УДК 519.2

М. М. Осипчук (Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ),
М. І. Портенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ПОТЕНЦІАЛИ ПРОСТОГО ШАРУ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We consider single-layer potentials for a class of pseudodifferential equations connected with symmetric stable stochastic processes. An operator similar to the operator of gradient in the classical potential theory is selected and an analog of the classical theorem on the jump of (co)normal derivative of a single-layer potential is established. This result allows one to construct a solution of some initial-boundary-value problems for pseudodifferential equations of the indicated kind.

Построены потенциалы простого слоя для класса псевдодифференциальных уравнений, связанных с симметричными устойчивыми случайными процессами. Выделен оператор, который является аналогом градиента в классической теории, и доказана теорема, аналогичная классической теореме о скачке (ко-)нормальной производной потенциала простого слоя. С помощью этой теоремы построены решения некоторых начально-краевых задач для псевдодифференциальных уравнений упомянутого класса.

Вступ. Протягом останніх років псевдодиференціальні рівняння стали об'єктом численних публікацій (див., наприклад, монографію [1] і наведену там бібліографію). Для авторів цієї статті, як математиків-ймовірнісників, найближчими є ті роботи (наприклад, тритомник [2]), які присвячено псевдодиференціальним рівнянням параболічного типу, що відповідають певним класам випадкових процесів. Серед таких найпростішими є симетричні стійкі процеси. Їх роль у відповідній теорії потенціалу є такою ж, яку відіграє вінерів процес у класичній теорії.

Однією з найкрасивіших в класичній теорії є теорема про стрибок (ко-)нормальної похідної потенціалу простого шару. Саме вона дає змогу будувати розв'язки початково-крайових задач типу задачі Неймана або третьої крайової задачі (див., наприклад, [3, 4]).

Мета цієї роботи — побудувати щось подібне для псевдодиференціальних рівнянь, породжених багатовимірними симетричними стійкими процесами. Генератор таких процесів відіграє роль лапласіана у класичній теорії. Ми вказуємо оператор, роль якого в новій теорії подібна до ролі градієнта у класиці. Потім формулюємо і доводимо аналог теореми про стрибок (ко-)нормальної похідної потенціалу простого шару, а з його допомогою будуємо розв'язки деяких початково-крайових задач для відповідних псевдодиференціальних рівнянь.

1. Багатовимірні симетричні стійкі процеси. ***1.1. Оператор* A.** Зафіксуємо параметри $c > 0$, $\alpha \in (1,2)$ та ціле число $d \geq 1$. Визначимо оператор $\mathbf{A}$ його символом: $(-c|\xi|^{\alpha})_{\xi\in\mathbb{R}^d}$ (через $\mathbb{R}^d$ позначається d-вимірний евклідів простір). Це означає, що $\mathbf{A}$ діє на функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$, яка є перетворенням Фур'є деякої функції $(\Phi(\xi))_{\xi\in\mathbb{R}^d}$, за правилом $\mathbf{A}\varphi(x) = -c\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\alpha}\exp\{i(x,\xi)\}\Phi(\xi)\,d\xi$, $x \in \mathbb{R}^d$, за умови, що інтеграл у цій формулі є визначеним. Інше зображення дії оператора $\mathbf{A}$ на функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ дається формулою $\mathbf{A}\varphi(x) = \dfrac{c}{\varkappa}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)-(\nabla\varphi(x),y)}{|y|^{d+\alpha}}\,dy$, $x \in \mathbb{R}^d$, за припущення, що функція $\varphi(x)$ є достатньо гладкою і обмеженою разом зі своїми похідними. В цій формулі стала $\varkappa = -\dfrac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma(2-\alpha)\Gamma((\alpha+1)/2)\cos(\pi\alpha/2)}{\alpha(\alpha-1)\Gamma((d+\alpha)/2)}$ залежить лише від $\alpha \in (1,2)$ і розмірності простору d.

1.2. Щільність ймовірності переходу. Для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$ покладемо

$$g(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(x-y,\xi) - ct|\xi|^\alpha\}\, d\xi. \tag{1}$$

Нескладно перевірити, що функція g є неперервною за сукупністю змінних, а також задовольняє такі умови:

(а) $g(s+t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,z) g(t,z,y)\, dz$, $s > 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$;

(б) $\int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\, dy \equiv 1$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$;

(в) $g(t,x,y) > 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Отже, існує процес Маркова в $\mathbb{R}^d$, для якого g є щільністю (відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^d$) ймовірності переходу. Більше того, цей процес можна вибрати так, щоб його траєкторії були неперервними справа і не мали розривів другого роду. Саме цей процес і називатимемо симетричним стійким процесом в $\mathbb{R}^d$ (з параметрами c та α).

1.3. Задача Коші. Для неперервної обмеженої функції $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ з дійсними значеннями покладемо

$$u(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\, dy, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

Легко перевіряється, що ця функція є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A} u(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{3}$$

$$\lim_{t \to 0+} u(t,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

Будемо позначати через $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ банахів простір усіх обмежених неперервних функцій $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$, для яких $\|\varphi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x)|$. Через $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$ позначатимемо підпростір $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, складений із тих функцій $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, для яких при довільному $\varepsilon > 0$ множина $\{x \in \mathbb{R}^d : |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}$ є компактом в $\mathbb{R}^d$.

Неважко зрозуміти, що при всіх $t > 0$ функція $u(t,\cdot,\varphi)$, визначена інтегралом (2), є функцією з $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$, якщо такою є функція φ.

З принципу максимуму для рівняння (3) (див., наприклад, [1], лема 4.7) випливає, що розв'язок задачі Коші (3), (4) єдиний у класі $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

1.4. Деякі властивості симетричних стійких розподілів. Для цілих $d \geq 1$ та $x \in \mathbb{R}^d$ покладемо $h_d(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{-i(x,\xi) - c|\xi|^\alpha\}\, d\xi$. Функція g, визначена формулою (1), виражається через h_d рівністю $g(t,x,y) = t^{-d/\alpha} h_d((y-x)t^{-1/\alpha})$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$. Наступне зображення функції h_d є відомим (див., наприклад, [5]):

$$h_d(x) = (2\pi)^{-d/2} |x|^{-d/2+1} \int\limits_0^{+\infty} \rho^{d/2} e^{-c\rho^\alpha} J_{d/2-1}(\rho|x|)\, d\rho, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5}$$

де J_μ означає бесселеву функцію, тобто $J_\mu(z) = \dfrac{(z/2)^\mu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+1/2)} \int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\mu-1/2}\cos(zu)\,du$ при $\operatorname{Re}\mu > -1/2$ та $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\cos z$.

Формула (5) має своїм наслідком наступне твердження, що характеризує поведінку h_d при великих $|x|$ (див. [5]):

$$\lim_{|x|\to+\infty}|x|^{d+\alpha}h_d(x) = \alpha\, c\, 2^{\alpha-1}\pi^{-d/2-1}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,\Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{6}$$

З цього твердження легко вивести існування такої сталої N, що $h_d(x) \le N\dfrac{1}{(1+|x|)^{d+\alpha}}$, $x \in \mathbb{R}^d$, звідки випливає нерівність для функції g

$$g(t,x,y) \le N\frac{t}{(t^{1/\alpha}+|x-y|)^{d+\alpha}}, \tag{7}$$

що справджується при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$. Цю нерівність, як і деякі більш загальні, включаючи нерівності для (дробових) похідних від g, можна знайти в [1]. Нижче ми використаємо подібні оцінки.

Наступне твердження є майже очевидним, однак ми наведемо його аналітичне доведення.

Лема 1. *Нехай $d \ge 2$, ν — фіксований орт в $\mathbb{R}^d$, а $\tilde{x}$ — довільний вектор в $\mathbb{R}^d$, ортогональний до ν. Тоді для довільного $\xi \in \mathbb{R}^1$ виконується рівність*

$$\int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda\xi}h_d(\lambda\nu+\tilde{x})\,d\lambda = (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}}|\tilde{x}|^{-\frac{d-3}{2}}\int_0^{+\infty}\exp\{-c(\xi^2+\rho^2)^{\alpha/2}\}\rho^{\frac{d-1}{2}}J_{\frac{d-3}{2}}(\rho|\tilde{x}|)\,d\rho. \tag{8}$$

Доведення. Позначимо інтеграл у лівій частині (8) через I. З формули (5) випливає рівність

$$I = \frac{2}{(2\pi)^{d/2}}\int_0^{+\infty}\rho^{d/2}e^{-c\rho^\alpha}\,d\rho\int_0^{+\infty}J_{d/2-1}(\rho\sqrt{\lambda^2+b^2})(\lambda^2+b^2)^{-\frac{d-2}{4}}\cos(\lambda\xi)\,d\lambda,$$

де $b = |\tilde{x}|$. Внутрішній інтеграл у цій формулі обчислюється (див. [6], гл. III, § 16), а саме

$$\int_0^{+\infty}J_{d/2-1}(\rho\sqrt{\lambda^2+b^2})(\lambda^2+b^2)^{-\frac{d-2}{4}}\cos(\lambda\xi)\,d\lambda =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad |\xi| > \rho, \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\rho^{-\frac{d-2}{2}}J_{\frac{d-3}{2}}\left(b\sqrt{\rho^2-\xi^2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{\rho^2-\xi^2}}{b}\right)^{\frac{d-3}{2}}, & \text{якщо} \quad |\xi| < \rho. \end{cases}$$

Тому

$$I = (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}}b^{-\frac{d-3}{2}}\int_{|\xi|}^{+\infty}e^{-c\rho^\alpha}\rho\,J_{\frac{d-3}{2}}\left(b\sqrt{\rho^2-\xi^2}\right)\left(\sqrt{\rho^2-\xi^2}\right)^{\frac{d-3}{2}}\,d\rho.$$

Виконуючи тут підстановку $\rho' = \sqrt{\rho^2-\xi^2}$, отримуємо формулу (8).

Лему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $\mathbb{L}$ — *підпростір* $\mathbb{R}^d$, $\dim \mathbb{L} = k$, $1 \le k < d$. *Для довільних* $\xi \in \mathbb{L}$ *та* $\tilde{x} \in \mathbb{L}^\perp$ *справджується рівність*

$$\int\limits_{\mathbb{L}} e^{i(x,\xi)} h_d(x+\tilde{x})\,dx = (2\pi)^{-\frac{d-k}{2}} |\tilde{x}|^{-\frac{d-k-2}{2}} \int\limits_0^{+\infty} \rho^{\frac{d-k}{2}} \exp\left\{-c(|\xi|^2+\rho^2)^{\alpha/2}\right\} J_{\frac{d-k-2}{2}}(\rho|\tilde{x}|)\,d\rho.$$

Зокрема, якщо ν — *фіксований орт в* $\mathbb{R}^d$, $S = \left\{x \in \mathbb{R}^d : (x,\nu) = 0\right\}$, *то для* $\xi \in S$ *та* $\lambda \in \mathbb{R}^1$ *справедливим є співвідношення*

$$\int\limits_S e^{i(x,\xi)} h_d(x+\lambda\nu)\,dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} e^{-c(|\xi|^2+\rho^2)^{\alpha/2}} \cos(\rho\lambda)\,d\rho. \tag{9}$$

2. Потенціали простого шару. ***2.1. Поверхні класу*** $H^{1+\gamma}$. Нехай задано деяку обмежену замкнену поверхню S, яка розділяє множину $\mathbb{R}^d \setminus S$ на дві відкриті підмножини: внутрішню D та зовнішню $\mathbb{R}^d \setminus \bar{D}$ (через $\bar{\Gamma}$ позначається замикання множини $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$). Будемо припускати, що в кожній точці $x \in S$ існує дотична до S гіперплощина. Через $\nu(x)$ позначатимемо одиничний вектор зовнішньої нормалі до S у точці $x \in S$. Локальною системою координат у точці $x \in S$ називається така ортогональна система координат $(y^1, y^2, \ldots, y^d)$ з початком у точці x, що $y^d = (\nu(x), y)$. Припускатиметься, що існує таке $r_0 > 0$, що для будь-якої точки $x \in S$ частина поверхні $S_{r_0}(x) = S \cap B_{r_0}(x)$ (тут і далі через $B_\delta(z)$ позначено замкнену кулю в $\mathbb{R}^d$ радіуса $\delta > 0$ з центром у точці $z \in \mathbb{R}^d$) може бути заданою в локальній системі координат (з початком у точці x) рівнянням $y^d = F(y^1, y^2, \ldots, y^{d-1})$, де F — деяка однозначна функція. Нагадаємо (див., наприклад, [4], глава IV, § 4), що S називається поверхнею класу $H^{1+\gamma}$ для деякого $\gamma \in (0,1)$, якщо для кожного $x \in S$ відповідна функція F в області $\sum_{k=1}^{d-1} (y^k)^2 \le r_0^2/4$ має неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial F}{\partial y^k}$, $k = 1, 2, \ldots, d-1$, які задовольняють у цій області умову Гельдера з показником γ і сталою, що не залежить від x. Далі будемо припускати, що поверхня S є саме такою.

Елементарно доводиться, що для замкненої поверхні S класу $H^{1+\gamma}$ виконується нерівність $\displaystyle\int_S \frac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}} \le \tilde{K}\, t^{-1-1/\alpha}$ при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ з деякою сталою $\tilde{K} > 0$. Ця нерівність разом з (7) приводить до оцінки

$$\int\limits_S g(t,x,y)\,d\sigma_y \le K t^{-1/\alpha}, \tag{10}$$

що справджується при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ з деякою сталою $K > 0$.

2.2. Потенціал простого шару. Нехай на множині $(0,+\infty) \times S$ задано неперервну функцію v, яка задовольняє нерівність $|v(t,x)| \le C\, t^{-\beta}$ при всіх $(t,x) \in (0,+\infty) \times S$ із деякими сталими $C > 0$ та $\beta < 1$. Розглянемо функцію U змінних $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$, що визначається рівністю $U(t,x) = \displaystyle\int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,y) v(\tau,y)\,d\sigma_y$. Неважко бачити, що це неперервна функція за сукупністю змінних в області $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$, яка задовольняє нерівність $|U(t,x)| \le$ $\le C\,K\,\dfrac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-1/\alpha)}{\Gamma(2-\beta-1/\alpha)}\, t^{1-\beta-1/\alpha}$, де K — стала з (10). Ця функція і називається потенціалом простого шару (з густиною v „маси”, розподіленою по поверхні S).

Покажемо, що функція U задовольняє рівняння (3) в області $(t,x) \in (0,+\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$. З цією метою оцінимо значення функції $\mathbf{A}g(t,\cdot,y)(x)$ (далі це будемо записувати коротше $\mathbf{A}_x g(t,x,y)$) в області $t>0$, $x \notin S$. Використовуючи означення оператора $\mathbf{A}$, можемо записати

$$\mathbf{A}_x g(t,x,y) = -\frac{c}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\alpha \exp\{i(x-y,\xi) - ct|\xi|^\alpha\}\, d\xi =$$

$$= -\frac{c}{(2\pi)^d} t^{-(d+\alpha)/\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\alpha \exp\left\{ i\left(\frac{x-y}{t^{1/\alpha}}, \xi\right) - c|\xi|^\alpha \right\} d\xi.$$

Згідно з лемою 4.2 в [1], існує така стала $N>0$, що при $t>0$, $x \notin S$ та $y \in S$

$$|\mathbf{A}_x g(t,x,y)| \le \frac{N}{(t^{1/\alpha} + |x-y|)^{d+\alpha}} \le \frac{N}{(t^{1/\alpha} + d(x,S))^{d+\alpha}},$$

де через $d(x,S)$ позначено відстань від x до S. Тому

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S |\mathbf{A}_x g(t-\tau,x,y)||v(\tau,y)|\, d\sigma_y \le C\,N\,|S| \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau^\beta((t-\tau)^{1/\alpha} + d(x,S))^{d+\alpha}},$$

де $|S|$ — площа поверхні S. Інтеграл у правій частині цієї нерівності скінченний при $t>0$. Така ж нерівність виконується і у випадку, якщо замість $\mathbf{A}_x g(t-\tau,x,y)$ у лівій частині буде $\dfrac{\partial g(t-\tau,x,y)}{\partial t}$, оскільки $g(t-\tau,x,y)$, як функція аргументів $(t,x) \in (\tau,+\infty) \times \mathbb{R}^d$, задовольняє рівняння (3) при фіксованих $\tau > 0$ та $y \in \mathbb{R}^d$. Отже, залишилося довести, що при фіксованих $x \notin S$ та $t>0$ $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_S g(\varepsilon,x,y)v(t,y)\, d\sigma_y = 0$. Але це випливає з нерівності (7):

$$\int\limits_S g(\varepsilon,x,y)|v(t,y)|\, d\sigma_y \le C\,N\,|S|\, t^{-\beta} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^{1/\alpha} + d(x,S))^{d+\alpha}}.$$

Таким чином, $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \mathbf{A}U$ в області $(t,x) \in (0,+\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$.

Цей результат узгоджується з відповідним класичним результатом: поза поверхнею-носієм потенціалу простого шару він є розв'язком відповідного параболічного рівняння (див. [4], гл. V).

2.3. Оператор $\mathbf{B}$. Позначимо через $\mathbf{B}$ оператор, символом якого є векторна функція $(2ic|\xi|^{\alpha-2}\xi)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$ (тут i — уявна одиниця). Це означає, що дія оператора $\mathbf{B}$ на функцію $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x,\xi)}\Phi(\xi)\, d\xi$, $x \in \mathbb{R}^d$, визначається рівністю $\mathbf{B}\varphi(x) = 2ic \int_{\mathbb{R}^d} \xi|\xi|^{\alpha-2} e^{i(x,\xi)}\Phi(\xi)\, d\xi$, $x \in \mathbb{R}^d$, за припущення, що цей інтеграл є визначеним.

Інша формула для результату дії оператора $\mathbf{B}$ на досить гладку функцію $(\psi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ має вигляд $\mathbf{B}\psi(x) = \dfrac{2c}{\alpha\varkappa} \int_{\mathbb{R}^d} \dfrac{\psi(x+y)-\psi(x)}{|y|^{d+\alpha}}\, y\, dy$, $x \in \mathbb{R}^d$, де $\varkappa$ — стала, визначена вище (див. пп. 1.1).

Оператор $\mathbf{B}$ буде відігравати роль, подібну до ролі градієнта у класичній теорії. Зауважимо, що $\mathbf{A} = \dfrac{1}{2}\,\mathbf{div}\,\mathbf{B}$.

Для фіксованого орта $\nu \in \mathbb{R}^d$ через $\mathbf{B}_\nu$ позначаємо оператор, що визначається символом $(2ic|\xi|^{\alpha-2}(\xi,\nu))_{\xi\in\mathbb{R}^d}$. Цей оператор є аналогом оператора диференціювання у напрямку ν.

Позначимо через $g_\nu(t,x,y)$ результат дії оператора $\mathbf{B}_\nu$ на функцію g, як функцію середнього аргументу $g_\nu(t,x,y) = \mathbf{B}_\nu g(t,\cdot,y)(x)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$. З формули (1) випливає рівність $g_\nu(t,x,y) = \dfrac{2ic}{(2\pi)^d}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\exp\{i(x-y,\xi)-ct|\xi|^\alpha\}|\xi|^{\alpha-2}(\xi,\nu)\,d\xi$, що справджується при $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$. Інтегрування частинами тут приводить до формули

$$g_\nu(t,x,y) = \frac{2}{\alpha}\,\frac{(y-x,\nu)}{t}\,g(t,x,y). \tag{11}$$

Ця формула цілком подібна до похідної в напрямку ν щільності ймовірності переходу вінерового процесу.

Нехай тепер S, як і вище, є заданою обмеженою замкненою поверхнею в $\mathbb{R}^d$, що належить класу $H^{1+\gamma}$. Зафіксуємо точку $x_0\in S$ і покажемо, що при $0<\tau<t$ існує інтеграл $\displaystyle\int_S g_{\nu(x_0)}(t-\tau,x_0,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y$, де v — функція на $(0,+\infty)\times S$, яка задовольняє умови з пп. 2.2. Позначивши цей інтеграл через I і врахувавши (11), можемо записати

$$I = \frac{2}{\alpha(t-\tau)}\int\limits_S (y-x_0,\nu(x_0))g(t-\tau,x_0,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y = I' + I'',$$

де I' відповідає інтегралу по $S_{r_0/2}(x_0)$, а I'' — по $S\setminus S_{r_0/2}(x_0)$.

Для $y\in S_{r_0/2}(x_0)$, використовуючи локальну систему координат (див. пп. 2.1), будемо мати $|(y,\nu(x_0))| \le \mathrm{const}\,|y|^{1+\gamma}$ (тут const не залежить від x_0). Оцінка (7) дозволяє тепер стверджувати, що

$$|I'| \le \mathrm{const}\,\tau^{-\beta}\int\limits_{S_{r_0/2}(x_0)}\frac{|y|^{1+\gamma}\,d\sigma_y}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y|)^{d+\alpha}} \le \mathrm{const}\,\tau^{-\beta}(t-\tau)^{-1+\gamma/\alpha}.$$

Далі, існують додатне число δ_0 і скінченна кількість точок $x_1,x_2,\ldots,x_m$ на поверхні S таких, що $S\setminus S_{r_0/2}(x_0)\subseteq\bigcup_{k=1}^{m_0}S_{r_0/2}(x_k)$ і при цьому $\inf_{y\in S_{r_0/2}(x_k)}|y-x_0|\ge\delta_0$ при всіх $k = 1,2,\ldots,m_0$. Але тоді $|I''|\le\mathrm{const}\,\tau^{-\beta}((t-\tau)^{1/\alpha}+\delta_0)^{-d-\alpha}$.

З нерівностей для I' та I'' випливає таке твердження.

Лема 2. *Якщо S — замкнена обмежена поверхня класу $H^{1+\gamma}$, що розділяє множину $\mathbb{R}^d\setminus S$ на дві відкриті підмножини, а $(v(t,x))_{t>0,x\in S}$ — неперервна функція, що задовольняє умову $|v(t,x)|\le C\,t^{-\beta}$, $t>0$, $x\in S$, з деякими сталими $C>0$ та $\beta<1$, то для будь-якого $T>0$ існує така стала $C_T>0$, що при $(t,x)\in(0,T]\times S$ справджується оцінка*

$$\left|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g_{\nu(x)}(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y\right| \le C_T\,t^{-\beta+\gamma/\alpha}. \tag{12}$$

Інтеграл у лівій частині (12) називається прямим значенням дії оператора $\mathbf{B}_{\nu(x)}$, $x\in S$, на потенціал простого шару. Лема 2 у класичній теорії формулюється так: пряме значення (ко-)нормальної похідної простого шару існує.

***Зауваження* 1.** Міркування, подібні до тих, що доводять лему 1 із § 3 глави I книги [4], дозволяють стверджувати, що ліва частина нерівності (12) є неперервною функцією аргументів $(t,x) \in (0,+\infty) \times S$.

2.4. Основний результат. Нехай поверхня S та функція v на $(0,+\infty) \times S$ задовольняють умови леми 2. Знову зафіксуємо точку $x_0 \in S$ і для $t > 0$ та $x \notin S$ розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g_{\nu(x_0)}(t-\tau, x, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y. \tag{13}$$

Його існування випливає з міркувань, аналогічних наведеним у пп. 2.2, а саме,

$$\left| \int\limits_S g_{\nu(x_0)}(t-\tau, x, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y \right| \le \frac{2}{\alpha}\, N\, C\, \tau^{-\beta} \int\limits_S \frac{|y-x|\, d\sigma_y}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}} \le$$

$$\le \frac{2}{\alpha}\, N\, C\, \tau^{-\beta} \int\limits_S \frac{d\sigma_y}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \le \frac{2}{\alpha}\, N\, C\, |S|\, \tau^{-\beta} ((t-\tau)^{1/\alpha} + d(x,S))^{-d-\alpha+1},$$

звідки

$$\int\limits_0^t d\tau \int_S |g_{\nu(x_0)}(t-\tau, x, y) v(\tau, y)|\, d\sigma_y \le \frac{2}{\alpha}\, N\, C\, |S| \int\limits_0^t \tau^{-\beta} ((t-\tau)^{1/\alpha} + d(x,S))^{-d-\alpha+1}\, d\tau,$$

і права частина тут є скінченною при $t > 0$.

Інтеграл (13) є результатом застосування оператора $\mathbf{B}_{\nu(x_0)}$, $x_0 \in S$, до потенціалу простого шару $U(t,x) = \displaystyle\int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, x, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y$ у точці $(t,x) \in (0,+\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$. Позначимо інтеграл (13) через $U_{\nu(x_0)}(t,x)$. Наше завдання тепер полягає в дослідженні поведінки функції $U_{\nu(x_0)}(t,x)$ при $x \to x_0$. Як і в класичній теорії, функція $U_{\nu(x_0)}$ при переході через поверхню робить стрибок. Точніше, справедливим є таке твердження.

Теорема 1. *Якщо S — замкнена обмежена поверхня в $\mathbb{R}^d$ класу $H^{1+\gamma}$, що розділяє множину $\mathbb{R}^d \setminus S$ на дві відкриті підмножини, а $(v(t,x))_{t>0, x\in S}$ — неперервна функція з дійсними значеннями, що задовольняє умову $|v(t,x)| \le C\, t^{-\beta}$ з деякими сталими $C > 0$ та $\beta < 1$, то при фіксованих $t > 0$ та $x_0 \in S$ справджується співвідношення*

$$\lim_{x \to x_0 \pm} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g_{\nu(x_0)}(t-\tau, x, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y =$$

$$= \mp v(t, x_0) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g_{\nu(x_0)}(t-\tau, x_0, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y, \tag{14}$$

де $x \to x_0+$ (відповідно x_0-) означає, що x наближається до x_0 вздовж довільної кривої, розташованої в деякому замкненому обмеженому конусі K в $\mathbb{R}^d$ з вершиною в точці x_0, такому, що (*див. позначення в пп.* 2.1) $K \subset (\mathbb{R}^d \setminus \bar{D}) \cup \{x_0\}$ (*відповідно* $K \subset D \cup \{x_0\}$).

Доведення багато в чому повторює доведення класичного результату, хоча є і певні відмінності. Тому ми наведемо короткий його виклад. Зокрема, досить розглянути лише випадок, коли x наближається до x_0 вздовж нормалі $\nu(x_0)$, тобто $x = x_0 + \delta\nu(x_0)$, де $\delta \in \mathbb{R}^1$ і $\delta \to 0$. Тоді

$$U_{\nu(x_0)}(t,x) = \frac{2}{\alpha}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S (y-x_0,\nu(x_0))g(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y-$$

$$-\frac{2}{\alpha}\,\delta\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S g(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y = J_1 + J_2.$$

Позначимо інтеграл у лівій частині (12) через $V(t,x)$, $t>0$, $x\in S$. Доданок J_1 у попередній формулі можна записати так:

$$J_1 = V(t,x_0) + \frac{2}{\alpha}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S (y-x_0,\nu(x_0))v(\tau,y)(g(t-\tau,x,y)-g(t-\tau,x_0,y))\,d\sigma_y =$$

$$= V(t,x_0) + J_1'.$$

Доведемо, що $\lim_{\delta\to 0} J_1' = 0$. Як видно з доведення леми 2 (див. оцінки для I' та I''),

$$\left|\int\limits_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S (y-x_0\nu(x_0))g(t-\tau,x_0,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y\right| \le \frac{\mathrm{const}}{(t-\rho)^\beta}\,\rho^{\frac{\gamma}{\alpha}},$$

і праву частину тут можна зробити як завгодно малою вибором досить малого $\rho>0$ ($t>0$ є фіксованим).

Покажемо, що так само малим буде і інтеграл

$$\int\limits_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S (y-x_0,\nu(x_0))g(t-\tau,x,y)v(\tau,y)\,d\sigma_y, \quad x = x_0+\delta\nu(x_0),$$

який ми запишемо як суму двох доданків: перший із них відповідає внутрішньому інтегралу по $S_{r_0/2}(x_0)$, а другий — по $S\setminus S_{r_0/2}(x_0)$. Позначимо ці доданки через Q_1 та Q_2 відповідно. Можемо записати $|Q_1| \le \mathrm{const}\displaystyle\int_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{\tau^\beta}\int_{S_{r_0/2}(x_0)} \frac{|y-x_0|^{1+\gamma}\,d\sigma_y}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}}$.

Позначимо через $\tilde y$ ортогональну проекцію $y\in S_{r_0/2}(x_0)$ на площину, дотичну до S у точці x_0. Очевидно, $|y-x|\ge|\tilde y - x_0|$. З іншого боку, виконується нерівність $0<\mathrm{const}_1 \le \dfrac{|y-z|}{|\tilde y - z|} \le$ $\le \mathrm{const}_2$ для $y\in S_{r_0/2}(x_0)$ та $z = x_0+\zeta\nu(x_0)$ при $\zeta\in[-|\delta|,|\delta|]$ (це доведено в § 1 глави V [4]). Тому, переходячи до локальних координат із початком у точці x_0, отримуємо нерівності (через Δ_{x_0} позначено деяку область в $\mathbb{R}^{d-1}$)

$$|Q_1| \le \mathrm{const}\int\limits_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{\tau^\beta}\int\limits_{\Delta_{x_0}} \frac{|\tilde y|^{1+\gamma}\,d\tilde y}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|\tilde y|)^{d+\alpha}} \le$$

$$\leq \frac{\mathrm{const}}{(t-\rho)^{\beta}} \int\limits_{t-\rho}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{|\tilde{y}|^{1+\gamma}\, d\tilde{y}}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|\tilde{y}|)^{d+\alpha}} = \frac{\mathrm{const}}{(t-\rho)^{\beta}}\, \rho^{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Таким чином, Q_1 стає малим при $\rho \to 0+$. Доданок Q_2 оцінюється величиною, що також стає малою при $\rho \to 0+$, з допомогою міркувань, подібних до тих, що використані при доведенні леми 2 (див. оцінки для I'').

Тепер зафіксуємо таке $\rho > 0$, щоб сума $|Q_1| + |Q_2|$ була досить малою, і розглянемо інтеграл $\dfrac{2}{\alpha}\displaystyle\int_0^{t-\rho} \frac{d\tau}{t-\tau} \int_S (y - x_0, \nu(x_0)) v(\tau, y)(g(t-\tau, x, y) - g(t-\tau, x_0, y))\, d\sigma_y$. Позначивши цей інтеграл через Q_3, зауважимо, що функція $g(t-\tau, x, y)$ рівномірно неперервна на множинах $(\tau, x, y) \in [0, t-\rho] \times K_1 \times K_2$, де K_1 та K_2 — довільні компакти в $\mathbb{R}^d$. Тому $\lim_{\delta\to 0} Q_3 = 0$ (нагадаємо, що $x = x_0 + \delta\nu(x_0)$). Це завершує доведення співвідношення $\lim_{\delta\to 0} J_1' = 0$. Отже,

$$\lim_{\delta\to 0} J_1 = V(t, x_0). \tag{15}$$

Залишилося дослідити поведінку J_2 при $\delta \to 0$. Покладемо $J_2 = \sum_{k=1}^{4} J_2^{(k)}$, де

$$J_2^{(1)} = -\frac{2\delta}{\alpha}\, v(t, x_0) \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} g(\tau, x, y)\, d\sigma_y,$$

$$J_2^{(2)} = \frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} g(\tau, x, y)(v(t, x_0) - v(\tau, y))\, d\sigma_y,$$

$$J_2^{(3)} = -\frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_{0}^{t-\rho} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} g(\tau, x, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y,$$

$$J_2^{(4)} = -\frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_{0}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S\setminus S_\varepsilon(x_0)} g(\tau, x, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y.$$

Для оцінки $J_2^{(4)}$ при фіксованому $\varepsilon > 0$ використаємо міркування, подібні до тих, що доводять лему 2 (див. оцінювання там величини I''), а саме, існують такі точки $x_k \in S \setminus S_\varepsilon(x_0)$, $k = 1, 2, \ldots, l_0$, та число $p_0 > 0$, що $S \setminus S_\varepsilon(x_0) \subseteq \bigcup_{k=1}^{l_0} S_{r_0/2}(x_k)$, і при цьому $\inf_{|\zeta|\leq|\delta|} \inf_{y\in S_{r_0/2}(x_k)} |y - x_0 - \zeta\nu(x_0)| \geq p_0$ при всіх $k = 1, 2, \ldots, l_0$ (числа l_0 та p_0 залежать від ε). Тому для фіксованого $\varepsilon > 0$ маємо $|J_2^{(4)}| \leq \dfrac{2}{\alpha}\, l_0\, N\, C\, |\delta| \displaystyle\int_0^t \tau^{-\beta}((t-\tau)^{1/\alpha} + p_0)^{-d-\alpha}\, d\tau \to 0$ при $\delta \to 0$.

Далі, при фіксованому $\rho > 0$ маємо оцінку $|J_2^{(3)}| \leq \dfrac{2}{\alpha(1-\beta)}\, N\, C\, |S|\, \rho^{-\frac{d+\alpha}{\alpha}} |\delta| \to 0$ при $\delta \to 0$.

Якщо тепер довести, що існує $\lim_{\delta\to 0} J_2^{(1)}$ при фіксованих $\rho > 0$ та $\varepsilon > 0$, то звідси буде випливати, що $\overline{\lim}_{\delta\to 0}|J_2^{(2)}|$ можна зробити як завгодно малою вибором ρ та ε внаслідок того, що функція v неперервна в точці (t, x_0).

Позначимо через Π_{x_0} гіперплощину в $\mathbb{R}^d$, дотичну до S у точці x_0, і обчислимо границю інтеграла $R = \dfrac{2\delta}{\alpha}\displaystyle\int_{t-\rho}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\int_{\Pi_{x_0}} g(t-\tau, x_0+\delta\nu(x_0), y)\, d\sigma_y$ при $\delta \to 0$. Використовуючи формулу (9), можемо записати $R = \dfrac{2\delta}{\pi\alpha}\displaystyle\int_{t-\rho}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\int_{0}^{+\infty} e^{-c(t-\tau)r^\alpha}\cos(r\delta)\, dr$. Інтегрування частинами у внутрішньому інтегралі приводить до виразу $R = \dfrac{2c}{\pi}\displaystyle\int_{t-\rho}^{t} d\tau \int_{0}^{+\infty} e^{-c(t-\tau)r^\alpha} r^\alpha \frac{\sin(r\delta)}{r}\, dr$. Так звана друга теорема про середнє значення в інтегральному численні дозволяє тут змінити порядок інтегрування (див., наприклад, [6]). Тому $R = \operatorname{sign}\delta - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-c\rho r^\alpha}\frac{\sin(r\delta)}{r}\, dr$, звідки $\lim_{\delta\to 0\pm} R = \pm 1$.

Тепер неважко зрозуміти, що $\lim_{\delta\to 0\pm} J_2^{(1)} = \mp v(t, x_0) + R_1(\varepsilon, \rho)$, де $R_1(\varepsilon, \rho)$ стає як завгодно малим, якщо $\varepsilon > 0$ та $\rho > 0$ вибрано досить малими. Цим завершується доведення факту $\lim_{\delta\to 0\pm} J_2 = \mp v(t, x_0)$, який разом з (15) і завершує доведення теореми 1.

***Зауваження* 2.** Нехай $\nu \in \mathbb{R}^d$ — фіксований орт, а $S = \{x \in \mathbb{R}^d : (x, \nu) = 0\}$ — гіперплощина в $\mathbb{R}^d$, ортогональна до ν. Формально теорему 1 не можна застосувати до гіперплощини, проте доведення подібного твердження в цьому випадку значно спрощується (див. [7]). Більше того, в цьому випадку права частина формули (14) не буде містити другий доданок, оскільки $g_\nu(t-\tau, x_0, y) = \dfrac{(y - x_0, \nu)}{t-\tau} g(t-\tau, x_0, y) = 0$ при $y \in S$, $x_0 \in S$. Отже, аналог теореми 1 для гіперплощини S є таким:

$$\lim_{x\to x_0\pm} \int_0^t d\tau \int_S g_\nu(t-\tau, x, y) v(\tau, y)\, d\sigma_y = \mp v(t, x_0).$$

3. Початково-крайова задача. ***3.1. Постановка задачі.*** Нехай задано поверхню S в $\mathbb{R}^d$, яка задовольняє умови теореми 1, і неперервні функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ та $(q(x))_{x\in S}$ з дійсними значеннями, причому φ припускається обмеженою. Нагадаємо, що $\|\varphi\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|$, так само $\|q\| = \max_{x\in S}|q(x)|$.

Задача полягає в побудові такої неперервної функції $(u(t, x))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d}$, яка:

(А) задовольняє рівняння $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{A}u$ в області $(t, x) \in (0, +\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$;

(Б) задовольняє початкову умову $u(0+, x) = \varphi(x)$ при всіх $x \in \mathbb{R}^d$;

(В) задовольняє граничну умову $(1 + q(x))\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t, x+) - (1 - q(x))\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t, x-) = 0$ при всіх $t > 0$, $x \in S$ (тут $\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t, x\pm)$ — недотичні границі функції $\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t, z)$ при $z \to x\pm$, див. теорему 1).

3.2. Розв'язок. Для $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ покладемо

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, y)\varphi(y)\, dy + \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, x, y) q(y) v(\tau, y)\, d\sigma_y, \tag{16}$$

де $(v(t,x))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ — невідома функція. Наше завдання тепер — побудувати функцію v так, щоб для u виконувались умови (A) – (B).

З теореми 1 випливає рівність (для $t>0$ та $x\in S$)

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,x\pm)=\int\limits_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy\mp q(x)v(t,x)+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g_{\nu(x)}(t-\tau,x,y)q(y)v(\tau,y)\,d\sigma_y, \tag{17}$$

якщо тільки функція v неперервна при $(t,x)\in(0,+\infty)\times S$.

Поклавши $v(t,x)=\dfrac{1}{2}(\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,x+)+\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,x-))$, $t>0$, $x\in S$, дістанемо інтегральне рівняння для функції v:

$$v(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g_{\nu(x)}(t-\tau,x,y)q(y)v(\tau,y)\,d\sigma_y, \tag{18}$$

де $t>0$, $x\in S$. Це рівняння розв'язується методом послідовних наближень, а саме, покладемо $v_0(t,x)=\int_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy$, $t>0$, $x\in S$, а для $n\geq 1$

$$v_n(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g_{\nu(x)}(t-\tau,x,y)q(y)v_{n-1}(\tau,y)\,d\sigma_y,\quad t>0,\quad x\in S.$$

Для v_0 справджується оцінка $|v_0(t,x)|\leq L\|\varphi\|\,t^{-1+1/\alpha}$, $t>0$, $x\in S$, де стала L визначається рівністю $L=\dfrac{2}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}|z|h_d(z)\,dz$ (цей інтеграл обчислюється, але нас наразі його точне значення не цікавить). Зафіксуємо тепер довільне $T\in(0,+\infty)$ і зауважимо, що з доведення леми 2 випливає нерівність $\int_S |g_{\nu(x)}(t-\tau,x,y)|\,d\sigma_y\leq K_T\,(t-\tau)^{-1+\frac{\gamma}{\alpha}}$, що виконується при всіх $(t,x)\in(0,T]\times S$ з деякою сталою $K_T>0$. Тепер індукцією по n отримуємо оцінки

$$|v_n(t,x)|\leq L\,\Gamma(1/\alpha)\|\varphi\|\,(K_T\|q\|\Gamma(\gamma/\alpha))^n\,\frac{t^{-1+\frac{1}{\alpha}+\frac{n\gamma}{\alpha}}}{\Gamma\left(\dfrac{1+n\gamma}{\alpha}\right)}, \tag{19}$$

справедливі при всіх $t\in(0,T]$, $x\in S$ та $n=0,1,\ldots$. Очевидно, ряд

$$v(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}v_n(t,x) \tag{20}$$

збігається і є неперервною функцією аргументів $(t,x)\in(0,T]\times S$, яка задовольняє рівняння (18), а також умову $|v(t,x)|\leq N_T\,t^{-1+1/\alpha}$, $t\in(0,T]$, $x\in S$, де $N_T>0$ — деяка стала, що, можливо, залежить від T.

Підставляючи побудовану функцію v у формулу (16), одержуємо функцію u, яка задовольняє умову (А), що випливає з результатів пп. 1.3 та пп. 2.2. З (17) та (18) випливають рівності $\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,x\pm) = (1 \mp q(x))v(t,x),\ t > 0,\ x \in S$, наслідком яких є той факт, що функція u задовольняє умову (В). Щоб довести, що функція u задовольняє також умову (Б), потрібно показати, що при кожному $x \in \mathbb{R}^d$ другий доданок у правій частині (16) прямує до нуля при $t \to 0+$. Це буде випливати з такого твердження.

Лема 3. *Нехай $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $t_0 > 0$, що при $\tau \in (0,t_0)$ виконується нерівність*

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(\tau,x,y)\varphi(y)\,dy\right| \le \varepsilon\tau^{-1+1/\alpha}, \quad x \in S. \tag{21}$$

Доведення. Зауважимо, що $\int\limits_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(\tau,x,y)\,dy = 0$ при всіх $\tau > 0$ та $x \in S$. Тому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(\tau,x,y)\varphi(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g_{\nu(x)}(\tau,x,y)(\varphi(y)-\varphi(x))\,dy.$$

Нехай задано $\varepsilon > 0$. Виберемо $r > 0$ так, щоб $\sup_{x\in S}\sup_{y\in B_r(x)}|\varphi(y)-\varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2L}$, де L — стала з нерівності для v_0. Тоді

$$\left|\int\limits_{B_r(x)} g_{\nu(x)}(\tau,x,y)(\varphi(y)-\varphi(x))\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,\tau^{-1+1/\alpha}$$

при всіх $\tau > 0$ та $x \in S$. Інтеграл по $\mathbb{R}^d \setminus B_r(x)$ при фіксованому $r > 0$ оцінимо так:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B_r(x)} g_{\nu(x)}(\tau,x,y)(\varphi(y)-\varphi(x))\,dy\right| \le \frac{4}{\alpha}\,\|\varphi\|\,\tau^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B_r(x)} |y-x|g(\tau,x,y)\,dy \le$$

$$\le \frac{4}{\alpha}\,\|\varphi\|\,\tau^{-1}r^{-\beta_0}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|y-x|^{1+\beta_0}g(\tau,x,y)\,dy \le \frac{4}{\alpha r^{\beta_0}}\,\|\varphi\|\,\tau^{-1+(1+\beta_0)/\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|z|^{1+\beta_0}h_d(z)\,dz,$$

де $\beta_0 \in (0,\alpha-1)$, так що останній інтеграл є скінченним. Звідси видно, що при $\tau \in (0,t_0)$ цей вираз буде меншим, ніж $\dfrac{\varepsilon}{2}\,\tau^{-1+1/\alpha}$, якщо тільки t_0 вибрати досить малим.

Лему доведено.

Тепер можемо сформулювати основне твердження цього пункту.

Теорема 2. *Якщо S — поверхня в $\mathbb{R}^d$, що задовольняє умови теореми* 1, $(q(x))_{x\in S}$ — *неперервна функція з дійсними значеннями, а $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, то початково-крайова задача* (А)–(В) *має такий розв'язок, який зображується формулою* (16) *з функцією v, визначеною з допомогою ряду* (20).

Доведення. Нехай задано $\varepsilon > 0$ і t_0 вибрано так, що виконується (21). Тоді з оцінок (19) випливає, що сума ряду (20) буде задовольняти нерівність $|v(\tau,x)| \leq \varepsilon\,\tilde{N}_T\,\tau^{-1+1/\alpha}$ при $\tau \in \in (0,t_0)$, $x \in S$, де $\tilde{N}_T$ — деяка стала. Тепер, враховуючи нерівність (10), отримуємо таку оцінку для другого доданка у правій частині (16):

$$\left|\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,y)q(y)v(\tau,y)\,d\sigma_y\right| \leq \varepsilon\,\tilde{N}_T\|q\|\,K\int\limits_0^t \tau^{-1+1/\alpha}(t-\tau)^{-1/\alpha}\,d\tau =$$

$$= \varepsilon\,\tilde{N}_T\|q\|\,K\,\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha),$$

якщо тільки $t \in (0,t_0)$. Це завершує доведення теореми 2.

3.3. Випадок гіперплощини. Як вже зазначалось, гіперплощина $S = \{x \in \mathbb{R}^d : (x,\nu) = 0\}$, де $\nu \in \mathbb{R}^d$ — фіксований орт, не підпадає під дію теорем 1 та 2, однак відповідні міркування можуть бути проведені і для неї (див. [7]). Більше того, розв'язок u задачі (A) – (B) для гіперплощини S можна зобразити формулою $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} G(t,x,y)\varphi(y)\,dy$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, де функція G визначається явно рівністю

$$G(t,x,y) = g(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,z)g_\nu(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z$$

при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \notin S$ (у випадку гіперплощини вимагаємо додатково, щоб q була обмеженою функцією). З теореми 1 (точніше, з її аналога для гіперплощини), неважко вивести, що $G(t,x,y\pm) = (1 \pm q(x))g(t,x,y)$ при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$. Та обставина, що функція G задається тут явною формулою, є наслідком спрощеного варіанту теореми 1 у випадку гіперплощини (див. зауваження в пп. 2.4). Одновимірний випадок розглянуто в роботі [8].

Автори статті вдячні А. Н. Кочубею за чіткі роз'яснення деяких деталей отриманих ним результатів.

1. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – Basel etc.: Birkhäuser, 2004. – **152**. – 387 p.
2. *Jacob N.* Pseudo-differential operators and Markov processes: In 3 vol. – London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. – Vol. I. Fourier analysis and semigroups. – 2001. – 493 p.; Vol. II. Generators and their potential theory. – 2002. – 453 p.; Vol. III. Markov processes and applications. – 2005. – 474 p.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 424 с.
5. *Blumenthal R. M., Getoor R. K.* Some theorems on stable processes // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – **93**, № 2. – P. 263 – 273.
6. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. – М.: Физматиз, 1962. – 360 с.
7. *Osypchuk M. M., Portenko M. I.* One type of singular perturbations of a multidimensional stable process // Theory Stochast. Process. – 2014. – **19(35)**, № 2. – P. 42 – 51.
8. *Льобус Й.-У., Портенко М. І.* Про один клас збурень стійкого процесу // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 1995. – № 52. – С. 102 – 111.

Одержано 10.03.15