УДК 517.98

Р. М. Хакимов (Ин-т математики при Нац. ун-те Узбекистана, Ташкент)

СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ HC-МОДЕЛИ ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО ДЕЛИТЕЛЯ ИНДЕКСА ЧЕТЫРЕ

We study an HC-model on a Cayley tree. Under certain conditions imposed on the parameters of the HC-model, we prove the existence of weakly periodic (nonperiodic) Gibbs measures for the normal divisor of index four.

Вивчається HC-модель на дереві Келі. При деяких умовах на параметри показано, що існують слабко періодичні (не періодичні) міри Гіббса для нормального дільника індексу чотири.

1. Введение. Понятие меры Гиббса играет важную роль в статистической механике. Основной проблемой данного гамильтониана является описание всех соответствующих ему мер Гиббса. Определение меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией мер Гиббса, можно найти, например, в работах [1 – 3]. Для модели Изинга на дереве Кэли эта задача изучена достаточно полно. Например, в работе [4] построено несчетное множество крайних гиббсовских мер, а в работе [5] найдено необходимое и достаточное условие крайности неупорядоченной фазы модели Изинга на дереве Кэли.

В многочисленных работах (см., например, [6 – 13]) на дереве Кэли изучены периодические меры Гиббса для различных моделей статистической механики. Эти меры, в основном, были трансляционно-инвариантными либо периодическими с периодом два. Более того, для многих моделей на дереве Кэли доказано, что множество периодических мер Гиббса очень ограничено, т. е. существуют *только* периодические гиббсовские меры с периодом два (см., например, [8 – 12]).

Чтобы получить более широкое множество гиббсовских мер, в работах [14, 15] введены более общие понятия периодической меры Гиббса, т.е. слабо периодические гиббсовские меры, и доказано существование таких мер для модели Изинга на дереве Кэли.

В работе [13] изучена HC (Hard Core)-модель на дереве Кэли и доказано, что трансляционно-инвариантная мера Гиббса для этой модели единственна. Кроме того, при некоторых условиях на параметры HC-модели доказана неединственность периодических мер Гиббса с периодом два.

В работе [17] изучены слабо периодические меры Гиббса для HC-модели для нормального делителя индекса два и при некоторых условиях на параметры показана единственность (трансляционно-инвариантность) слабо периодической меры Гиббса, а в работе [18] — единственность (трансляционно-инвариантность) слабо периодической меры Гиббса для HC-модели при любых значениях параметров.

Настоящая работа посвящена изучению слабо периодических мер Гиббса HC-модели для нормального делителя индекса четыре на дереве Кэли. Доказано существование слабо периодических (не периодических) мер Гиббса на некоторых инвариантах при некоторых условиях на параметры.

2. Предварительные сведения. Дерево Кэли τ^k порядка $k \geq 1$ — бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребро. Пусть $\tau^k = (V, L, i)$, где V — множество вершин τ^k, L — его множество ребер и i — функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называют *ближайшими соседями вершины* и обозначают $l = \langle x, y\rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x,y) = \min\{d | \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такие, что } \langle x_0, x_1\rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d\rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \le n\}.$$

Для $x \in W_n$ обозначим

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} \colon d(x, y) = 1\}.$$

Пусть $\Phi = \{0, 1\}$ и $\sigma \in \Phi^V$ — конфигурация, т. е. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi \colon x \in V\}$, где $\sigma(x) = 1$ означает, что вершина x на дереве Кэли занята, а $\sigma(x) = 0$ — что она свободна.

Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых соседних $\langle x, y\rangle$ из V (V_n или W_n соответственно). Обозначим множество таких конфигураций через Ω (Ω_{V_n} и Ω_{W_n}). Ясно, что $\Omega \subset \Phi^V$.

Гамильтониан HC-модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = \begin{cases} J\sum_{x\in V}\sigma(x), & \text{если} \quad \sigma \in \Omega, \\ +\infty, & \text{если} \quad \sigma \notin \Omega, \end{cases}$$

где $J \in R$.

Пусть $\mathbf{B}$ — σ-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω. Для любого n обозначим через $\mathbf{B}_{V_n} = \{\sigma \in \Omega \colon \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}$ подалгебру $\mathbf{B}$, где $\sigma|_{V_n}$ — сужение σ на V_n, $\sigma_n \colon x \in V_n \mapsto \sigma_n(x)$ — допустимая конфигурация в V_n.

Определение 1. *Для* $\lambda > 0$ HC-*мера Гиббса есть вероятностная мера* μ *на* $(\Omega, \mathbf{B})$ *такая, что для любого* n *и* $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$

$$\mu\{\sigma \in \Omega \colon \sigma|_{V_n} = \sigma_n\} = \int\limits_{\Omega} \mu(d\omega) P_n(\sigma_n|\omega_{W_{n+1}}),$$

где

$$P_n(\sigma_n|\omega_{W_{n+1}}) = \frac{e^{-H(\sigma_n)}}{Z_n(\lambda; \omega|_{W_{n+1}})}\mathbf{1}(\sigma_n \vee \omega|_{W_{n+1}} \in \Omega_{V_{n+1}}),$$

символ $\vee$ *означает объединение конфигураций и* $Z_n(\lambda; \omega|_{W_{n+1}})$ — *нормировочный множитель с граничным условием* $\omega|_{W_n}$:

$$Z_n(\lambda; \omega|_{W_{n+1}}) = \sum_{\widetilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} e^{-H(\widetilde{\sigma}_n)}\mathbf{1}(\widetilde{\sigma_n} \vee \omega|_{W_{n+1}} \in \Omega_{V_{n+1}}).$$

Известно [6, 7], что τ^k можно представить как G_k-свободное произведение $k+1$ циклической группы второго порядка с образующими $a_1, \ldots, a_{k+1}$ соответственно.

Пусть $\widehat{G}_k$ — подгруппа группы G_k. Если гиббсовская мера инвариантна относительно некоторой подгруппы конечного индекса $\widehat{G}_k \subset G_k$, то она называется $\widehat{G}_k$-периодической.

Известно [13], что каждой мере Гиббса для HC-модели на дереве Кэли можно сопоставлять совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющих равенству

$$z_x = \prod_{y\in S(x)} (1+\lambda z_y)^{-1}, \tag{1}$$

где $\lambda = e^J > 0$ — параметр.

Определение 2. *Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$-периодической, если $z_{yx} = z_x$ для любых $x \in G_k, y \in \widehat{G}_k$.*

G_k-периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Для любого $x \in G_k$ множество $\{y \in G_k \colon \langle x, y\rangle\} \setminus S(x)$ имеет единственный элемент, который обозначим через $x_\downarrow$ (см. [14, 16]).

Пусть $G_k/\widehat{G}_k = \{H_1, \ldots, H_r\}$ — фактор-группа, где $\widehat{G}_k$ — нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение 3. *Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$-слабо периодической, если $z_x = z_{ij}$ при $x \in H_i, x_\downarrow \in H_j$ для любого $x \in G_k$.*

Заметим, что слабо периодическая совокупность z совпадает с обычной периодической (см. определение 2), если значение z_x не зависит от $x_\downarrow$.

Определение 4. *Мера μ называется $\widehat{G}_k$-(слабо) периодической, если она соответствует $\widehat{G}_k$-(слабо) периодической совокупности величин z.*

3. Слабо периодические меры Гиббса. Пусть $A \subset \{1, 2, \ldots, k+1\}$ и $H_A = \Big\{x \in G_k \colon \sum_{i\in A} w_x(a_i)$ — четное число$\Big\}$, где $w_x(a_i)$ — число буквы a_i в слове $x \in G_k$, $G_k^{(2)} = \{x \in G_k \colon |x|$ — четное число$\}$, где $|x|$ — длина слова $x \in G_k$, и $G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}$ — нормальный делитель индекса 4.

Рассмотрим фактор-группу $G_k/G_k^{(4)} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$, где

$$H_0 = \Big\{x \in G_k \colon \textstyle\sum_{i\in A} w_x(a_i) - \text{четно}, |x| - \text{четно}\Big\},$$

$$H_1 = \Big\{x \in G_k \colon \textstyle\sum_{i\in A} w_x(a_i) - \text{нечетно}, |x| - \text{четно}\Big\},$$

$$H_2 = \Big\{x \in G_k \colon \textstyle\sum_{i\in A} w_x(a_i) - \text{четно}, |x| - \text{нечетно}\Big\},$$

$$H_3 = \Big\{x \in G_k \colon \textstyle\sum_{i\in A} w_x(a_i) - \text{нечетно}, |x| - \text{нечетно}\Big\}.$$

Тогда в силу (1) $G_k^{(4)}$-слабо периодическая совокупность величин z_x имеет вид

$$z_x = \begin{cases} z_1, & x \in H_3, \quad x_\downarrow \in H_1, \\ z_2, & x \in H_1, \quad x_\downarrow \in H_3, \\ z_3, & x \in H_3, \quad x_\downarrow \in H_0, \\ z_4, & x \in H_0, \quad x_\downarrow \in H_3, \\ z_5, & x \in H_1, \quad x_\downarrow \in H_2, \\ z_6, & x \in H_2, \quad x_\downarrow \in H_1, \\ z_7, & x \in H_2, \quad x_\downarrow \in H_0, \\ z_8, & x \in H_0, \quad x_\downarrow \in H_2, \end{cases}$$

где z_x удовлетворяет системе уравнений

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{(1+\lambda z_4)^i}\frac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i}},\\
z_2 &= \frac{1}{(1+\lambda z_6)^i}\frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i}},\\
z_3 &= \frac{1}{(1+\lambda z_4)^{i-1}}\frac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i+1}},\\
z_4 &= \frac{1}{(1+\lambda z_3)^{i-1}}\frac{1}{(1+\lambda z_7)^{k-i+1}},\\
z_5 &= \frac{1}{(1+\lambda z_6)^{i-1}}\frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i+1}},\\
z_6 &= \frac{1}{(1+\lambda z_5)^{i-1}}\frac{1}{(1+\lambda z_8)^{k-i+1}},\\
z_7 &= \frac{1}{(1+\lambda z_5)^i}\frac{1}{(1+\lambda z_8)^{k-i}},\\
z_8 &= \frac{1}{(1+\lambda z_3)^i}\frac{1}{(1+\lambda z_7)^{k-i}}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь $i=|A|$ — мощность множества A.

Запишем систему уравнений (2) в виде

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \left(\frac{1+\lambda z_2}{1+\lambda z_4}\right)^i\frac{1}{(1+\lambda z_2)^k},\\
z_2 &= \left(\frac{1+\lambda z_1}{1+\lambda z_6}\right)^i\frac{1}{(1+\lambda z_1)^k},\\
z_3 &= \left(\frac{1+\lambda z_2}{1+\lambda z_4}\right)^{i-1}\frac{1}{(1+\lambda z_2)^k},\\
z_4 &= \left(\frac{1+\lambda z_7}{1+\lambda z_3}\right)^{i-1}\frac{1}{(1+\lambda z_7)^k},\\
z_5 &= \left(\frac{1+\lambda z_1}{1+\lambda z_6}\right)^{i-1}\frac{1}{(1+\lambda z_1)^k},\\
z_6 &= \left(\frac{1+\lambda z_8}{1+\lambda z_5}\right)^{i-1}\frac{1}{(1+\lambda z_8)^k},\\
z_7 &= \left(\frac{1+\lambda z_8}{1+\lambda z_5}\right)^i\frac{1}{(1+\lambda z_8)^k},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$z_8 = \left(\frac{1+\lambda z_7}{1+\lambda z_3}\right)^i \frac{1}{(1+\lambda z_7)^k}.$$

Разделив в этой системе уравнений первое уравнение на третье, второе на пятое, шестое на седьмое, четвертое на восьмое, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{1+\lambda z_2}{1+\lambda z_4},$$

$$\frac{z_2}{z_5} = \frac{1+\lambda z_1}{1+\lambda z_6},$$

$$\frac{z_6}{z_7} = \frac{1+\lambda z_5}{1+\lambda z_8},$$

$$\frac{z_4}{z_8} = \frac{1+\lambda z_3}{1+\lambda z_7}.$$

Используя эту систему уравнений, систему (3) можно записать так:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \left(\frac{z_1}{z_3}\right)^i \frac{1}{(1+\lambda z_2)^k},\\
z_2 &= \left(\frac{z_2}{z_5}\right)^i \frac{1}{(1+\lambda z_1)^k},\\
z_3 &= \left(\frac{z_1}{z_3}\right)^{i-1} \frac{1}{(1+\lambda z_2)^k},\\
z_4 &= \left(\frac{z_8}{z_4}\right)^{i-1} \frac{1}{(1+\lambda z_7)^k},\\
z_5 &= \left(\frac{z_2}{z_5}\right)^{i-1} \frac{1}{(1+\lambda z_1)^k},\\
z_6 &= \left(\frac{z_7}{z_6}\right)^{i-1} \frac{1}{(1+\lambda z_8)^k},\\
z_7 &= \left(\frac{z_7}{z_6}\right)^i \frac{1}{(1+\lambda z_8)^k},\\
z_8 &= \left(\frac{z_8}{z_4}\right)^i \frac{1}{(1+\lambda z_7)^k}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Из первого уравнения системы (4) найдем z_3, из второго — z_5, из седьмого — z_6, из восьмого — z_4 и, подставив их в восьмое, седьмое, второе и первое уравнения системы уравнений (2) соответственно, получим

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{(1+\lambda z_7)^k}{((1+\lambda z_7)^{k/i}+\lambda z_8^{1-1/i})^i}\frac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i}},\\
z_2 &= \frac{(1+\lambda z_8)^k}{((1+\lambda z_8)^{k/i}+\lambda z_7^{1-1/i})^i}\frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i}},\\
z_7 &= \frac{(1+\lambda z_1)^k}{((1+\lambda z_1)^{k/i}+\lambda z_2^{1-1/i})^i}\frac{1}{(1+\lambda z_8)^{k-i}},\\
z_8 &= \frac{(1+\lambda z_2)^k}{((1+\lambda z_2)^{k/i}+\lambda z_1^{1-1/i})^i}\frac{1}{(1+\lambda z_7)^{k-i}}.
\end{aligned}\tag{5}$$

Рассмотрим отображение $W\colon R^4\to R^4$, определенное следующим образом:

$$\begin{aligned}
z_1' &= \frac{(1+\lambda z_7)^k}{((1+\lambda z_7)^{k/i}+\lambda z_8^{1-1/i})^i}\frac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i}},\\
z_2' &= \frac{(1+\lambda z_8)^k}{((1+\lambda z_8)^{k/i}+\lambda z_7^{1-1/i})^i}\frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i}},\\
z_7' &= \frac{(1+\lambda z_1)^k}{((1+\lambda z_1)^{k/i}+\lambda z_2^{1-1/i})^i}\frac{1}{(1+\lambda z_8)^{k-i}},\\
z_8' &= \frac{(1+\lambda z_2)^k}{((1+\lambda z_2)^{k/i}+\lambda z_1^{1-1/i})^i}\frac{1}{(1+\lambda z_7)^{k-i}}.
\end{aligned}\tag{6}$$

Заметим, что (5) есть уравнение $z=W(z)$. Чтобы решить систему уравнений (5), необходимо найти неподвижные точки отображения $z'=W(z)$.

Лемма 1. *Отображение W имеет инвариантные множества следующих видов:*

$$I_1=\{(z_1,z_2,z_7,z_8)\in R^4\colon z_1=z_2=z_7=z_8\},$$

$$I_2=\{(z_1,z_2,z_7,z_8)\in R^4\colon z_1=z_7,\ z_2=z_8\},$$

$$I_3=\{(z_1,z_2,z_7,z_8)\in R^4\colon z_1=z_2, z_7=z_8\},$$

$$I_4=\{(z_1,z_2,z_7,z_8)\in R^4\colon z_1=z_8,\ z_2=z_7\}.$$

Доказательство. Покажем инвариантность I_2 (инвариантность I_i, $i=1,3,4$, доказывается аналогично). Ясно, что для любого $z^*=(z_1^*,z_2^*,z_7^*,z_8^*)\in I_2$ имеет место $z_1^*=z_7^*$, $z_2^*=z_8^*$. Отсюда и из (6) имеем

$$z_1'=\frac{(1+\lambda z_1^*)^k}{[(1+\lambda z_1^*)^{k/i}+\lambda(z_2^*)^{1-1/i}]^i}\frac{1}{(1+\lambda z_2^*)^{k-i}},$$

$$z_2' = \frac{(1+\lambda z_2^*)^k}{[(1+\lambda z_2^*)^{k/i}+\lambda(z_1^*)^{1-1/i}]^i}\frac{1}{(1+\lambda z_1^*)^{k-i}},$$

$$z_7' = \frac{(1+\lambda z_1^*)^k}{[(1+\lambda z_1^*)^{k/i}+\lambda(z_2^*)^{1-1/i}]^i}\frac{1}{(1+\lambda z_2^*)^{k-i}},$$

$$z_8' = \frac{(1+\lambda z_2^*)^k}{[(1+\lambda z_2^*)^{k/i}+\lambda(z_1^*)^{1-1/i}]^i}\frac{1}{(1+\lambda z_1^*)^{k-i}},$$

т. е. $z_1' = z_7'$; $z_2' = z_8'$, а это значит, что $z' = W(z^*) \in I_2$.

***Замечание* 1.** Из определений 2 и 3 следует, что в случае I_2 (или I_3, или I_4) слабо периодическая мера Гиббса не совпадает периодической, если из условий $z_1 = z_7$, $z_2 = z_8$ (или $z_1 = z_2$, $z_7 = z_8$, или $z_1 = z_8$, $z_2 = z_7$) вытекает, что хотя бы одно из равенств $z_1 = z_3$, $z_2 = z_5$, $z_4 = z_8$, $z_6 = z_7$ не выполняется, т. е. значение z_i зависит от $x_\downarrow$.

Лемма 2. *Если на инвариантных множествах I_2, I_3, I_4 существуют слабо периодические меры Гиббса, то они являются либо трансляционно-инвариантными, либо слабо периодическими (не периодическими).*

Доказательство проведем для I_2 (остальные случаи доказываются аналогично.) Пусть $z_1 = z_7$, $z_2 = z_8$. Тогда из системы уравнений (2) при $z_2 \neq z_4$ получим

$$z_1 = \frac{1}{(1+\lambda z_4)^i}\frac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i}} \neq z_3 = \frac{1}{(1+\lambda z_4)^{i-1}}\frac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i+1}},$$

а то, что $z_2 \neq z_4$, можно увидеть из второго и четвертого уравнений этой же системы.

Случай I_2. Запишем систему уравнений (5) на I_2 при $k = 2$, $i = 1$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(1+\lambda z_1)^2}{(1+\lambda z_1)^2+\lambda}\frac{1}{1+\lambda z_2}, \\ z_2 &= \frac{(1+\lambda z_2)^2}{(1+\lambda z_2)^2+\lambda}\frac{1}{1+\lambda z_1}. \end{aligned} \tag{7}$$

После обозначений $x = 1+\lambda z_1$ и $y = 1+\lambda z_2$ из системы уравнений (7) получаем

$$x = f(y),$$

$$y = f(x),$$

где $f(x) = \dfrac{\lambda x^2}{(x^2+\lambda)(x-1)}$. Рассмотрим производную

$$f'(x) = -\frac{x\lambda(x^3-\lambda x+2\lambda)}{(x^2+\lambda)^2(x-1)^2}$$

и по формуле Кардано найдем корни многочлена $x^3 - \lambda x + 2\lambda$. Этот многочлен имеет один вещественный отрицательный корень

$$x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{-27\lambda+3\lambda\sqrt{81-3\lambda}} + \frac{\lambda}{\sqrt[3]{-27\lambda+3\lambda\sqrt{81-3\lambda}}} < 0$$

при $\lambda \le 27$. Значит, при этом условии $f'(x) < 0$ при $x > 1$, т. е. функция $f(x)$ убывает на этом интервале и уравнение $f(x) = x$ имеет единственное решение. Вообще говоря, уравнение $f(x) = x$ имеет единственное решение при любых $\lambda > 0$, так как уравнение

$$x = \frac{\lambda x^2}{(x^2+\lambda)(x-1)} = f(x)$$

эквивалентно уравнению $x^3 - x^2 - \lambda = 0$, которое по известной теореме о количестве положительных корней многочлена имеет не более одного положительного решения, потому что знаки при коэффициентах меняются только один раз (рис. 1).

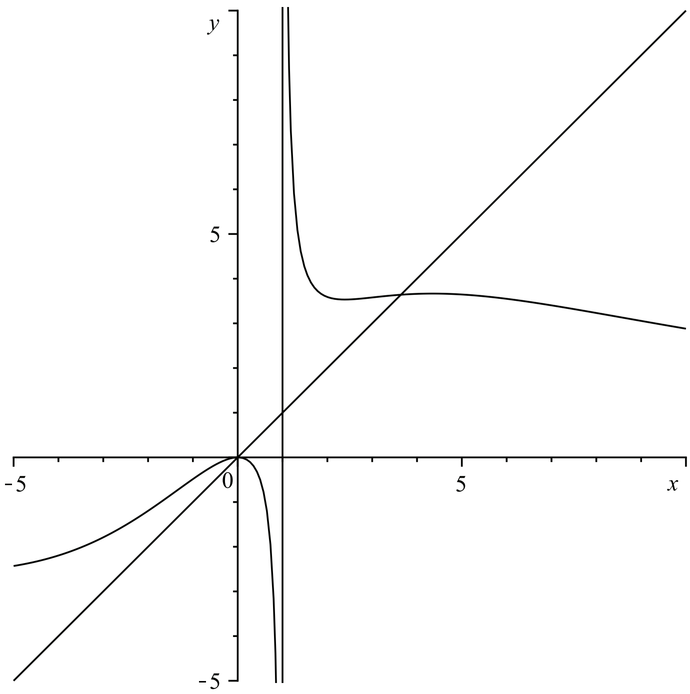

Рис. 1. Графики функций $y = x$ и $y = f(x)$ при $\lambda = 35$.

Очевидно, что это решение больше единицы. Кроме того, оно находится среди решений уравнения $f(f(x)) = x$. Поэтому рассмотрим уравнение

$$\frac{x - f(f(x))}{x - f(x)} = 0,$$

которое эквивалентно уравнению

$$h(x) = x^6 - (\lambda+2)x^5 + (5\lambda+1)x^4 - \lambda(2\lambda+5)x^3 + 2\lambda(2\lambda+1)x^2 - 3\lambda^2 x + \lambda^2 = 0.$$

Из этого уравнения получаем $h(1) = \lambda > 0$ и $h(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Кроме того, график функции $h(x)$ касается оси Ox при $x = 2$, $\lambda = 4$, так как $h(2) = -(\lambda-4)(5\lambda+4)$. Отсюда следует, что уравнение $h(x) = 0$ не имеет решений при $\lambda < 4$, имеет одно решение при $\lambda = 4$ и по крайней мере два решения при $\lambda > 4$ (рис. 2).

Итак, справедливо следующее утверждение.

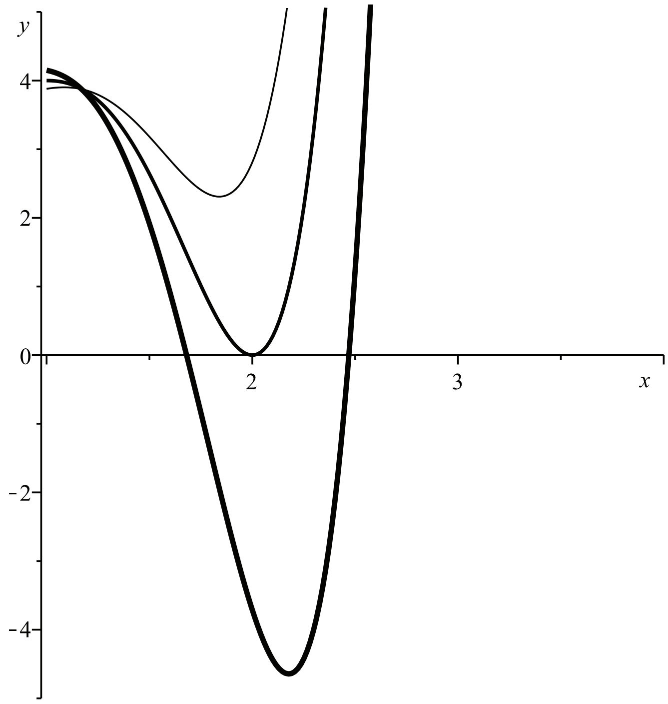

Рис. 2. График функции $h(x)$ при $k = 2$, $\lambda = 3{,}88$ (верхняя кривая), при критической $\lambda = 4$ (средняя) и при $\lambda = 4{,}15$ (нижняя).

Утверждение 1. *Система уравнений* (7) *имеет только одно решение при* $\lambda < 4$, *два решения при* $\lambda = 4$ *и не менее трех решений при* $\lambda > 4$.

***Замечание* 2.** С помощью компьютерного анализа можно увидеть, что система уравнений (7) имеет только три решения при $\lambda > 4$ (рис. 2).

Обозначив $x = 1 + \lambda z_1$, $y = 1 + \lambda z_2$, рассмотрим систему уравнений (5) на I_2 при $k = 3$, $i = 1$:

$$\begin{gathered} y^2 = \frac{\lambda x^3}{(x^3 + \lambda)(x - 1)}, \\ x^2 = \frac{\lambda y^3}{(y^3 + \lambda)(y - 1)}. \end{gathered} \tag{8}$$

В этой системе уравнений найдем из первого уравнения y и подставим его во второе уравнение. Тогда получим уравнение

$$f(x, \lambda) = x^{16} - (\lambda + 4)x^{15} + 3(\lambda + 2)x^{14} - 4x^{13} + (1 - 14\lambda)x^{12} + 3\lambda(\lambda + 8)x^{11} -$$

$$-16\lambda x^{10} - 4\lambda(5\lambda - 1)x^9 + 36\lambda^2 x^8 + \lambda^2(\lambda - 24)x^7 + \lambda^2(6 - 13\lambda)x^6 +$$

$$+24\lambda^3 x^5 - 16\lambda^3 x^4 + \lambda^3(4 - 3\lambda)x^3 + 6\lambda^4 x^2 - 4\lambda^4 x + \lambda^4 = 0,$$

для которого $f(1, \lambda) = \lambda^2 > 0$, $f(1,5;\ 1,8) = -0,5255524 < 0$, $f(1,8;\ 1,8) = 9,30017 > 0$, $f(2;\ 1,8) = -90,1232 < 0$ и $f(x, \lambda) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, $\lambda > 0$. Следовательно, последнее уравнение имеет не менее четырех решений при $x > 1$ (рис. 3).

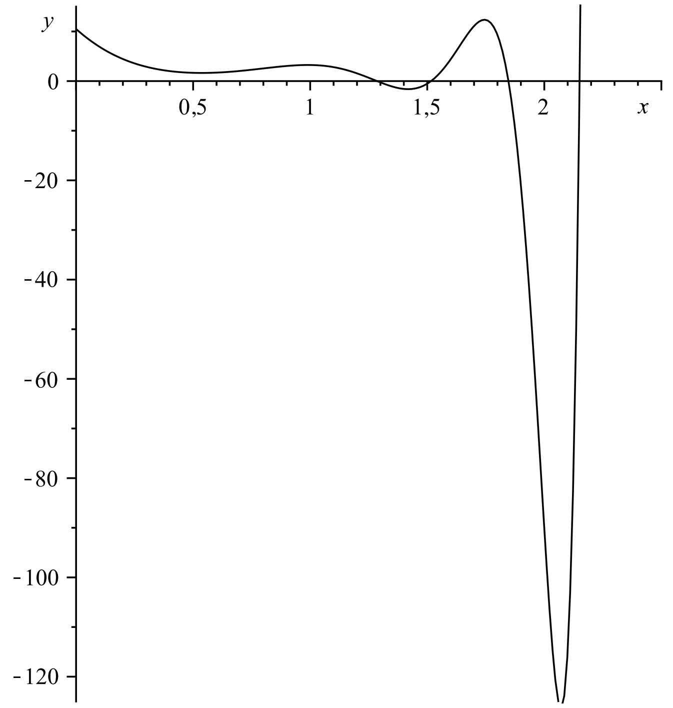

Рис. 3. График функции $f(x, \lambda)$ при $\lambda = 1,8$.

Утверждение 2. *Существует такое* λ_0, *что система уравнений* (8) *имеет не менее четырех решений при* $\lambda > \lambda_0$.

***Замечание* 3.** С помощью компьютерного анализа можно увидеть, что существует λ_{cr} такое, что система уравнений (8) имеет два решения при $\lambda < \lambda_{cr}$ и четыре решения при $\lambda > \lambda_{cr}$. При этом в каждом случае одно из решений соответствует трансляционно-инвариантной мере Гиббса.

***Случай* I_3.** Запишем систему уравнений (5) на I_3 при $k \geq 1$, $i = 1$:

$$z_1 = \frac{(1+\lambda z_7)^k}{(1+\lambda z_7)^k + \lambda} \frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-1}},$$
$$z_7 = \frac{(1+\lambda z_1)^k}{(1+\lambda z_1)^k + \lambda} \frac{1}{(1+\lambda z_7)^{k-1}}. \tag{9}$$

После обозначений $x = 1 + \lambda z_1$ и $y = 1 + \lambda z_7$ из системы (9) находим

$$x^k - x^{k-1} = \frac{\lambda y^k}{y^k + \lambda},$$

$$y^k - y^{k-1} = \frac{\lambda x^k}{x^k + \lambda}.$$

Вычитая из первого уравнения этой системы второе, получаем уравнение

$$(x-y)[(x^{k-1}+\ldots+y^{k-1}-(x^{k-2}+\ldots+y^{k-2}))(x^k+\lambda)(y^k+\lambda)+$$

$$+\lambda^2(x^{k-1}+\ldots+y^{k-1})]=0,$$

которое имеет только решение вида $x=y$ при $x>1, y>1$. Заметим, что если $x=y$, то $z_1=z_2=z_3=z_4=z_5=z_6=z_7=z_8$ при $i=1$. Действительно, пусть $z_1=z_2=z_7=z_8$. Тогда из первого и второго уравнений системы (2) получим $z_4=z_6$, а из седьмого и восьмого уравнений той же системы — $z_3=z_5$. Далее, из третьего и четвертого уравнений находим

$$z_3=\frac{1}{(1+\lambda z_4)^{i-1}}\frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i+1}},\quad z_4=\frac{1}{(1+\lambda z_3)^{i-1}}\frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i+1}},$$

откуда следует, что $z_3=z_4$ при $i=1$. Значит, $z_3=z_4=z_5=z_6$. Следовательно, систему уравнений (2) можно записать в виде

$$z_1=\frac{1}{(1+\lambda z_3)^{i}}\frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i}},$$

$$z_3=\frac{1}{(1+\lambda z_3)^{i-1}}\frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i+1}}.$$

Разделив первое уравнение этой системы на второе, получим $z_1=z_3$.

Утверждение 3. *Пусть* $k\geq 1$, $i=1$. *Тогда система уравнений* (9) *имеет единственное решение при* $\lambda>0$.

Случай $\boldsymbol{I_4}$**.** Запишем систему уравнений (5) на I_4 при $k\geq 1, i=1$:

$$\begin{aligned} z_1&=\frac{1+\lambda z_2}{(1+\lambda z_2)^k+\lambda},\\ z_2&=\frac{1+\lambda z_1}{(1+\lambda z_1)^k+\lambda}. \end{aligned}\tag{10}$$

После обозначений $x=1+\lambda z_1$ и $y=1+\lambda z_2$ из системы уравнений (10) получим

$$x=f(y),$$

$$y=f(x),$$

где $f(x)=\dfrac{\lambda x}{x^k+\lambda}+1$. Заметим, что $f(0)=1$, $f(1)=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}+1>1$. Вычислим производную

$$f'(x)=-\lambda\frac{(k-1)x^k-\lambda}{(x^k+\lambda)^2}.$$

Отсюда функция $f(x)$ возрастает при $0<x<\sqrt[k]{\dfrac{\lambda}{k-1}}$ и убывает при $x>\sqrt[k]{\dfrac{\lambda}{k-1}}$, т. е. $x_{\max}=\sqrt[k]{\dfrac{\lambda}{k-1}}$. Из изложенного следует, что уравнение $f(x)=x$ имеет единственное решение

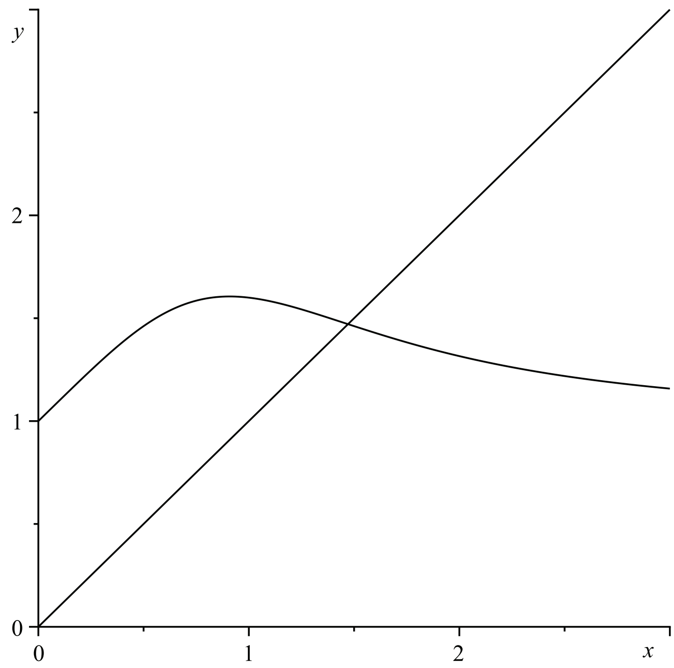

Рис. 4. Графики функций $y = x$ и $y = f(x)$ при $k = 3$, $\lambda = 1,5$.

при $x > 1$, $\lambda > 0$. Это еще можно увидеть, аналогично случаю I_2, использовав теорему о количестве положительных корней многочлена (рис. 4).

Аналогично случаю I_2 при $k = 2$, $i = 1$ и $k = 3$, $i = 1$ получаем

$$h_1(x) = (\lambda + 1)x^2 + \lambda x + 2\lambda^2 + \lambda,$$

$$h_2(x) = (\lambda + 1)x^6 - \lambda x^5 + 2\lambda x^4 + 2\lambda(\lambda + 1)x^3 + 2\lambda^2 x + 2\lambda^3 + \lambda^2$$

соответственно. Очевидно, что $h_1(x) > 0$, $h_2(x) > 0$ при $x > 1, \lambda > 0$. Значит, система уравнений (10) не имеет решений, кроме $z_1 = z_2$, т. е. справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. *Система уравнений* (10) *имеет единственное решение при* $k = 2$ *и* $k = 3$.

В силу всех утверждений и леммы 2 справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для* НС-*модели в случае нормального делителя индекса четыре справедливы следующие утверждения*:

1. *При* $k \geq 1$, $i \leq k$ *на* I_1 *слабо периодическая мера Гиббса единственна. Более того, эта мера совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.*

2. *Пусть* $k = 2, i = 1, \lambda_{cr} = 4$. *Тогда на* I_2 *при* $\lambda < \lambda_{cr}$ *существует одна слабо периодическая мера Гиббса, которая является трансляционно-инвариантной, при* $\lambda = \lambda_{cr}$ *существуют две слабо периодические меры Гибсса, одна из которых является трансляционно-инвариантной, другая — слабо периодической (не периодической) и при* $\lambda > \lambda_{cr}$ *существуют не менее двух слабо периодических* (*не периодических*) *мер Гибсса.*

3. *Пусть* $k = 3, i = 1$. *Тогда существует* λ_0 *такая, что на* I_2 *при* $\lambda > \lambda_0$ *существуют не менее четырех мер Гиббса, одна из которых является трансляционно-инвариантной, а остальные являются слабо периодическими (не периодическими) мерами Гиббса.*

4. *При* $k \geq 1$, $i = 1$ *на* I_3 *слабо периодическая мера Гиббса единственна.*

5. *При* $k = 2, 3$, $i = 1$ *на* I_4 *слабо периодическая мера Гиббса единственна.*

Замечание **4.** Компьютерный анализ показывает, что система уравнений (10) имеет только одно решение при $k = 4, 5, 6$ и $\lambda > 0$. При $k \geq 7$ при некоторых значениях λ можно увидеть, что решение системы (10) не единственно, т. е. существуют слабо периодические (не периодические) меры Гиббса для HC-модели (рис. 5).

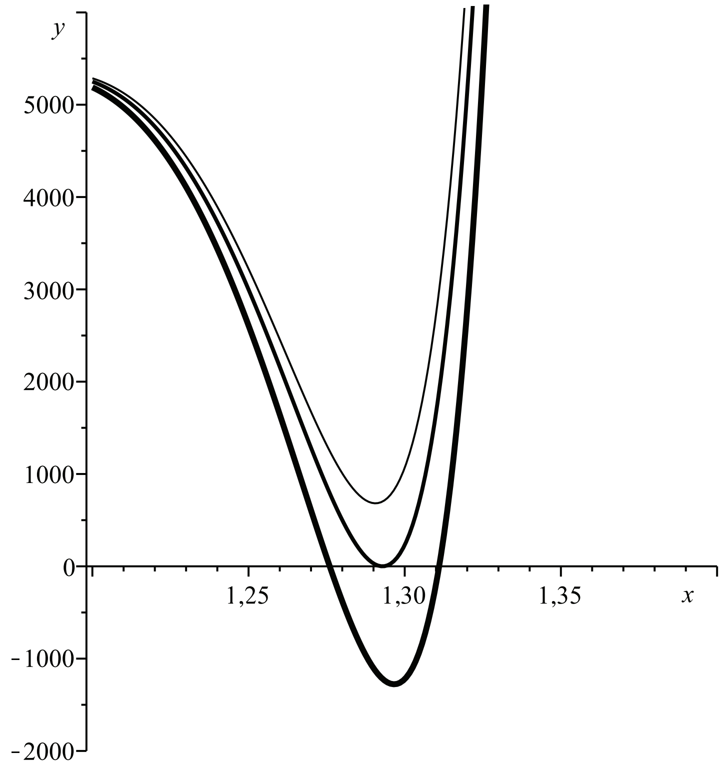

Рис. 5. График функции $h(x)$ при $k = 7$, $\lambda = 1,765$ (верхняя кривая), при $\lambda \approx 1,768674523476329362$ (средняя) и при $\lambda = 1,775$ (нижняя).

1. *Георги Х.-О.* Гиббсовские меры и фазовые переходы. – М.: Мир, 1992.
2. *Preston C. J.* Gibbs States on countable sets // Cambridge Tracts Math. – 1974. – **68**.
3. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. Строгие результаты. – М.: Наука, 1980.
4. *Bleher P. M., Ganikhodjaev N. N.* On pure phases of the Ising model on the Bethe lattice // Theor. Probab. Appl. – 1990. – **35**, № 2. – P. 216 – 227.
5. *Bleher P. M., Ruiz J., Zagrebnov V. A.* On the purity of the limiting Gibbs state for the Ising model on the Bethe lattice // J. Stat. Phys. – 1995. – **79**, № 1-2. – P. 473 – 482.
6. *Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А.* Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. – 1997. – **111**, № 1. – P. 109 – 117.

7. *Розиков У. А.* Структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса и их применения для описания периодических распределений Гиббса // Теор. и мат. физика. – 1997. – **112**, № 1. – P. 170 – 176.
8. *Rozikov U. A., Suhov Yu. M.* Gibbs measures for SOS model on a Cayley tree // Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. RT. – 2006. – **9**, № 3. – P. 471 – 488.
9. *Martin J. B., Rozikov U. A., Suhov Yu. M.* A three state hard-core model on a Cayley tree // J. Nonlinear Math. Phys. – 2005. – **12**, № 3. – P. 432 – 448.
10. *Ganikhodjaev N. N., Rozikov U. A.* On Ising model with four competing interactions on Cayley tree // Math. Phys. Anal. Geom. – 2009. – **12**, № 2. – P. 141 – 156.
11. *Mukhamedov F. M., Rozikov U. A.* On Gibbs measures of models with competing ternary and binary interactions and corresponding von Neumann algebras // J. Stat. Phys. – 2005. – **119**, № 1-2. – P. 427 – 446.
12. *Розиков У. А., Шоюсупов Ш. А.* Плодородные HC-модели с тремя состояниями на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. – 2008. – **156**, № 3. – P. 412 – 424.
13. *Suhov Yu. M., Rozikov U. A.* A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network // Queueing Systems. – 2004. – **46**. – P. 197 – 212.
14. *Розиков У. А., Рахматуллаев М. М.* Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. – 2008. – **156**, № 2. – P. 292 – 302.
15. *Розиков У. А., Рахматуллаев М. М.* Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. – 2009. – **160**, № 3. – P. 507 – 516.
16. *Zachary S.* Countable state space Markov random fields and Markov chains on trees // Ann. Probab. – 1983. – **11**. – P. 894 – 903.
17. *Розиков У. А., Хакимов Р. М.* Условие единственности слабопериодической гиббсовской меры для модели жесткой сердцевины // Теор. и мат. физика. – 2012. – **173**, № 1. – P. 60 – 70.
18. *Хакимов Р. М.* Единственность слабо периодической гиббсовской меры для HC-модели // Мат. заметки. – 2013. – **94**, № 5. – С. 796 – 800.

Получено 19.08.14