существует изотопия $h_t\colon T^2 \to T^2$, $t \in [0,1]$, такая, что*

$$h_0 = \mathrm{id}_{T^2}, \qquad h_1 = h, \qquad h_t(C) = C \quad \forall t \in [0,1]. \tag{7}$$

(ii) *Если $\{h'_t\}$ — другая изотопия, удовлетворяющая* (7), *то пути $\{h_t\}$ и $\{h'_t\}$ гомотопны в $\mathcal{D}(T^2)$ относительно концов. В частности, петли $\{f \circ h_t\}$ и $\{f \circ h'_t\}$ представляют один и тот же элемент $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$. Обозначим его через $s(h)$.*

(iii) *Отображение $s\colon h \longmapsto s(h)$ является гомоморфизмом $s\colon \pi_0\mathcal{S}'(f) \to \pi_1\mathcal{O}_f(f)$ таким, что $\partial_1 \circ s = \mathrm{id}$. В частности, s расщепляет последовательность* (6).

Доказательство. (i) Нам понадобится следующая лемма (см. также [13]).

Лемма 5. *Пусть M — гладкая компактная поверхность, $f \in \mathcal{F}(M,\mathbb{R})$, $\Gamma(f)$ — граф функции f, $\rho\colon \mathcal{S}(f) \to \mathrm{Aut}(\Gamma(f))$ — гомоморфизм действия $\mathcal{S}(f)$ на $\Gamma(f)$, v — вершина $\Gamma(f)$, $\mathrm{star}(v)$ — какая-нибудь звезда v в $\Gamma(f)$ и $N = p_f^{-1}(\mathrm{star}(v))$. Пусть далее $h \in \mathcal{S}'(f)$ и $\rho(h)\colon \Gamma(f) \to \Gamma(f)$ — соответствующий автоморфизм, индуцированный h. Предположим, что $\rho(h)(v) = v$ и $\rho(h)|_{\mathrm{star}(v)} = \mathrm{id}$. Тогда существует изотопия $g_t\colon T^2 \to T^2$, $t \in [0,1]$, такая, что*:

1) $g_0 = h$;

2) $g_t \in \mathcal{S}'(f)$;

3) g_1 *неподвижен на* N;

4) $\rho(h) = \rho(g_t) = \mathrm{id}$ *для каждого* $t \in [0,1]$.

В частности $[h] = [g_t] \in \pi_0\mathcal{S}'(f)$.

Доказательство. Пусть $V = p_f^{-1}(v)$ — критическая компонента некоторого критического уровня f, соответствующая вершине v. Тогда V — конечный граф, вложенный в M, и из $\rho(h)(v) = v$ следует, что $h(V) = V$. Поскольку h изотопен id_{T^2} и тривиально действует на $\mathrm{star}(v)$, то по теореме 7.1 из [7] h переводит каждое ребро e графа V в себя и сохраняет ориентацию e. Теперь существование изотопии, удовлетворяющей (1) – (4), следует из лемм 6.4 и 4.14 [7].

Докажем утверждение (i). Не теряя общности можно предполагать, что найдутся две звезды $\mathrm{star}_1(v)$ и $\mathrm{star}(v)$ такие, что $z \in \mathrm{star}_1(v) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{star}(v))$, где $\mathrm{Int}(\mathrm{star}(v))$ — внутренность $\mathrm{star}(v)$. Другими словами, если положить $N_1 = p_f^{-1}(\mathrm{star}_1(v))$ и $N = p_f^{-1}(\mathrm{star}(v))$, то $N_1 \subset \subset \mathrm{Int}(N)$.

Пусть теперь $h \in \mathcal{S}'(f)$ и $g_t\colon T^2 \to T^2$, $t \in [0,1]$, — изотопия, имеющая свойства (1) – (4) леммы 5. Тогда из (3) следует, что $\rho(g_t)(z) = z$, а значит, $g_t(C) = C$ для всех $t \in [0,1]$. Поскольку g_1 неподвижен на N, а дополнение $T^2 \setminus N_1$ состоит только из 2-дисков, g_1 изотопен id_{T^2} с помощью изотопии неподвижной на N_1, а значит, и на C.

Следовательно, h изотопен id_{T^2} с помощью изотопии, оставляющей кривую C инвариантной.

(ii) Вначале докажем следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть* $\omega\colon T^2 \times [0,1] \to T^2$ *— петля в* $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$, *т. е. изотопия такая, что* $\omega_0 = \omega_1 = \mathrm{id}_{T^2}$. *Пусть также* $q \in T^2$ *и* $\omega_q\colon \{q\} \times [0,1] \to T^2$ *— петля в* T^2, *заданная формулой* $\omega_q(t) = \omega(q,t)$. *Петля* ω *гомотопна нулю в* $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$ *тогда и только тогда, когда* ω_q *гомотопна нулю в* T^2.

Доказательство. Поскольку T^2 есть связная группа Ли, он действует на себе правыми сдвигами, которые являются диффеоморфизмами. Это действие индуцирует вложение $i\colon T^2 \hookrightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$. Известно, [9, 11], что i — гомотопическая эквивалентность. В частности, индуцированный гомоморфизм $i^*\colon \pi_1 T^2 \to \pi_1 \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$ является изоморфизмом. Из этого легко следует, что $i^*([\omega_q]) = [\omega]$, а значит, петля ω гомотопна нулю в $\mathcal{D}(T^2)$ тогда и только тогда, когда ω_q гомотопна нулю в T^2.

Лемма 6 доказана.

Пусть теперь $\alpha = \{h_t\}$ и $\beta = \{h'_t\}$ — два пути удовлетворяющие условиям (7), и D — 2-диск, который ограничивает C в T^2. Рассмотрим петлю $\omega = \alpha\beta^{-1}$ в $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$. Так как $\omega(C \times t) = C$, $t \in [0,1]$, то $\omega(D \times t) = D$. Следовательно, для всех $q \in D$ петля $\omega_q\colon \{q\} \times [0,1] \to T^2$ гомотопна нулю в T^2. Тогда по лемме 6 петля ω гомотопна нулю в $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$, т. е. α и β гомотопны относительно концов.

(iii) Пусть $\{h_t\}$ и $\{h'_t\}$ — пути в $\mathcal{S}'(f)$, удовлетворяющие (7). Рассмотрим путь

$$g_t = \begin{cases} h_{2t}, & t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ h \circ h'_{2t-1}, & t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

в $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$ и соответствующую ему петлю

$$f \circ g_t = \begin{cases} f \circ h_{2t}, & t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ f \circ h \circ h'_{2t-1} = f \circ h'_{2t-1}, & t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

в $\mathcal{O}_f(f)$. Тогда, по определению групповой операции в $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$, имеем

$$[\{f \circ h_t\}] \cdot [\{f \circ h'_t\}] = [\{f \circ g_t\}].$$

С другой стороны, $g_1 = h \circ h'$ и $g_t(C) = C$ для всех t, т. е. $[\{f \circ g_t\}] = s(h \circ h')$. Следовательно, $s(h) \circ s(h') = s(h \circ h')$.

Лемма 4 доказана.

1. *Шарко В. В.* Функции на поверхностях, I // Некоторые проблемы современой математики: Праці Ін-ту математики НАН України. – 1998. – **25**. – С. 408 – 434.
2. *Кудрявцева Е. А.* Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты // Мат. сб. – 1999. – **190**, № 3. – С. 29 – 88.
3. *Maksymenko S.* Path-components of Morse mappings spaces of surfaces // Comment. math. helv. – 2005. – **80**, № 3. – С. 655 – 690.
4. *Кудрявцева Е. А.* О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях // Мат. сб. – 2013. – **204**, № 1. – С. 79 – 118.
5. *Poénaru V.* Un théorème des fonctions implicites pour les espaces d’applications C^∞ // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. – 1970. – № 38. – P. 93 – 124.

6. *Sergeraert F.* Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications // Ann. sci. École norm. super. – 1972. – **5**. – P. 599 – 660.
7. *Maksymenko S.* Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces // Ann. Global Anal. Geom. – 2006. – **29**, № 3. – P. 241 – 285.
8. *Maksymenko S.* Functions with isolated singularities on surfaces // Geometry and Topology of Functions on Manifolds: Pr. Inst. Mat. Nat. Akad. Nauk Ukr. – 2010. – **7**, № 4. – P. 7 – 66.
9. *Earle C. J., Eells J.* A fibre bundle description of Teichmüller theory // J. Different. Geom. – 1969. – **3**. – P. 19 – 43.
10. *Earle C. J.* Teichmüller theory for surfaces with boundary // J. Different. Geom. – 1970. – **4**. – P. 169 – 185.
11. *Gramain A.* Le type d’homotopie du groupe des difféomorphismes d’une surface compacte // Ann. sci. École norm. super. – 1973. – **6**. – P. 53 – 66.
12. *Максименко С.* Гомотопические типы правых стабилизаторов и орбит гладких функций на поверхностях // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 9. – С. 1186 – 1203.
13. *Кудрявцева Е. А.* Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях // Докл. Академии наук. – 2012. – **446**, № 6. – С. 615 – 617.

Получено 08.01.14