УДК 517.938

В. Л. Кулик (Сілез. техн. ун-т, Глівіце, Польща)

КОНСТРУКЦІЇ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА В ТЕОРІЇ РЕГУЛЯРНИХ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

Lyapunov functions are considered in the form of linear combinations of quadratic forms. The conditions under which the linear extensions of dynamic systems on a torus are regular are investigated.

Рассматриваются функции Ляпунова в виде линейной комбинации квадратичных форм. Исследуются условия регулярности линейных расширений динамических систем на торе.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\phi}{dt} = a(\phi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\phi)x, \tag{1}$$

де $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m)$, $x \in R^n$, функція $a(\phi)$ неперервна і 2π-періодична по кожній змінній ϕ_j, $j = \overline{1,m}$. Ця функція може бути скалярною при $m = 1$ і векторною при $m \geq 2$. Матриця $A(\phi)$ є $(n \times n)$-вимірною, елементи її — дійсні функції, неперервні за сукупністю всіх змінних $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m)$ і 2π-періодичні по кожній змінній ϕ_j, $j = \overline{1,m}$. Відносно функції $a(\phi)$ додатково припускається, що задача Коші $d\phi/dt = a(\phi)$, $\phi|_{t=0} = \phi_0$ має єдиний розв'язок при кожному фіксованому значенні $\phi_0 = (\phi_{10}, \phi_{20}, \ldots, \phi_{m0})$. Для цього, очевидно, досить припустити, що функція $a(\phi)$ задовольняє умову Ліпшиця.

Одне з основних і важливих питань, яке виникає при дослідженні системи (1), — це питання існування функції Гріна – Самойленка $G_0(\tau, \phi)$. Цьому питанню присвячено низку наукових досліджень (див., наприклад, $[1-6]$). Ефективним методом дослідження питання існування як єдиної, так і неєдиної функції Гріна – Самойленка з експоненціальною оцінкою $\|G_0(\tau,\phi)\| \leq K \exp\{-\gamma|\tau|\}$, $K, \gamma = \text{const} > 0$, виявився метод функцій Ляпунова. Відомо [4, с. 125], що якщо існує квадратична форма $V = \langle S(\phi)x, x \rangle$ така, що її похідна в силу системи (1) є додатно визначеною:

$$\dot{V} = \left\langle \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi_j} a_j(\phi) + S(\phi)A(\phi) + A^T(\phi)S(\phi) \right] x, x \right\rangle \geq \|x\|^2 \tag{2}$$

і при цьому $\det S(\phi) \neq 0$ $\forall \phi \in T_m$, то система (1) є регулярною, тобто має єдину функцію Гріна – Самойленка. Якщо ж $\det S(\phi_0) = 0$ при деякому значенні $\phi = \phi_0$, то система (1) не має функції Гріна – Самойленка.

Якщо розглянути частинний випадок системи (1):

$$\frac{d\phi}{dt} = a(\phi), \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\phi) & 0 \\ I & -P^T(\phi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

то легко переконатися в тому, що при будь-якій матриці $P(\phi)$ похідна в силу цієї системи невиродженої квадратичної форми $V = \langle x_1, x_2 \rangle$ є невід'ємною: $\dot{V} = \|x_1\|^2$. Очевидно, наведена система при $P(\phi) = 0$ не має функції Гріна – Самойленка, а при $P(\phi) = I$ має єдину таку функцію. Звідси випливає такий висновок: *якщо похідна деякої невиродженої квадратичної форми* $V = \langle S_1(\phi)x, x \rangle$ *в силу системи* (1) *задовольняє нерівності*

$$\left\langle \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial S_1(\phi)}{\partial \phi_j} a_j(\phi) + S_1(\phi)A(\phi) + A^T(\phi)S_1(\phi) \right] x, x \right\rangle \geq 0,$$

то про існування функції Гріна – Самойленка системи (1) *нічого сказати не можна*.

В даній статті пропонується вибирати квадратичні форми у вигляді в'язки певних квадратичних форм $V = V_0 + p_1V_1 + p_2V_2$. При цьому з'являється можливість так змінювати параметри p_1, p_2, щоб похідна в силу системи (1) від квадратичної форми V була додатно визначеною.

Ми доведемо дві теореми, які можуть бути початком нового напрямку використання функцій Ляпунова у вигляді в'язок квадратичних форм при дослідженні тороїдальних многовидів.

Припустимо, що система диференціальних рівнянь (1) записується у вигляді

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = A_{11}(\phi)x_1 + A_{12}(\phi)x_2 + A_{13}(\phi)x_3, \\ \frac{d\phi}{dt} = a(\phi), \qquad &\frac{dx_2}{dt} = A_{21}(\phi)x_1 + A_{22}(\phi)x_2 + A_{23}(\phi)x_3, \\ &\frac{dx_3}{dt} = A_{31}(\phi)x_1 + A_{32}(\phi)x_2 + A_{33}(\phi)x_3, \end{aligned} \tag{3}$$

де $x_i \in R^{n_i}$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$, і існує невироджена $(n \times n)$-вимірна матриця $S_1(\phi) \in C^1(T_m)$, для якої виконується нерівність

$$\left\langle \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial S_1(\phi)}{\partial \phi_j} a_j(\phi) + S_1(\phi)A(\phi) + A^T(\phi)S_1(\phi) \right] x, x \right\rangle \geq \|x_1\|^2. \tag{4}$$

Тепер позначимо

$$\hat{A}(\phi) = \begin{pmatrix} A_{22}(\phi) & A_{23}(\phi) \\ A_{32}(\phi) & A_{33}(\phi) \end{pmatrix}, \qquad \hat{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

і із системи (3) виділимо підсистему

$$\frac{d\phi}{dt} = a(\phi), \qquad \frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{A}(\phi)\hat{x}. \tag{6}$$

Припустимо, що існує симетрична $((n_2+n_3)\times(n_2+n_3))$-вимірна матриця $\hat{S}(\phi)\in C^1(T_m)$, яка задовольняє нерівність

$$\left\langle \left[\frac{\partial \hat{S}(\phi)}{\partial\phi} a(\phi) + \hat{S}(\phi)\hat{A}(\phi) + \hat{A}^T(\phi)\hat{S}(\phi) \right]\hat{x}, \hat{x} \right\rangle \geq \|x_2\|^2. \tag{7}$$

Далі із системи (3) виділимо підсистему

$$\frac{d\phi}{dt} = a(\phi), \qquad \frac{dx_3}{dt} = A_{33}(\phi)x_3 \tag{8}$$

і припустимо, що для неї існує квадратична форма $V_3 = \langle S_{33}(\phi)x_3, x_3\rangle$ з симетричною $(n_3\times n_3)$-вимірною матрицею $S_{33}(\phi)\in C^1(T_m)$, похідна якої в силу системи (8) буде додатно визначеною:

$$\left\langle \left[\frac{\partial S_{33}(\phi)}{\partial\phi} a(\phi) + S_{33}(\phi)A_{33}(\phi) + A_{33}^T(\phi)S_{33}(\phi) \right] x_3, x_3 \right\rangle \geq \|x_3\|^2. \tag{9}$$

Виявилося, що при умовах (4), (7), (9) можна гарантувати регулярність системи (4). Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай існують симетричні матриці* $S_1(\phi)$, $\hat{S}(\phi)$, $S_{33}(\phi)\in C^1(T_m)$ *розмірів* $n\times n$, $(n_2+n_3)\times(n_2+n_3)$, $n_3\times n_3$ *відповідно, які задовольняють умови* (4), (7), (9) *і при цьому* $\det S_1(\phi)\neq 0$ $\forall\phi\in T_m$. *Тоді система* (3) *має єдину функцію Гріна – Самойленка, причому похідна в силу системи* (3) *невиродженої квадратичної форми*

$$V(x,\phi; p_1, p_2) = p_1\langle S_1(\phi)x, x\rangle + p_2\left\langle \hat{S}(\phi)\hat{x}, \hat{x}\right\rangle + \langle S_{33}(\phi)x_3, x_3\rangle \tag{10}$$

при достатньо великих значеннях параметрів $p_1 > p_2 > 0$ *буде додатно визначеною.*

Доведення. Запишемо квадратичну форму з одним параметром p_2 у вигляді

$$V_2 = p_2\left\langle \hat{S}(\phi)\hat{x}, \hat{x}\right\rangle + \langle S_{33}(\phi)x_3, x_3\rangle =$$

$$= \left\langle \left[p_2\hat{S}(\phi) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{33}(\phi) \end{pmatrix} \right]\hat{x}, \hat{x} \right\rangle = \langle S(\phi; p_2)\hat{x}, \hat{x}\rangle \tag{11}$$

і покажемо, що її похідна в силу виділеної підсистеми (6) буде додатно визначеною при виборі достатньо великих значень параметра $p_2 > 0$. Маємо

$$\dot{V}_2 = p_2\left\langle \frac{\partial \hat{S}(\phi)}{\partial\phi} a(\phi)\hat{x}, \hat{x}\right\rangle + 2p_2\left\langle \hat{S}(\phi)\hat{x}, \hat{A}(\phi)\hat{x}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial S_{33}(\phi)}{\partial\phi} a(\phi)x_3, x_3\right\rangle +$$

$$+2\left\langle S_{33}(\phi)x_3, A_{32}(\phi)x_2 + A_{33}(\phi)x_3\right\rangle \geq p_2\|x_2\|^2 - 2\|S_{33}A_{32}\|_0\|x_2\|\|x_3\| + \|x_3\|^2 .$$

Звідси видно, що якщо вибрати $p_2 > \|S_{33}A_{32}\|_0^2 = \max_{\phi\in T_m}\|S_{33}(\phi)A_{32}(\phi)\|^2$, то похідна $\dot{V}_2$ буде додатно визначеною:

$$\dot{V}_2 \geq \frac{p_2 - \|S_{33}A_{32}\|_0^2}{p_2+1}\left(\|x_2\|^2 + \|x_3\|^2\right) = \gamma(p_2)\|\hat{x}\|^2 . \tag{12}$$

Тепер квадратичну форму (10) запишемо у вигляді

$$V = p_1\left\langle S_1(\phi)x, x\right\rangle + V_2 = p_1\left\langle S_1(\phi)x, x\right\rangle + \left\langle S(\phi; p_2)\hat{x}, \hat{x}\right\rangle$$

і, врахувавши нерівності (4), (12), оцінимо її похідну в силу системи (3). Маємо

$$\dot{V} = p_1\left\langle \frac{\partial S_1(\phi)}{\partial\phi} a(\phi)x, x\right\rangle + 2p_1\left\langle S_1(\phi)x, A(\phi)x\right\rangle +$$

$$+\left\langle \frac{\partial S(\phi; p_1)}{\partial\phi} a(\phi)\hat{x}, \hat{x}\right\rangle + 2\left\langle S(\phi; p_2)\hat{x}, \hat{A}_{21}(\phi)x_1 + \hat{A}(\phi)\hat{x}\right\rangle \geq$$

$$\geq p_1\|x_1\|^2 - 2(p_2L_2 + L_3)\|x_1\|\|\hat{x}\| + \gamma(p_2)\|\hat{x}\|^2 , \tag{13}$$

де

$$L_2 = \max_{\phi\in T_m}\left\|\hat{S}(\phi)\hat{A}_{21}(\phi)\right\|, \quad L_3 = \max_{\phi\in T_m}\|S_{33}(\phi)A_{31}(\phi)\|, \quad \hat{A}_{21}(\phi) = \begin{pmatrix} A_{21}(\phi) \\ A_{31}(\phi)\end{pmatrix},$$

$$\gamma(p_2) = \frac{p_2 - L_1^2}{p_2+1}, \quad L_1 = \max_{\phi\in T_m}\|S_{33}(\phi)A_{32}(\phi)\|.$$

З нерівності (13) випливає

$$\dot{V} \geq \frac{p_1\gamma(p_2) - (p_2L_2 + L_3)^2}{p_1 + \gamma(p_2)}\left(\|x_1\|^2 + \|\hat{x}\|^2\right) =$$

$$= \frac{p_1\left(p_2 - L_1^2\right) - (p_2+1)(p_2L_2 + L_3)^2}{p_1(p_2+1) + p_2 - L_1^2}\|x\|^2 = \gamma(p_1, p_2)\|x\|^2 .$$

Оскільки $\lim_{p_1\to\infty}\gamma(p_1,p_2)=\gamma(p_2)>0$, то при достатньо великих значеннях параметрів $p_1>p_2>0$ похідна невиродженої квадратичної форми (10) в силу системи (3) буде додатно визначеною. Звідси випливає, що система (3) буде регулярною.

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** Нерівності (4), (7), (9) записуються у вигляді

$$\left\langle\left[\dot S_1(\phi)+S_1(\phi)A(\phi)+A^T(\phi)S_1(\phi)\right]x,x\right\rangle\geq\|C_1x\|^2,$$

$$\left\langle\left[\dot S_2(\phi)+S_2(\phi)A(\phi)+A^T(\phi)S_2(\phi)\right](C_2+C_3)x,(C_2+C_3)x\right\rangle\geq\|C_2x\|^2,$$

$$\left\langle\left[\dot S_3(\phi)+S_3(\phi)A(\phi)+A^T(\phi)S_3(\phi)\right]C_3x,C_3x\right\rangle\geq\|C_3x\|^2,$$

де

$$C_1=\operatorname{diag}\left\{I_{n_1},0,0\right\},\qquad C_2=\operatorname{diag}\left\{0,I_{n_2},0\right\},\qquad C_3=\operatorname{diag}\left\{0,0,I_{n_3}\right\},$$

$$S_3(\phi)=\left\{0,0,S_{33}(\phi)\right\},\qquad S_2(\phi)=\operatorname{diag}\left\{0,\hat S(\phi)\right\}.$$

Виникає питання: якщо в наведених нерівностях матриці C_i не є сталими, а матриці $S_2(\phi)$, $S_3(\phi)$ не обов'язково є блоково-діагональними, то чи буде звідси випливати існування квадратичної форми $\langle S(\phi)x,x\rangle$ такої, щоб її похідна в силу системи (3) була додатно визначеною? Відповідь на це питання дає наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай система* (1) *така, що існують три* $(n\times n)$*-вимірні симетричні матриці* $S_j(\phi)\in C^1(T_m)$, $j=1,2,3$, *які задовольняють нерівності*

$$\left\langle\left[\frac{\partial S_1(\phi)}{\partial\phi}a(\phi)+S_1(\phi)A(\phi)+A^T(\phi)S_1(\phi)\right]x,x\right\rangle\geq\|C_1(\phi)x\|^2, \tag{14}$$

$$\left\langle\left[\frac{\partial S_2(\phi)}{\partial\phi}a(\phi)+S_2(\phi)A(\phi)+A^T(\phi)S_2(\phi)\right](C_2(\phi)+C_3(\phi))x,\right.$$

$$\left.(C_2(\phi)+C_3(\phi))x\right\rangle\geq\|C_2(\phi)x\|^2, \tag{15}$$

$$\left\langle\left[\frac{\partial S_3(\phi)}{\partial\phi}a(\phi)+S_3(\phi)A(\phi)+A^T(\phi)S_3(\phi)\right]C_3(\phi)x,C_3(\phi)x\right\rangle\geq\|C_3(\phi)x\|^2 \tag{16}$$

при деяких неперервних матрицях $C_1(\phi)$, $C_2(\phi)$, $C_3(\phi)\in C^0(T_m)$, сума *яких* $C(\phi)=$ $=C_1(\phi)+C_2(\phi)+C_3(\phi)$ *має такі властивості*:

$$\det C(\phi)\neq0\quad\forall\phi\in T_m,\qquad C(\phi)C_1(\phi)\equiv C_1(\phi)C(\phi). \tag{17}$$

Тоді похідна від квадратичної форми

$$V = p_1 \langle S_1(\phi)x, x\rangle + p_2 \langle S_2(\phi)x, x\rangle + p_3 \langle S_3(\phi)x, x\rangle \tag{18}$$

в силу системи (1) *при деяких дійсних значеннях параметрів* p_j, $j = 1, 2, 3$, *буде додатно визначеною*: $\dot V \geq ||x||^2$.

Доведення. Розглянемо матрицю з дійсним додатним параметром $\lambda \in R_+$: $S(\phi;\lambda) = \lambda S_2(\phi) + S_3(\phi)$ і покажемо, що при достатньо великих значеннях параметра $\lambda > 0$ для неї виконується нерівність

$$\left\langle \left[\frac{\partial S(\phi;\lambda)}{\partial \phi} a(\phi) + S(\phi;\lambda) A(\phi) + A^T(\phi) S(\phi;\lambda) \right] (C_2(\phi) + C_3(\phi))x, \right.$$
$$\left. (C_2(\phi) + C_3(\phi))x \right\rangle \geq \gamma(\lambda) \left\| (C_2(\phi) + C_3(\phi))x \right\|^2, \tag{19}$$

де

$$\gamma(\lambda) = \frac{\lambda - K_3 - K_3^2}{2(\lambda - K_3 + 1)} > 0,$$

$$K_3 = \max_{\phi \in T_m} \left\| \left[\frac{\partial S_3(\phi)}{\partial \phi} a(\phi) + S_3(\phi) A(\phi) + A^T(\phi) S_3(\phi) \right] \right\|.$$

Дійсно, врахувавши умови (15), (16), оцінимо знизу ліву частину нерівності (19). Позначаючи

$$\dot S = \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi} a(\phi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi_j} a_j(\phi),$$

отримуємо

$$\lambda \left\langle \left[\dot S_2 + S_2 A + A^T S_2 \right] (C_2 + C_3)x, (C_2 + C_3)x \right\rangle +$$
$$+ \left\langle \left[\dot S_3 + S_3 A + A^T S_3 \right] (C_2 + C_3)x, (C_2 + C_3)x \right\rangle \geq$$
$$\geq \lambda ||C_2 x||^2 - K_3 ||C_2 x||^2 - 2K_3 ||C_2 x|| ||C_3 x|| + ||C_3 x||^2 \geq \gamma(\lambda) ||(C_2 + C_3)x||^2.$$

Далі розглянемо симетричну матрицю з двома параметрами

$$S(\phi; \lambda_1, \lambda) = \lambda_1 S_1(\phi) + \lambda S_2(\phi) + S_3(\phi)$$

і покажемо, що похідна $\dot V$ в силу системи (1) квадратичної форми

$$V = \left\langle S(\phi;\lambda_1,\lambda)x,x \right\rangle = \lambda_1 \left\langle S_1(\phi)x,x \right\rangle + \left\langle S(\phi;\lambda)x,x \right\rangle$$

при виборі достатньо великих значень параметрів λ_1, λ буде додатно визначеною. Оцінимо цю похідну. Позначаючи $S(\phi;\lambda) = S(\lambda)$, з урахуванням умов (14) – (17) маємо

$$\dot{V} = \lambda_1 \left\langle \left(\dot{S}_1 + S_1 A + A^T S_1 \right) x,x \right\rangle + \left\langle \left(\dot{S}(\lambda) + S(\lambda)A + A^T S(\lambda) \right) x,x \right\rangle \geq$$

$$\geq \lambda_1 \|C_1 x\|^2 + \left\langle \left(\dot{S}(\lambda) + S(\lambda)A + A^T S(\lambda) \right) (C_1 + C_2 + C_3) C^{-1} x, (C_1 + C_2 + C_3) C^{-1} x \right\rangle =$$

$$= \lambda_1 \|C_1 x\|^2 + \left\langle \left(\dot{S}(\lambda) + S(\lambda)A + A^T S(\lambda) \right) C_1 C^{-1} x, C_1 C^{-1} x \right\rangle +$$

$$+2 \left\langle \left(\dot{S}(\lambda) + S(\lambda)A + A^T S(\lambda) \right) C_1 C^{-1} x, (C_2 + C_3) C^{-1} x \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \left(\dot{S}(\lambda) + S(\lambda)A + A^T S(\lambda) \right) (C_2 + C_3) C^{-1} x, (C_2 + C_3) C^{-1} x \right\rangle \geq$$

$$\geq \lambda_1 \|C_1 x\|^2 - K(\lambda) \|C_1 x\|^2 - 2K(\lambda) \|C_1 x\| \|(C_2 + C_3) x\| + \gamma(\lambda) \|(C_2 + C_3) x\|^2 ,$$

де

$$K(\lambda) = \lambda K_2 + K_3 ,$$

$$K_i = \max_{\phi \in T_m} \left\| \left(C^{-1}(\phi) \right)^T \left[\dot{S}_i(\phi) + S_i(\phi) A(\phi) + A^T(\phi) S_i(\phi) \right] C^{-1}(\phi) \right\|, \quad i = 2,\, 3.$$

Розглядаючи відповідну квадратичну форму

$$\Phi(t_1,t_2) = (\lambda_1 - K(\lambda)) t_1^2 - 2K(\lambda) t_1 t_2 + \gamma(\lambda) t_2^2 ,$$

легко отримуємо нерівність

$$\Phi(t_1,t_2) \geq \frac{(\lambda_1 - K(\lambda))\gamma(\lambda) - K^2(\lambda)}{\lambda_1 - K(\lambda) + \gamma(\lambda)} \left(t_1^2 + t_2^2 \right) = \gamma(\lambda_1,\lambda) \left(t_1^2 + t_2^2 \right),$$

$$\lambda_1 > K(\lambda) + \frac{1}{\gamma(\lambda)} K^2(\lambda).$$

Звідси випливає, що для похідної $\dot{V}$ при достатньо великих значеннях $\lambda_1 > 0$ виконується нерівність $\dot{V} \geq \gamma(\lambda_1,\lambda) \left(\|C_1 x\|^2 + \|(C_2 + C_3) x\|^2 \right)$. Враховуючи очевидні нерівності

$$\|C_1x\|^2 + \|(C_2 + C_3)x\|^2 \geq \frac{1}{2}\|Cx\|^2 \geq \frac{1}{2\|C^{-1}\|_0^2}\|x\|^2,$$

маємо

$$\dot{V} \geq \frac{\gamma(\lambda_1, \lambda)}{2\|C^{-1}\|_0^2}\|x\|^2 = \overline{\gamma}(\lambda_1, \lambda)\|x\|^2.$$

Тепер в сумі матриць (18) вибираємо $p_1 = \dfrac{\lambda_1}{\overline{\gamma}(\lambda_1, \lambda)}$, $p_2 = \dfrac{\lambda}{\overline{\gamma}(\lambda_1, \lambda)}$, $p_3 = \dfrac{1}{\overline{\gamma}(\lambda_1, \lambda)}$ і отримуємо $\dot{V} \geq \|x\|^2$.

Теорему 2 доведено.

Зауваження 2. Якщо в умовах теореми 2 тотожність (17) не виконується, то, хоча і справджуються умови (14) – (16), немає гарантії існування квадратичної форми, яка б мала знаковизначену похідну в силу системи (1).

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
2. *Самойленко А. М.* О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1665 – 1699.
3. *Самойленко А. М.* К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 513 – 521.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
5. *Бойчук А. А.* Условие существования единственной функции Грина – Самойленко задачи об инвариантном торе // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 556 – 559.
6. *Кулик В., Степаненко Н.* Знакозмінні функції Ляпунова в теорії лінійних розширень динамічних систем на торі // Укр. мат. журн. – 2007. – **46**, № 4. – С. 488 – 500.

Одержано 01.10.13,
після доопрацювання — 15.07.15