УДК 517.5

І. Ю. Меремеля, В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТОЧНІ КОНСТАНТИ В НЕРІВНОСТЯХ ДЛЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ТЕЙЛОРА ОБМЕЖЕНИХ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ У ПОЛІКРУЗІ

We determine the exact constants $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)$ in the inequalities of the form $\left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right| \leq L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)\left(1-\left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right|\right)$ for the pairs of Taylor coefficients $\widehat{f}(\mathbf{m})$ and $\widehat{f}(\mathbf{n})$ on some classes X of bounded holomorphic functions in a polydisc.

Вычислены точные константы $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)$ в неравенствах вида $\left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right| \leq L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)\left(1-\left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right|\right)$ для пар коэффициентов Тейлора $\widehat{f}(\mathbf{m})$ и $\widehat{f}(\mathbf{n})$ на некоторых класах X ограниченных голоморфных функций в поликруге.

1. Нехай d — натуральне число, $\mathbb{C}^d$ — множина всіх упорядкованих наборів $\mathbf{z} := (z_1, \ldots, z_d)$ з d комплексних чисел, $\mathbb{D}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : \max_{1\leq j\leq m} |z_j| < 1\}$ — одиничний полікруг і $\mathbb{T}^d := \{\mathbf{z} \in \in \mathbb{C}^d : |z_j| = 1,\ j = \overline{1,d}\}$ — кістяк полікруга $\mathbb{D}^d$. Нормовану міру Лебега на $\mathbb{T}^d$, тобто добуток нормованих мір Лебега одиничних кіл, з яких складається $\mathbb{T}^d$, будемо позначати через $\sigma = \sigma_d$.

Нехай далі $\mathcal{H}(\mathbb{D}^d)$ — множина функцій, голоморфних в $\mathbb{D}^d$, $B(\mathbb{D}^d)$ — клас функцій $f \in \in \mathcal{H}(\mathbb{D}^d)$, для яких $\sup_{\mathbf{z}\in\mathbb{D}^d} |f(\mathbf{z})| \leq 1$ і

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) := \frac{1}{\mathbf{k}!}\left(\frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_d^{k_d}}\right)_{\mathbf{z}=\mathbf{0}}$$

— коефіцієнти Тейлора функції f, де $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_d)$ — мультиіндекс, $k_j \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = \overline{1,d}$, $\mathbf{k}! := k_1! \ldots k_d!$, $|\mathbf{k}| = k_1 + \ldots + k_d$ і $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$.

Мета даної роботи — обчислення для даних мультиіндексів $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ величин

$$W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} := \sup\left\{\frac{\left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right|}{1-\left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right|^2} : f \in B(\mathbb{D}^d)\right\}$$

і

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X) := \sup\left\{\frac{\left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right|}{1-\left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right|} : f \in X\right\},\ X \subset \mathcal{H}(\mathbb{D}^d),\ L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\left(B(\mathbb{D}^d)\right) =: L_{\mathbf{m},\mathbf{n}},$$

які є точними константами в нерівностях для коефіцієнтів Тейлора при мультиіндексах $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ функцій з $\mathcal{H}(\mathbb{D}^d)$:

$$\left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right| \leq W_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\left(1-\left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right|^2\right) \qquad \forall f \in B(\mathbb{D}^d), \tag{1}$$

$$\left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right| \leq L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)\left(1-\left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right|\right) \qquad \forall f \in X \subset \mathcal{H}. \tag{2}$$

Зрозуміло, що $1 \leq W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \leq L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \leq 2W_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ для будь-яких мультиіндексів $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$.

Відомо, що в одновимірному випадку, коли $\mathbf{m} = 0$ і $\mathbf{n} = n$, справджується рівність $W_{0,n} = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, тобто співвідношення (1) має місце з точною константою 1, а (2) при $X = B(\mathbb{D}^1)$ — з константою 2.

Як зазначив О. Сас [1, с. 308] (див. виноску), першу згадку про нерівність (1) датовано 1906 р. і пов'язано з іменем Е. Ландау, який довів, що (1) має місце для значень $m = 0$ і $n = 1$. У випадку ж $m = 0$ і довільного значення натурального n доведення нерівності (1) належить Ф. Вінеру і вперше опубліковано з його дозволу в роботі Г. Бора [2].

Згодом Г. М. Голузін [3, с. 72] (див. виноску), зазначив, що нерівність (1) з константою $W_{m,n} = 1$ справджується при довільних m і n, пов'язаних співвідношенням $n \geq 2m + 1$, $m \geq 0$, і цей факт легко отримати, виходячи з частинного випадку, коли $m = 0$ і $n = 1$.

Питання про екстремальні функції, на яких реалізується величина $W_{m,n}$, розв'язав Г. М. Голузін в [4], показавши, що екстремальними є тільки функції вигляду

$$f(z) = \frac{cz^m + \eta z^n}{1 + \bar{c}\eta z^{n-m}}, \quad |c| \leq 1, \tag{3}$$

де $|\eta| = 1$, якщо $|c| < 1$, і $\eta = 0$, якщо $|c| = 1$.

Зафіксуємо мультиіндекс $\mathbf{m}$, число $a \in [0, 1]$ і позначимо

$$B^a_{\mathbf{m}}(\mathbb{D}^d) := \left\{ f \in B(\mathbb{D}^d) \colon \left| \widehat{f}(\mathbf{m}) \right| \leq a \right\}.$$

Зрозуміло, що $B^1_{\mathbf{m}}(\mathbb{D}^d) = B(\mathbb{D}^d)$ для будь-якого мультиіндексу $\mathbf{m}$.

В одновимірному випадку, виходячи з результатів про константи $W_{m,n}$ і явного вигляду екстремальних функцій, які реалізують цю величину, легко показати, що при $n \geq 2m+1, m \geq 0$, справджується рівність

$$L_{m,n}\left(B^a_m(\mathbb{D}^1)\right) = 1 + a \quad \forall\, a \in [0, 1].$$

Справді, для будь-якої функції $f \in B^a_m(\mathbb{D}^1)$

$$\frac{\left|\widehat{f}(n)\right|}{1 - \left|\widehat{f}(m)\right|} \leq 1 + \left|\widehat{f}(m)\right| \leq 1 + a, \tag{4}$$

а для функцій вигляду (3) при $|c| = a < 1$ всі ці співвідношення перетворюються в рівності. Якщо ж $a = 1$, то для функцій вигляду (3) перше співвідношення в (4) перетворюється в рівність, звідки при $|c| \to 1$ випливає, що $L_{m,n} \geq 2$.

Слід зазначити, що всі вищенаведені результати про константи $W_{m,n}$ і $L_{m,n}$ можна легко отримати з одного загального твердження О. Саса [5].

Розглянемо тепер багатовимірний випадок.

Виходячи з відомого факту про те, що для будь-якої функції $f \in B(\mathbb{D}^d)$ і будь-яких $\omega \in \mathbb{D}^1$ і $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^d$ має місце розклад $f(\omega \mathbf{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{|\mathbf{k}|=n} \widehat{f}(\mathbf{k})\mathbf{z}^{\mathbf{k}} \right) \omega^n$, до того ж $|f(\omega \mathbf{z})| \leq 1$, легко показати (з огляду на одновимірний випадок), що

$$\sum_{|\mathbf{k}|=1} \left|\widehat{f}(\mathbf{k})\right| \leq 1 - \left|\widehat{f}(\mathbf{0})\right|^2. \tag{5}$$

З нерівності (5) і одновимірних результатів для мультиіндексу $\mathbf{n}$ такого, що $|\mathbf{n}| = 1$, випливає рівність

$$W_{\mathbf{0},\mathbf{n}} = 1. \tag{6}$$

Питання про нетривіальні екстремальні функції, тобто функції з усіма частинними похідними, відмінними від тотожного нуля в $\mathbb{D}^d$, на яких реалізується величина $W_{\mathbf{0},\mathbf{n}}$ в (6), дослідив Г. Кнесе [6]. Зокрема, він показав, що при $d = 2$ такими є функції вигляду

$$f(z_1, z_2) = \mu \frac{az_1 + bz_2 - z_1 z_2}{1 - \bar{b} z_1 - \bar{a} z_2}, \quad |\mu| = |a| + |b| = 1, \ (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2.$$

І. І. Барвін [7] показав, що рівність (6) справджується для будь-якого мультиіндексу $\mathbf{n}$ такого, що $0 \leq n_j \leq 1$, $j = 1, \ldots, d$, і $|\mathbf{n}| \geq 1$.

Г. Боас і Д. Хавінсон (див. доведення теореми 2 в [8]) доповнили співвідношення (5), показавши, що для будь-якого натурального n

$$\left(\sum_{|\mathbf{k}|=n} \left| \widehat{f}(\mathbf{k}) \right|^2 \right)^{1/2} \leq 1 - \left| \widehat{f}(\mathbf{0}) \right|^2, \tag{7}$$

що і доводить рівність (6) для будь-якого мультиіндексу $\mathbf{n}$, відмінного від $\mathbf{0}$.

Елементарне доведення нерівності (7), а відтак і рівності (6), яке базується на понятті оператора стиску в гільбертовому просторі, дали В. І. Паулсен, Г. Попеску і Д. Сінгх [9].

Нехай $RB = RB(\mathbb{D}^d) := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}^d) \colon \operatorname{Re} f \leq 1, f(\mathbf{0}) > 0\}$. Використовуючи ідеї доведення співвідношення (7) з [8] та однієї нерівності з [9] (див. доведення теореми 2.1), можна показати, що для будь-якої функції $f \in RB$ і будь-якого натурального n

$$\left(\sum_{|\mathbf{k}|=n} \left| \widehat{f}(\mathbf{k}) \right|^2 \right)^{1/2} \leq 2 \left(1 - \widehat{f}(\mathbf{0}) \right).$$

Звідси для будь-якого мультиіндексу $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| > 0$, випливають рівності

$$L_{0,\mathbf{n}} = L_{0,\mathbf{n}}(RB) = 2.$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Позначимо $\mathbb{N}(n) := \mathbb{N} \setminus \{j > n \colon j = 0 \bmod n\}$ і

$$B_{\mathbb{N}(n)} := \left\{ f \in B(\mathbb{D}^d) \colon f(\mathbf{z}) = \widehat{f}(\mathbf{0}) + \sum_{j \in \mathbb{N}(n)} \sum_{|\mathbf{k}|=j} \widehat{f}(\mathbf{k}) \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \mathbf{z} \in \mathbb{D}^d \right\},$$

де $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \ldots z_d^{k_d}$.

Зрозуміло, що клас $B_{\mathbb{N}(n)}$ містить клас „трикутних” алгебраїчних многочленів

$$P_n^{\Delta} := \left\{ f \in B(\mathbb{D}^d) \colon f(\mathbf{z}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq n} \widehat{f}(\mathbf{k}) \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \right\},$$

а перетин $\bigcap_{n \geq 2} B_{\mathbb{N}(n)}$ утворює клас

$$B_{\Pi} := \left\{ f \in B(\mathbb{D}^d) : f(\mathbf{z}) = \widehat{f}(\mathbf{0}) + \sum_{p \in \Pi} \sum_{|\mathbf{k}|=p} \widehat{f}(\mathbf{k}) \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \mathbf{z} \in \mathbb{D}^d \right\},$$

де Π — множина простих чисел.

Л. А. Айзенберг і А. Відрас [10] показали, що для будь-якого мультиіндексу $\mathbf{n}$ такого, що $|\mathbf{n}| = n$,

$$L_{\mathbf{0},\mathbf{n}}(P_n^{\Delta}) = L_{\mathbf{0},\mathbf{n}}(B_{\mathbb{N}(n)}) = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{8}$$

і для будь-якого мультиіндексу $\mathbf{n}$ такого, що $|\mathbf{n}| \in \Pi$,

$$L_{\mathbf{0},\mathbf{n}}(B_{\Pi}) = 1.$$

В одновимірному випадку рівність $L_{0,n}(P_n^{\Delta}) = 1$ уперше було доведено Р. С. Віссером [11], і ним же показано, що екстремальними многочленами, на яких реалізується величина $L_{0,n}(P_n^{\Delta})$, є лише многочлени вигляду $f(z) = a + bz^n$, $|a| + |b| = 1$.

2. З огляду на вищенаведені результати здається, що константи $W_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ і $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ у випадку довільної пари мультиіндексів $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ залишаться такими ж, як і в одновимірному випадку. Ми покажемо, що це не так для констант $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ при $d \geq 2$, а саме, що величини цих констант залежать від того, як співвідносяться між собою компоненти мультиіндексів $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$.

Теорема 1. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ — різні мультиіндекси. Тоді*:

1) *якщо в мультиіндексі $\mathbf{n}$ є хоча б одна компонента n_j, яка задовольняє умову $n_j \geq 2m_j+1$, то*

$$W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1;$$

2) *якщо $d \geq 2$, а в мультиіндексі $\mathbf{n}$ є хоча б одна компонента n_j, яка задовольняє умову $n_j \geq 2m_j + 1$, і одна компонента n_i, яка задовольняє умову $n_i \leq (m_i - 1)/2$, то*

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1;$$

3) *якщо мультиіндекс $\mathbf{n}$ задовольняє умову $n_j \geq m_j$, $j = 1, \ldots, d$, і хоча б для однієї компоненти n_i виконується умова $n_i \geq 2m_i + 1$, то*

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 2.$$

***Зауваження* 1.** З рівності $W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1$ внаслідок того, що $\sup_{\mathbf{m}} \left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right| \leq 1$, для будь-якої функції $f \in B(\mathbb{D}^d)$ і $\rho \in [0, 2]$ випливає оцінка

$$\rho \left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right| + \left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right| \leq 1 + \rho \left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right| - \left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right|^2 \leq$$

$$\leq \max\{1 + \rho x - x^2 : x \in [0, 1]\} = 1 + \frac{\rho^2}{4}. \tag{9}$$

Цікавим видається питання про те, коли ці співвідношення перетворюються в рівності.

Дане питання розв'язано в [5] для одновимірного випадку: при $d = 1$, $0 \leq \rho < 2$ і $n \geq$ $\geq 2m + 1$, $m \geq 0$, рівності в (9) мають місце лише для функцій

$$\mu \frac{\rho z^m + 2\eta z^n}{\rho\eta z^{n-m} + 2} = \mu \frac{\rho}{2} z^m + \mu\eta \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right) z^n + \ldots, \qquad |\mu| = |\eta| = 1.$$

У випадку $\rho = 1$ цей факт раніше був встановлений Д. Помпейєм [12] (див. також [13, с. 26]).

У багатовимірному випадку мають місце такі твердження, які випливають з теореми 1.

***Наслідок* 1.** *За умов пункту* 2 *теореми* 1 *справджується рівність*

$$\max\left\{\left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right| + \left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right| : f \in B(\mathbb{D}^d)\right\} = 1. \tag{10}$$

Максимум у рівності (10) *досягається, зокрема, для функції* $f(\mathbf{z}) = a\mathbf{z}^{\mathbf{m}} + b\mathbf{z}^{\mathbf{n}}$, $|a| + |b| = 1$.

***Наслідок* 2.** *За умов пункту* 3 *теореми* 1 *для будь-якого* $\rho \in [0, 2)$ *справджується рівність*

$$\max\left\{\rho\left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right| + \left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right| : f \in B(\mathbb{D}^d)\right\} = 1 + \frac{\rho^2}{4}. \tag{11}$$

Максимум у рівності (11) *досягається, зокрема, для функції*

$$f(\mathbf{z}) = \mu\frac{\rho\mathbf{z}^{\mathbf{m}} + 2\eta\mathbf{z}^{\mathbf{n}}}{\rho\eta\mathbf{z}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} + 2} = \mu\frac{\rho}{2}\mathbf{z}^{\mathbf{m}} + \mu\eta\left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)\mathbf{z}^{\mathbf{n}} + \ldots, \qquad |\mu| = |\eta| = 1, \tag{12}$$

де $\mathbf{n} - \mathbf{m} := (n_1 - m_1, \ldots, n_d - m_d)$.

***Зауваження* 2.** Нехай, наприклад, у наслідку 1 $\mathbf{m} = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{d-1})$, $\mathbf{n} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ і f — будь-яка інша екстремальна функція в (10). Тоді згідно з (5) для будь-якого мультиіндексу $\mathbf{k}$, $|\mathbf{k}| = 1$, відмінного від $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$, справджуються рівності $\widehat{f}(\mathbf{0}) = \widehat{f}(\mathbf{k}) = 0$, тобто

$$f(\mathbf{z}) = \widehat{f}(\mathbf{m})\mathbf{z}^{\mathbf{m}} + \widehat{f}(\mathbf{n})\mathbf{z}^{\mathbf{n}} + \sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{|\mathbf{k}|=\nu}\widehat{f}(\mathbf{k})\mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{D}^d.$$

***Наслідок* 3.** *За умов пункту* 3 *теореми* 1 *справджується рівність*

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\left(B^a_{\mathbf{m}}(\mathbb{D}^d)\right) = 1 + a \qquad \forall a \in [0, 1].$$

Позначимо через $\mathbb{Z}^d_+$ множину всіх упорядкованих наборів з d невід'ємних цілих чисел і для функції $f \in B$ покладемо $\widehat{f}(\mathbf{k}) = 0$, якщо $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{Z}^d_+$.

Для даних мультиіндексів $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_+$ розглянемо клас функцій

$$B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbb{D}^d) := \left\{f \in B(\mathbb{D}^d) \colon \widehat{f}(k\mathbf{n} - (k-1)\mathbf{m}) = 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\},$$

де $k\mathbf{n} := (kn_1, \ldots, kn_d)$.

Зрозуміло, що у випадку, коли мультиіндекси $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ задовольняють умови пункту 2 теореми 1, класи $B(\mathbb{D}^d)$ і $B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbb{D}^d)$ збігаються і при цьому для будь-якої функції $f \in B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbb{D}^d)$, згідно з наслідком 1, справджується нерівність $\left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right| + \left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right| \le 1$. Наступне твердження показує, що така нерівність на класі $B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbb{D}^d)$ має місце і в решті випадків.

Теорема 2. *Нехай* $d \in \mathbb{N}$ *і* $\mathbf{m}, \mathbf{n}$ — *різні мультиіндекси. Якщо в мультиіндексі* $\mathbf{n}$ *є хоча б одна компонента* n_j, *яка задовольняє умову* $n_j \ge 2m_j + 1$, *то*

$$\max\left\{\left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right| + \left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right| : f \in B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbb{D}^d)\right\} = 1$$

і

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\left(B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbb{D}^d)\right) = 1.$$

Екстремальними функціями, на яких реалізуються дані величини, є, зокрема, функції $f(\mathbf{z}) = a\mathbf{z}^{\mathbf{m}} + b\mathbf{z}^{\mathbf{n}}$, $|a| + |b| = 1$.

У випадку, коли $d = 1$ і $\mathbf{m} = 0$, теорема 2 збігається з результатом Л. А. Айзенберга і А. Відраса [10] (див. рівності (8)), оскільки у цьому випадку $B_{0,n} = B_{\mathbb{N}(n)}$. При $d \geq 2$, $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ і $n = |\mathbf{n}|$ має місце строге включення $B_{\mathbb{N}(n)} \subset B_{\mathbf{0},\mathbf{n}}$, відтак теорема 2 містить рівності (8).

3. Доведення теорем 1 і 2 ґрунтуються на такому твердженні, не позбавленому й самостійного інтересу.

Лема. *Нехай* $d \in \mathbb{N}$, $f \in B(\mathbb{D}^d)$ *і* $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^d$. *Якщо* $\mathbf{n}$ — *мультиіндекс, в якому хоча б одна компонента* n_j *задовольняє умову* $n_j \geq 2m_j + 1$, *то функція* $f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$, *визначена в крузі* $\mathbb{D}^1$ *за правилом*

$$f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z) = \widehat{f}(\mathbf{m}) + \widehat{f}(\mathbf{n})z + \sum_{k=2}^{\infty} \widehat{f}(k\mathbf{n} - (k-1)\mathbf{m})z^k, \tag{13}$$

належить класові $B(\mathbb{D}^1)$.

Зауважимо, що конструкції типу функції $f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ часто називають діагональними функціями. Як зазначено в [14, с. 214], уперше таке перетворення використав, мабуть, А. Пуанкаре [15, с. 245] у двовимірному випадку (відповідає розглядуваному випадку при $\mathbf{m} = \mathbf{0}$).

Основна значущість діагональних перетворень голоморфних функцій багатьох змінних, як це відображено в численних роботах (див. бібліографію в [14]), полягає в тому, що такі перетворення зберігають основні (найсуттєвіші) властивості функцій, якими вони породжуються. В розглядуваному випадку такою властивістю є зображення функцій класу $B(\mathbb{D}^d)$ у вигляді кратного інтеграла Пуассона (див. формулу (17)).

Доведення леми. Відомо (див., наприклад, [16, с. 476]), що кожна функція $f \in B(\mathbb{D}^d)$ має граничні значення (які будемо позначати так само через f) вздовж недотичних шляхів майже у всіх точках тора $\mathbb{T}^d$, а для коефіцієнтів $\widehat{f}(\mathbf{k})$ справджується формула Коші

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{w})\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{k}} d\sigma(\mathbf{w}) = \widehat{f}(\mathbf{k}), \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d, \tag{14}$$

де $\overline{\mathbf{w}} := (\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_d)$.

Оскільки $\left|\widehat{f}(\mathbf{k})\right| \leq 1 \quad \forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, то сума ряду у правій частині (13) є голоморфною функцією змінної z у крузі $\mathbb{D}^1$. Далі, згідно з (14) для будь-якого $z \in \mathbb{D}^1$

$$f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{w})\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{m}}(1 + \overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}}z + \overline{\mathbf{w}}^{2(\mathbf{n}-\mathbf{m})}z^2 + \ldots)d\sigma(\mathbf{w}), \tag{15}$$

а внаслідок того, що $(k+1)\mathbf{m} - k\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{Z}_+^d \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$ і $\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{m}}\mathbf{w}^{k(\mathbf{n}-\mathbf{m})} = \overline{\mathbf{w}}^{(k+1)\mathbf{m}-k\mathbf{n}}$ для $\mathbf{w} \in \mathbb{T}^d$, маємо

$$0 = \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{w})\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{m}}(\mathbf{w}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}}\overline{z} + \mathbf{w}^{2(\mathbf{n}-\mathbf{m})}\overline{z}^2 + \ldots)d\sigma(\mathbf{w}). \tag{16}$$

Додавши рівності (15) і (16), одержимо

$$f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{w})\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{m}} \left(1 + 2\operatorname{Re}\left(\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} z + \overline{\mathbf{w}}^{2(\mathbf{n}-\mathbf{m})} z^2 + \ldots\right)\right) d\sigma(\mathbf{w}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{w})\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{m}} \left(1 + 2\operatorname{Re}\frac{\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} z}{1 - \overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} z}\right) d\sigma(\mathbf{w}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{w})\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{m}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} z|^2} d\sigma(\mathbf{w}). \tag{17}$$

Звідси випливає оцінка

$$|f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z)| \le \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{w})| \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} z|^2} d\sigma(\mathbf{w}) \le \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} z|^2} d\sigma(\mathbf{w}) = 1,$$

що й потрібно було довести.

***Доведення теореми* 1.** За умов кожного з пунктів $1-3$ виконуються умови леми. Тому, застосувавши до довільної функції $f \in B(\mathbb{D}^d)$ діагональне перетворення $f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$, одержимо функцію класу $B(\mathbb{D}^1)$ з нульовим і першим коефіцієнтами Тейлора, рівними $\widehat{f}(\mathbf{m})$ і $\widehat{f}(\mathbf{n})$ відповідно.

Отже, для цих коефіцієнтів, як коефіцієнтів Тейлора функції класу $B(\mathbb{D}^1)$, справджується нерівність $\left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right| \le 1 - \left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right|^2$. Звідси внаслідок довільності f випливають нерівності $W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \le 1$ і $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \le 2$.

З іншого боку, на прикладі функції $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{\mathbf{n}}$ бачимо, що $W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \ge 1$. Таким чином, $W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1$.

Для доведення пункту 2 досить зауважити, що в розкладі (13) виконуються рівності $\widehat{f}(k\mathbf{n} - (k-1)\mathbf{m}) = 0$ для всіх натуральних $k \ge 2$. Отже, діагональна функція $f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ має вигляд

$$f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z) = \widehat{f}(\mathbf{m}) + \widehat{f}(\mathbf{n})z. \tag{18}$$

Тому, згідно з лемою, має місце нерівність $1 \ge \sup_{z\in\mathbb{D}^1} |f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z)| = \left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right| + \left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right|$. Отже, $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1$, оскільки завжди має місце нерівність $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \ge W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \ge 1$.

Для доведення пункту 3 досить встановити оцінку знизу $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \ge 2$. З цією метою розглянемо функцію f, означену за правилом (12).

Оскільки $n_j \ge m_j$, $j = 1, 2, \ldots, d$, то $f \in B(\mathbb{D}^d)$ при $\rho \in [0, 2)$ і

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \ge \frac{\left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right|}{1 - \left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right|} = 1 + \frac{\rho}{2} \to 2,\ \rho \to 2-,$$

що й потрібно було довести.

***Доведення теореми* 2.** Оскільки для будь-якої функції $f \in B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbb{D}^d)$ її діагональна функція $f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ має вигляд (18), то за лемою справджуються співвідношення

$$1 \geq \sup_{z \in \mathbb{D}^1} |f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z)| = \left|\widehat{f}(\mathbf{m})\right| + \left|\widehat{f}(\mathbf{n})\right|,$$

які для функції $f(\mathbf{z}) = a\mathbf{z}^{\mathbf{m}} + b\mathbf{z}^{\mathbf{n}}$, $|a| + |b| = 1$, перетворюються в рівності.

1. *Szász O.* Ungleichheitsbeziehungen für die Ableitung einer Potenzreihe, die eine im Einheitskreise beschränkte Funktion darstellt // Math. Z. – 1920. – № 8. – S. 303 – 309.
2. *Bohr H.* A theorem concerning power series // Proc. London Math. Soc. – 1914. – **13**. – P. 1 – 5.
3. *Голузин Г. М.* Оценки для аналитических функций с ограниченным средним модулем // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1946. – **18**. – С. 3 – 88.
4. *Голузин Г. М.* Некоторые оценки для ограниченных функций // Мат. сб. – 1950. – **26**, № 1. – С. 7 – 18.
5. *Szász O.* Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe // Math. Z. – 1918. – № 1. – S. 163 – 183.
6. *Knese G.* A Schwarz lemma on the polydisk // Proc. Amer. Math. Soc. – 2007. – **135**, № 9. – P. 2759 – 2768.
7. *Баврин И. И.* Точные оценки производных для функций Каратеодори и Шура // Math. Mont. – 1993. – **1**. – P. 11 – 16.
8. *Boas H. P., Khavinson D.* Bohr's power series theorem in several variables // Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – **125**, № 10. – P. 2975 – 2979.
9. *Paulsen V. I., Popescu G., Singh D.* On Bohr's inequality // Proc. London Math. Soc. – 2002. – **85**, № 3. – P. 493 – 515.
10. *Айзенберг Л. А., Видрас А.* О радиусе Бора для двух классов голоморфных функций // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, № 4. – С. 734 – 746.
11. *Visser C.* A simple proof of certain inequalities concerning polynomials // Koninkl. Ned. Akad. Wetmschap. Proc. – 1945. – **47**. – P. 276 – 281.
12. *Pompéiu D.* Sur une relation d'inégalité dans la théorie des fonctions holomorphes // Arch. Math. und Phys. – 1912. – **19**. – S. 224 – 228.
13. *Landau E., Gaier D.* Darstellung und Bergundung eininger neurer Ergebnisse der Functionentheorie. – Berlin: Springer-Verlag, 1986. – 201 S.
14. *Цих А. К.* Многомерные вычеты и их применения. – Новосибирск: Наука, 1988. – 241 с.
15. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики: Избр. труды: В 3 т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 771 с.
16. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.

Одержано 20.11.14