УДК 517.5

М. В. Гаєвський (Кіровоград. держ. пед. ун-т ім. В. Винниченка),
П. В. Задерей (Київ. нац. ун-т технологій та дизайну)

НАБЛИЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЧАСТИННИМИ СУМАМИ ЇХ РЯДІВ ТЕЙЛОРА

We establish the estimates for the deviations of Taylor's sums on the classes of analytic functions H^{ψ}_{∞}, expressed via the best approximations of ψ-derivative functions by using the asymptotic equalities for the exact upper bounds of deviations of Taylor's sums from functions of the same class.

Получены оценки отклонений сумм Тейлора на классах аналитических функций H^{ψ}_{∞}, выраженные через наилучшие приближения ψ-производных функций, а также асимптотические равенства для точных верхних граней уклонений сумм Тейлора от функций из этих классов.

Введемо такі позначення: $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in D, \tag{1}$$

— розклад в ряд Тейлора – Маклорена аналітичної в крузі D функції,

$$S_n(f, z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad z \in D,$$

— частинна сума її ряду Тейлора – Маклорена, де $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Розглянемо множину H_∞ аналітичних в D функцій із нормою

$$\|f\|_{H_\infty} = \|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty,$$

UH_∞ — одинична куля в H_∞, тобто для $f \in UH_\infty$

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)| \leq 1.$$

Нехай P_n — множина алгебраїчних поліномів степеня не вищого за n, $r_n(f, z) = f(z) - S_n(f, z)$, $E_n(f) := E_n(f)_\infty = \inf_{p_n \in P_n} \|f(z) - p_n(z)\|_\infty$ — найкраще наближення аналітичної в D функції f алгебраїчними поліномами степеня не вищого за n.

У 1916 р. Е. Ландау [1] обчислив норму оператора частинних сум ряду Тейлора функцій, аналітичних в D, і встановив, що

$$\sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|S_n(f, z)\|_\infty = \frac{1}{\pi} \ln n + O(1), \quad n \in \mathbb{N}, \quad f \in UH_\infty;$$

до того ж показав, що існує функція $f \in UH_\infty$, для якої дана оцінка є асимптотично точною. Звідси для кожної функції $f \in H_\infty$ та довільного $n \in \mathbb{N}$ випливає нерівність Лебега – Ландау

$$\|r_n(f, z)\|_\infty \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) E_n(f),$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n та f.

С. Б. Стєчкін [2] розв'язав задачу про асимптотику наближення частинними сумами ряду Тейлора для класу функцій $H_\infty^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, які є аналітичними в D, і $\|f^{(r)}\|_\infty \leq 1$:

$$\sup_{f \in H_\infty^{(r)}} \|r_n(f,z)\|_\infty = \frac{1}{\pi}\frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad n \geq r-1.$$

Нехай $\psi = \{\psi(k)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — така послідовність комплексних чисел, що $|\psi(k)| \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ і $\lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0$, $f \in H_\infty$ з рядом Тейлора вигляду (1). Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}\, a_k z^k, \quad z \in D, \tag{2}$$

є рядом Тейлора деякої функції з класу H_∞, то цю функцію позначимо через f^ψ і назвемо її ψ-похідною функції f. Позначимо через H_∞^ψ клас функцій з H_∞, у яких похідна $f^\psi \in$ $\in UH_\infty$. Уперше подібний клас функцій був розглянутий Шейком [3]. (Без втрати загальності у подальшому можна вважати $\psi(0) = 1$.)

Нехай $\mathfrak{M}_0$ — множина опуклих донизу послідовностей α таких, що прямують до нуля на нескінченності і задовольняють умову $0 < \mu(\alpha, t) \leq K < \infty$, де $\mu(\alpha,t) = \dfrac{t}{\eta(t) - t}$ та $\eta(t) = \eta(\alpha, t) = \alpha^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\,\alpha(t)\right)$.

О. І. Степанець та В. В. Савчук [4] (див. також [5, с. 280 – 290]) отримали нерівність типу Лебега – Ландау: якщо послідовність $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ та $\psi_i \in \mathfrak{M}_0$, $i = 1, 2$, то для кожної функції $f \in H_\infty^\psi$ та довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\|r_n(f,z)\|_\infty \leq \left(\frac{1}{\pi}\,\ln n + O(1)\right) |\psi(n)| E_n(f^\psi),$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n та f. Крім того, існують функції, для яких ця нерівність є точною. З деякими менш загальними результатами можна ознайомитись у [6].

О. М. Швецова [7], наклавши на послідовність ψ умови, слабші за опуклість, отримала такий результат: якщо $n \in \mathbb{N}$, $\psi\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$ — локально абсолютно неперервна функція на $[n+1, \infty)$ така, що $|\psi(k)| \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0$ та

$$\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi) = \int_{n+1}^{\infty} \operatorname{vrai}\sup_{u \geq t} |\psi'(u)| dt < \infty, \tag{3}$$

то

$$\sup_{f^\psi \in H_\infty} \frac{\|r_n(f,z)\|_\infty}{E_n(f^\psi)} = \sup_{f \in H_\infty^\psi} \|r_n(f,z)\|_\infty = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{|\psi(k+n)|}{k} + O(1)\left(\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi)\right),$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n та f.

У даній роботі буде отримано нерівність типу Лебега – Ландау на класі аналітичних функцій H_∞^ψ, де на послідовність ψ накладено слабші умови, ніж (3). Дані результати було анонсовано в [8, 9].

Будемо говорити, що послідовність ψ задовольняє умови Боаса – Теляковського, якщо

$$\lim_{k\to\infty}\psi(k)=0, \tag{4}$$

$$V(\psi)=\sum_{k=0}^{\infty}|\triangle\psi(k)|<\infty, \tag{5}$$

$$B(\psi)=\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{[k/2]}\frac{\triangle\psi(k-m)-\triangle\psi(k+m)}{m}\right|<\infty, \tag{6}$$

де $\triangle\psi(k)=\psi(k)-\psi(k+1)$.

Зазначимо, що для кусково-лінійних функцій ψ з вузлами в цілочислових точках умова

$$\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi)=\int\limits_{n+1}^{\infty}\text{vrai}\sup_{u\geq t}|\psi'(u)|dt<\infty$$

набирає вигляду

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\sup_{m\geq k}|\triangle\psi(m)|<\infty;$$

її ще називають умовою Сідона – Теляковського. В роботі [6] фактично доведено таку нерівність:

$$V(\psi)+B(\psi)\leq M\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{m\geq k}|\triangle\psi(m)|,$$

де M — деяка абсолютна стала. Там же показано, що для послідовності $\triangle\psi(2^s)=\dfrac{1}{2^s}$ та $\triangle\psi(k)=0,\ k\neq 2^s,\ s=0,1,2,3,\ldots,\ \psi(k)=\sum_{m=k}^{\infty}\triangle\psi(k)$ умови (4) – (6) виконуються, а умова (3) — ні [10, с. 217].

Нехай далі L — простір сумовних 2π-періодичних функцій із нормою $\|f\|_L=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt$, $L(T)$ — простір сумовних на T функцій із нормою $\|f\|_{L(T)}=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it})|dt$, $L_\infty(T)$ — простір істотно обмежених на T функцій із нормою $\|f\|_{L_\infty(T)}=\text{vrai}\sup_{z\in T}|f(z)|<\infty$ та $L_\infty(T)_+=$ $=\{f\in L_\infty(T)\colon \widehat{f}(-k)=0, k\in\mathbb{N}\}$ [5, с. 261].

Множину функцій $f\in L_\infty(T)_+$, для яких

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\widehat{f}(k)e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої функції $f^\psi\in L_\infty(T)_+$, позначимо через $L_\infty^\psi(T)_+$.

Зазначимо, що згідно з теоремою Голубєва – Привалова [11, с. 202] простір $L_\infty(T)_+$ є простором граничних значень аналітичних в D функцій f, що зображуються інтегралом Коші. Тому коефіцієнти Тейлора – Маклорена таких функцій збігаються з коефіцієнтами Фур'є їх граничних значень, тобто $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}=\widehat{f}(k),\ k=0,1,2,\ldots$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $\psi(k) \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — послідовність, для якої виконуються умови* (4)–(6) *та $\psi(k) \neq 0$. Тоді для довільної функції $f \in H^{\psi}_{\infty}$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справджується нерівність*

$$\|r_n(f,z)\|_{\infty} \leq \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)\left(V_n(\psi) + B_n(\psi)\right) \right) E_n(f^{\psi}). \tag{7}$$

Крім того, існує функція $\Phi(z) \in H^{\psi}_{\infty}$ така, що $\Phi^{\psi}(z) = \varphi(z) \in UH_{\infty}$, для якої в (7) *матиме місце знак рівності, тобто*

$$\|r_n(\Phi,z)\|_{\infty} = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)\left(V_n(\psi) + B_n(\psi)\right) \right) E_n(\varphi), \tag{8}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n та f,

$$V_n(\psi) = \sum_{k=n}^{\infty} |\triangle\psi(k)|$$

та

$$B_n(\psi) = \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{[k/2]} \frac{\triangle\psi(n+k-m) - \triangle\psi(n+k+m)}{m} \right|.$$

Для доведення даної теореми сформулюємо допоміжні твердження щодо оцінок інтегралів від модулів тригонометричних рядів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ та оцінок деяких числових сум і рядів. Кожне з цих тверджень, на нашу думку, має і самостійне значення.

Лема 1. *Якщо послідовність комплексних чисел $\psi = \{\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ є такою, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ тригонометричний ряд*

$$2\sum_{k=1}^{n} \psi(k)\cos kx + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{k\psi(k)}{n+1} \cos kx -$$

$$-i \sum_{k=n+1}^{2n+1} \left(2 - \frac{k}{n+1}\right)\psi(k)\sin kx + 2\sum_{k=2n+2}^{\infty} \psi(k)\cos kx$$

є рядом Фур'є деякої сумовної 2π-періодичної функції $\Psi_1(x)$, то клас H^{ψ}_{∞} складається з аналітичних в D і неперервних в $\overline{D}$ функцій f, граничні значення яких на колі T зображуються у вигляді згортки

$$f(e^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}(e^{it})\Psi_1(t-\theta)dt,$$

де $f^{\psi} \in L_{\infty}(T)_{+}$ і $\|f^{\psi}\|_{L_{\infty}(T)} \leq 1$.

Доведення. Оскільки за означенням класу H^{ψ}_{∞} ψ-похідна f^{ψ} належить UH_{∞}, то майже скрізь на колі існують недотичні граничні значення, які будемо позначати теж f^{ψ} і $f^{\psi} \in \in L_{\infty}(T)_{+}$, а отже, для довільного $k \in \mathbb{Z}_{+}$ справджується співвідношення

$$\int\limits_{T} f^{\psi}(w) w^{k} dw = 0.$$

Крім того, має місце зображення

$$a_k = \frac{\psi(k)}{2\pi i} \int\limits_{T} \frac{f^{\psi}(w)}{w^{k+1}} dw,$$

підставивши яке у формулу (1), отримаємо

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T} f^{\psi}(w) \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)(z\overline{w})^{k} \frac{dw}{w} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T} f^{\psi}(w) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)(z\overline{w})^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)(\overline{z}w)^{k} \right) \frac{dw}{w}, \quad z \in D,$$

де послідовність $\mu(k)$ задано таким чином:

$$\mu(k) = \begin{cases} \psi(k) & \text{при} \quad k \in [1, n], \\ \left(-1 + \dfrac{k}{n+1}\right) \psi(k) & \text{при} \quad k \in [n+1, 2n+1], \\ \psi(k) & \text{при} \quad k \geq 2n+2. \end{cases}$$

Покладемо $z = re^{i\theta}$, $r \in [0, 1)$, та $w = e^{it}$ і спростимо вираз у дужках під інтегралом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)(z\overline{w})^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)(\overline{z}w)^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) r^{k} e^{-ik(t-\theta)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) r^{k} e^{ik(t-\theta)} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) r^{k} e^{-ik(t-\theta)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \psi(k) r^{k} e^{ik(t-\theta)} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \left(-1 + \frac{k}{n+1}\right) \psi(k) r^{k} e^{ik(t-\theta)} +$$

$$+ \sum_{k=2n+2}^{\infty} \psi(k) r^{k} e^{ik(t-\theta)} =: \Psi_r(t-\theta).$$

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо

$$\Psi_r(t-\theta) = 2\sum_{k=1}^{n}\psi(k)r^k\cos k(t-\theta) + \sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{k}{n+1}\,\psi(k)r^k\cos k(t-\theta) -$$

$$-i\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(2-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k)r^k\sin k(t-\theta) + 2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)r^k\cos k(t-\theta), \quad 0<r<1.$$

Оскільки за умовою теореми $\Psi_1 \in L$, то згідно з [12, с. 54]

$$\Psi_r(t-\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi_1(t-\tau)P_r(\theta-\tau)d\tau,$$

де

$$P_r(\theta-\tau) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos k(\theta-\tau) = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos(\theta-\tau)+r^2)},$$

та

$$f(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}(e^{it})\Psi_r(t-\theta)dt =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}(e^{it})\Psi_1(t-\tau)P_r(\theta-\tau)d\tau dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(\tau)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\tau)+r^2}d\tau, \tag{9}$$

де

$$F(\tau) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}(e^{it})\Psi_1(t-\tau)dt.$$

Відомо (див., наприклад, [13, с. 138]), що функція F, як згортка двох 2π-періодичних функцій $f^{\psi}(e^{it}) \in L_{\infty}(T)$ та $\Psi_1(t) \in L_1(T)$, є 2π-періодичною та неперервною на $[0, 2\pi)$ функцією. Тому інтеграл (9) є інтегралом Пуассона неперервної функції і за теоремою Фату має некутові граничні значення, отже, функція f неперервно продовжується в замкнений круг $\overline{D}$ і буде виконуватись $f(e^{it}) = \lim_{z\to e^{it}} f(z) = F(t)$.

Лему доведено.

Лема 2. 1. *Якщо коефіцієнти ряду* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin kx$, $a_k \in \mathbb{C}$, *задовольняють умови* (4)–(6), *то цей ряд є збіжним і для довільного* $s \in \mathbb{N}$ *має місце оцінка*

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{2s+1}}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin kx\right|dx - \sum_{k=1}^{s}\frac{|a_k|}{k}\right| \le M\Big(V(a)+B(a)\Big). \tag{10}$$

2. *Якщо коефіцієнти ряду* $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx,\, a_k\in\mathbb{R}$, *задовольняють умови* (4)–(6), *то для довільного* $m\in\mathbb{N}$ *має місце оцінка*

$$\left|\int\limits_0^{\pi}\left|\sum_{k=m}^{\infty} a_k\cos kx\right|dx-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{|a_{m+k}|}{k}\right|\le M\Big(V_m(a)+B_m(a)\Big). \tag{11}$$

3. *Якщо коефіцієнти ряду* $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx$, $a_k\in\mathbb{R}$, *задовольняють умови* (4)–(6), *то має місце оцінка*

$$\int\limits_0^{\pi}\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx\right|dx\le M\Big(V(a)+B(a)\Big). \tag{12}$$

(Тут та далі символом M будемо позначати абсолютні сталі, можливо неоднакові у різних формулах.)

Перше твердження леми є узагальненням результатів Теляковського [14] і отримано з використанням його методу. Дійсно, проводячи міркування аналогічно [14] і вважаючи, що коефіцієнти a_k є комплексними, та використовуючи нерівність

$$\frac{|\Re a_k|+|\Im a_k|}{2}\le|a_k|\le|\Re a_k|+|\Im a_k|,$$

отримуємо першу частину леми.

Друге твердження леми є наслідком теореми 1 з [15, с. 73], а третє отримано в [16].

Лема 3. *Якщо послідовність чисел* $a=\{a_k\}$ *задовольняє умови* (4)–(6) *і послідовності* b, c *та* d *задано таким чином*:

$$b=\{b_k\}=\begin{cases}0 & \textit{при}\quad k\in[0,n]\bigcup[2n+2,\infty),\\[2ex] \left(\dfrac{k}{n+1}-2\right)a_k & \textit{при}\quad k\in[n+1,2n+1],\end{cases}$$

$$c=\{c_k\}=\begin{cases}0 & \textit{при}\quad k\in[0,n],\\[2ex] \left(\dfrac{k}{n+1}-1\right)a_k & \textit{при}\quad k\in[n+1,2n+1],\\[2ex] a_k & \textit{при}\quad k\ge 2n+2\end{cases}$$

та

$$d=\{d_k\}=\begin{cases}\left(\dfrac{k}{n+1}-1\right)a_k & \textit{при}\quad k\in[0,n],\\[2ex] 0 & \textit{при}\quad k>n,\end{cases}$$

то мають місце співвідношення

$$B_n(b)\le M\Big(V_n(a)+B_n(a)\Big), \tag{13}$$

$$B_n(c) \leq M\Big(V_n(a) + B_n(a)\Big) \tag{14}$$

та

$$B_n(d) \leq M\Big(V_n(a) + B_n(a)\Big). \tag{15}$$

Доведення. Спочатку встановимо співвідношення (13). Для скорочення запису позначимо

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \in [0, n] \bigcup [2n+2, \infty), \\ 2 - \dfrac{k}{n+1} & \text{при} \quad k \in [n+1, 2n+1], \end{cases}$$

тоді $b_k = -\lambda_k^{(n)} a_k$ та

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{\nu=1}^{[k/2]} \frac{\triangle b_{n+k-\nu} - \triangle b_{n+k+\nu}}{\nu} \right| =$$

$$= \sum_{k=2}^{2n+2} \left| \sum_{\nu=1}^{[k/2]} \frac{\triangle(\lambda_{n+k-\nu}^{(n)} a_{n+k-\nu}) - \triangle(\lambda_{n+k+\nu}^{(n)} a_{n+k+\nu})}{\nu} \right| =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left| \sum_{\nu=1}^{[k/2]} \frac{\triangle(\lambda_{n+k-\nu}^{(n)} a_{n+k-\nu}) - \triangle(\lambda_{n+k+\nu}^{(n)} a_{n+k+\nu})}{\nu} \right| +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{2n+2} \left| \sum_{\nu=1}^{[k/2]} \frac{\triangle(\lambda_{n+k-\nu}^{(n)} a_{n+k-\nu})}{\nu} \right| =: \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Оцінимо спочатку Σ_2. Застосувавши перетворення Абеля, отримаємо

$$\Sigma_2 := \sum_{k=n+1}^{2n+2} \left| \sum_{\nu=1}^{[k/2]} \frac{\triangle(\lambda_{n+k-\nu}^{(n)} a_{n+k-\nu})}{\nu} \right| =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \left| \sum_{\nu=1}^{[k/2]} \frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)} a_{n+k-\nu}}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{[k/2]} \frac{\lambda_{n+k-\nu+1}^{(n)} a_{n+k-\nu+1}}{\nu} \right| =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \left| \sum_{\nu=1}^{[k/2]} \frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)} a_{n+k-\nu}}{\nu} - \sum_{\nu=0}^{[k/2]-1} \frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)} a_{n+k-\nu}}{\nu+1} \right| =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \left| \frac{\lambda_{n+k-[k/2]}^{(n)} a_{n+k-[k/2]}}{[k/2]} - \lambda_{n+k}^{(n)} a_{n+k} + \sum_{\nu=1}^{[k/2]-1} \frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)} a_{n+k-\nu}}{\nu(\nu+1)} \right| \leq$$

$$\leq \max_{n+1\leq k\leq 2n+2} \lambda_k^{(n)} |a_k| \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{[k/2]} + \lambda_{2n+1}^{(n)} |a_{2n+1}| +$$

$$+ \max_{n+1\leq k\leq 2n+2} |a_k| \sum_{k=n+1}^{2n+2} \sum_{\nu=1}^{[k/2]-1} \lambda_{n+k-\nu}^{(n)} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} \right). \tag{16}$$

Розглянемо суму

$$\sum_{k=n+1}^{2n+2} \sum_{m=1}^{[k/2]-1} \lambda_{n+k-m}^{(n)} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \sum_{m=k-[k/2]+1}^{k-1} \lambda_{n+m}^{(n)} \left(\frac{1}{k-m} - \frac{1}{k-m+1} \right) =$$

$$= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \sum_{m=k-[k/2]+1}^{k-1} \lambda_{n+m}^{(n)} \left(\frac{1}{k-m} - \frac{1}{k-m+1} \right) +$$

$$+ \sum_{m=n-[(n+1)/2]+2}^{n} \lambda_{n+m}^{(n)} \left(\frac{1}{n+1-m} - \frac{1}{n+2-m} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{m=n+2-[n/2]}^{n+1} \sum_{k=2m}^{2n+2} \left(2 - \frac{n+m}{n+1} \right) \left(\frac{1}{k-m} - \frac{1}{k-m+1} \right) +$$

$$+ \max_{n+1\leq m\leq 2n} \lambda_m^{(n)} \sum_{m=n+2-[(n+1)/2]}^{n} \left(\frac{1}{n+1-m} - \frac{1}{n+2-m} \right) \leq M.$$

Згідно зі співвідношенням (4) виконується нерівність $|a_n| \leq V_n(a)$, тому остаточно з (16) отримуємо оцінку

$$\Sigma_2 \leq M V_n(a).$$

Оцінимо тепер Σ_1. Зауважимо, що при $k \geq n$ будуть виконуватися такі співвідношення:

$$\triangle \lambda_k^{(n)} = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad k = n, \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{при} \quad k \in [n+1, 2n+1], \\ 0 & \text{при} \quad k \in [2n+2, \infty) \end{cases}$$

та

$$\triangle^2\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} -1-\dfrac{1}{n+1} & \text{при} \quad k=n, \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{при} \quad k=2n+1, \\ 0 & \text{при всіх інших} \quad k>n. \end{cases}$$

Тоді

$$\Sigma_1 = \sum_{k=2}^{n}\left|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\triangle(\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}a_{n+k-\nu})-\triangle(\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}a_{n+k+\nu})}{\nu}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=2}^{n}\left|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{a_{n+k-\nu}\triangle\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}-a_{n+k+\nu}\triangle\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}}{\nu}\right| +$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\left|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k-\nu}-\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\right| =: \Sigma_1^1+\Sigma_1^2.$$

Для оцінки Σ_1^1 використаємо нерівність [15] (лема 1)

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{[k/2]}\frac{\triangle\alpha_{k-m}-\triangle\alpha_{k+m}}{m}\right| \le M\sum_{k=1}^{\infty}k\triangle^2|\alpha_{k-1}|, \tag{17}$$

в якій покладемо $\triangle\alpha_k = a_{n+k}\triangle\lambda_{n+k}^{(n)}$, тому

$$\triangle^2\alpha_k = \triangle a_{n+k}\triangle\lambda_{n+k}^{(n)} + a_{n+k+1}\triangle^2\lambda_{n+k+1}^{(n)} = \begin{cases} -\triangle a_n & \text{при} \quad k=0, \\ \dfrac{\triangle a_{n+k}}{n+1} & \text{при} \quad k\in[1,n], \\ \dfrac{\triangle a_{2n+1}}{n+1}+\dfrac{a_{2n+1}}{n+1} & \text{при} \quad k=n+1, \\ 0 & \text{при} \quad k\ge n+2. \end{cases}$$

Отже,

$$\Sigma_1^1 \le |\triangle a_n| + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{n+1}|\triangle a_{n+k}| + |a_{2n+1}| \le MV_n(a).$$

Оцінимо Σ_1^2:

$$\Sigma_1^2 = \sum_{k=2}^{n}\left|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k-\nu}-\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\right| \le$$

$$\leq \sum_{k=2}^{n}\left|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k-\nu}-\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\right|+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\left|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k+\nu}-\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\right|=$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\left|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\frac{\triangle a_{n+k-\nu}-\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\right|+\sum_{k=2}^{n}\left|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\triangle a_{n+k+\nu}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}-\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}}{\nu}\right|.$$

Оцінимо другий доданок останнього співвідношення. Для цього зазначимо, що при $k \geq n$ справджується співвідношення

$$\lambda_k^{(n)} = 2-\frac{\min\{k, 2n+2\}}{n+1},$$

тому

$$\sum_{k=2}^{n}\left|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\triangle a_{n+k+\nu}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}-\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}}{\nu}\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\nu=1}^{[k/2]}|\triangle a_{n+k+\nu}|\frac{\min\{n+k+\nu, 2n+2\}-\min\{n+k-\nu, 2n+2\}}{\nu}\leq$$

$$\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\nu=1}^{[k/2]}|\triangle a_{n+k+\nu}|\frac{\min\{n+k+\nu, 2n+2\}-n-k+\nu}{\nu}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\nu=1}^{[k/2]}|\triangle a_{n+k+\nu}|\frac{\min\{2\nu, n-k+\nu+2\}}{\nu}.$$

Оскільки величина

$$\frac{\min\{2\nu, n-k+\nu+2\}-n+k-\nu}{\nu}$$

при заданих значеннях параметрів n, k та ν є обмеженою, то остаточно маємо

$$\sum_{k=2}^{n}\left|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\triangle a_{n+k+\nu}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}-\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}}{\nu}\right|\leq\frac{M}{n+1}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\nu=1}^{[k/2]}|\triangle a_{n+k+\nu}|\leq MV_n(a).$$

Отже,

$$\Sigma_1^2\leq\sum_{k=2}^{n}\left|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\frac{\triangle a_{n+k-\nu}-\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\right|+MV_n(a)=$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left| \sum_{\nu=1}^{[k/2]} \left(2 - \frac{n+k-\nu}{n+1}\right) \frac{\triangle a_{n+k-\nu} - \triangle a_{n+k+\nu}}{\nu} \right| + MV_n(a) \leq$$

$$\leq \sum_{k=2}^{n} \left(2 - \frac{n+k}{n+1}\right) \left| \sum_{\nu=1}^{[k/2]} \frac{\triangle a_{n+k-\nu} - \triangle a_{n+k+\nu}}{\nu} \right| +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \left| \sum_{\nu=1}^{[k/2]} \frac{\nu}{n+1} \frac{\triangle a_{n+k-\nu} - \triangle a_{n+k+\nu}}{\nu} \right| + MV_n(a) \leq$$

$$\leq M \sum_{k=2}^{n} \left| \sum_{\nu=1}^{[k/2]} \frac{\triangle a_{n+k-\nu} - \triangle a_{n+k+\nu}}{\nu} \right| +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \left| \sum_{\nu=1}^{[k/2]} \frac{\triangle a_{n+k-\nu} - \triangle a_{n+k+\nu}}{n+1} \right| + MV_n(a) \leq M\Big(V_n(a) + B_n(a)\Big).$$

Склавши отримані оцінки разом, отримаємо співвідношення (13).

Співвідношення (14) випливає з (13). Дійсно, легко бачити, що

$$B_n(c) - B_n(a) \leq B_n(b).$$

Оцінювання співвідношення (15) проводиться за схемою оцінювання величини Σ_1.

Лему 3 доведено.

Доведення теореми **1.** З леми 1 згідно з принципом максимуму модуля випливає співвідношення

$$\|f(z) - S_n(f,z)\|_\infty = \|f(e^{it}) - S_n(f, e^{it})\|_{L_\infty(T)}.$$

Отже, задача отримання нерівності типу Лебега – Ландау на класі H_∞^ψ зводиться до отримання аналогічних нерівностей на класі $L_\infty^\psi(T)_+$.

Для $f \in H_\infty^\psi$ граничні значення будемо позначати тим самим символом $f(e^{i\theta})$, $f \in L_\infty^\psi(T)_+$. З урахуванням леми 1 можемо записати

$$f(e^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^\psi\left(e^{i(t+\theta)}\right) \left(2 \sum_{k=1}^{n} \psi(k) \cos kt - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \psi(k) \cos kt + \right.$$

$$\left. +2 \sum_{k=2n+2}^{\infty} \psi(k) \cos kt + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \left(2 - \frac{k}{n+1}\right) \psi(k) e^{-ikt} \right) dt. \qquad (18)$$

Аналогічно

$$S_n(f, e^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^\psi(e^{i(t+\theta)}) \sum_{k=1}^{n} \psi(k) \cos kt dt,$$

тому

$$r_n(f,e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}\left(e^{i(t+\theta)}\right)\left(2\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(\frac{k}{n+1}-1\right)\psi(k)\cos kt+\right.$$

$$\left.+\,2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(2-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k)e^{-ikt}\right)dt. \qquad (19)$$

Нехай $p_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k z^k$ — поліном степеня не вищого за n, який є поліномом найкращого наближення функції f^{ψ}. Легко перевірити, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}p_n\left(e^{i(t+\theta)}\right)\left(2\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(\frac{k}{n+1}-1\right)\psi(k)\cos kt+\right.$$

$$\left.+\,2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos k+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(2-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k)e^{-ikt}\right)dt=0,$$

тому

$$r_n(f,e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})-p_n(e^{i(t+\theta)})\right)\left(2\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(\frac{k}{n+1}-1\right)\psi(k)\cos kt+\right.$$

$$\left.+\,2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(2-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k)e^{-ikt}\right)dt. \qquad (20)$$

Тоді з (20) отримуємо

$$\|r_n(f,e^{i\theta})\|_\infty\le E_n(f^{\psi})\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|2\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(\frac{k}{n+1}-1\right)\psi(k)\cos ktdt+\right.$$

$$\left.+2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt\right|dt+E_n(f^{\psi})\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(2-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k)e^{-ikt}\right|dt. \qquad (21)$$

До дійсної та уявної частин підінтегральної функції першого доданка з останнього співвідношення застосуємо (11), взявши $m=n$. Врахувавши (14) та нерівність $\dfrac{|\Re z|+|\Im z|}{2}\le|z|\le$ $\le|\Re z|+|\Im z|$, одержимо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|2\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(\frac{k}{n+1}-1\right)\psi(k)\cos kt+2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt\right|dt=$$

$$=O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi)).$$

Тому далі з (21) отримаємо

$$\|r_n(f,e^{i\theta})\|_\infty \le E_n(f^\psi)\Bigg(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)e^{-ikt}\right|dt+$$

$$+O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi))\Bigg). \tag{22}$$

Згідно зі співвідношеннями (12) та (15) має місце оцінка

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)\cos kt\right|dt \le O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big),$$

тому (22) запишемо так:

$$\|r_n(f,e^{i\theta})\|_\infty \le E_n(f^\psi)\Bigg(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)\sin kt\right|dt+$$

$$+O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big)\Bigg). \tag{23}$$

До інтеграла у правій частині (23) застосуємо оцінки (10) та (15). Отже,

$$\int\limits_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)\sin kt\right|dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)|\psi(k+n+1)|+O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k}-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}|\psi(k+n+1)|+O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k}+O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big). \tag{24}$$

З урахуванням (24) остаточно отримаємо

$$\|r_n(f,z)\|_\infty \le \left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k}+O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big)\right)E_n(f^\psi).$$

Першу частину теореми доведено.

Для доведення другої частини теореми досить встановити для деякої функції $\Phi \in H^\psi_\infty$ оцінку знизу, тобто слід показати існування такої функції $\varphi \in UH_\infty$, що $\Phi^\psi(\cdot)=\varphi(\cdot)$ та

$$\|r_n(\Phi,z)\|_\infty \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big).$$

Використавши нерівність $|r_n(\Phi,1)| \leq \|r_n(\Phi,z)\|_\infty$, зі співвідношення (19) та (14) одержимо

$$|r_n(\Phi,e^{i0})| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{it})\left(2\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(\frac{k}{n+1}-1\right)\psi(k)\cos kt+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(2-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k)e^{-ikt}\right)dt\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{it})\sum_{k=n+2}^{2n+1}\left(2-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k)e^{-ikt}dt\right| + O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big). \tag{25}$$

Виконаємо такі перетворення інтеграла:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{it})\sum_{k=n+2}^{2n+1}\left(2-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k)e^{-ikt}dt =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{it})\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)e^{-i(k+n+1)t}dt =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)e^{-ikt}dt =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}\left(2\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)\cos kt-\right.$$

$$-i\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)\sin kt-$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)\cos kt\right)dt =$$

$$= 2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)\cos kt dt-$$

$$-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)e^{ikt}dt.$$

Використавши оцінки (12) та (15), з останнього співвідношення та (25) отримаємо оцінку

$$\left|r_n(\Phi, e^{i0})\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)e^{ikt}dt\right| +$$

$$+O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big). \tag{26}$$

Розглянемо поліном $P_n(z) = \sum_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)z^k$. За його коефіцієнтами можемо побудувати многочлен $Q_{2n}(z)$ порядку $2n$ та функцію φ з вказаними нижче властивостями.

Як відомо [17, с. 489] (теорема 6), існує єдиний многочлен $Q_{2n}(z)$ вигляду

$$Q_{2n}(z) = (\alpha_0+\ldots+\alpha_\nu z^\nu)^2(\beta_0+\ldots+\beta_{n-\nu}z^{n-\nu})(\overline{\beta}_{n-\nu}+\ldots+\overline{\beta}_0 z^{n-\nu}),$$

де $\nu \le n$, $\alpha_0+\ldots+\alpha_\nu z^\nu \ne 0$ при $|z|\le 1$, α та β пов'язані співвідношенням

$$Q_{2n}(z) = \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\psi(k+n+1)z^k + \sum_{k=n+1}^{2n}\varrho_k z^k.$$

При цьому поліном $Q_{2n}(z)$ серед усіх аналітичних в одиничному крузі функцій f, для яких $S_n(f,z) = P_n(z)$, $z\in D$, дає найменше значення для величини

$$\sup_{0<r<1}\int\limits_{0}^{2\pi}|f(re^{it})|dt.$$

Покладемо тепер

$$\varphi(z) = \varepsilon\frac{\overline{\alpha}_\nu+\ldots+\overline{\alpha}_0 z^\nu}{\alpha_0+\ldots+\alpha_\nu z^\nu}, \quad |\varepsilon| = 1,$$

до того ж функція $\varphi(z)$ буде мати такі властивості [17, с. 491, 492]:

1) майже скрізь $|\varphi(z)|\le 1$ та $\varphi(z)$ є аналітичною при $z\le 1$;

2) $\arg\dfrac{\varphi(z)Q_{2n}(z)}{z^n} = \mathrm{const}$ майже скрізь на $|z|=1$ і, як наслідок, має місце рівність

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})Q_{2n}(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}dt\right| = \int\limits_{-\pi}^{\pi}|\varphi(e^{it})Q_{2n}(e^{it})|dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}|Q_{2n}(e^{it})|dt.$$

Отже, враховуючи викладене вище, (26) записуємо у вигляді

$$|r_n(\Phi, e^{i0})| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}\,Q_{2n}(e^{it})dt\right| + O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|Q_{2n}(e^{it})|dt + O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi)).$$

Оскільки $Q_{2n}(z)$ належить простору Гарді (див., наприклад, [12, с. 63]), то до останнього інтеграла застосуємо нерівність Гарді – Літтлвуда [18, с. 454]. Отримаємо

$$|r_n(\Phi, e^{i0})| \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-\dfrac{k}{n+1}\right)|\psi(k+n+1)|}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{|\varrho_k|}{k} + O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big).$$

З урахуванням нерівності $E_n(f) \leq \|f\|_\infty \leq 1,\ f \in UH_\infty$ можемо записати

$$\|r_n(\Phi, z)\|_\infty \geq |r_n(\Phi, z=1)| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big) \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big)\right)E_n(\varphi).$$

Другу частину теореми доведено.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $\psi(k) \in \mathbb{C}, k = 0, 1, 2, \ldots,$ — послідовність, для якої виконуються умови* (4) – (6) *та $|\psi(k)| \neq 0$. Тоді для довільної функції $f \in H^\psi_\infty$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справджується співвідношення*

$$\sup_{f\in H^\psi_\infty}\|r_n(f, z)\|_\infty = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big),$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n та f.

Оцінка зверху величини $\sup_{f\in H^\psi_\infty}\|r_n(f, z)\|_\infty$ випливає з теореми 1 та нерівності $E_n(f) \leq \leq \|f\|_\infty \leq 1,\ f \in UH$. Оцінку знизу отримано у другій частині доведення теореми 1.

***Зауваження* 1.** У випадку, коли ψ_1, ψ_2 $(\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k), k = 0, 1, 2, \ldots,$ є опуклими донизу функціями, як встановлено О. І. Степанцем (див., наприклад, [13, с. 27]), рівність (8) є асимптотично точною, тобто залишковий член має порядок менший за порядок головного члена. Асимптотично точною формула (8) буде, зокрема, і у випадку монотонно спадних до 0 послідовностей, тобто коли $\psi_1(k) \geq \psi_1(k+1)$, $\psi_2(k) \geq \psi_2(k+1)$ за умов $\lim\psi_1(k) = 0$, $\lim\psi_2(k) = 0$, $k \longrightarrow \infty$. Дійсно, тоді

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|\triangle\psi_1(k)| = \sum_{k=n}^{\infty}\triangle\psi_1(k) = \psi_1(n)$$

та має місце оцінка (доведення див. у [19, с. 102])

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{\triangle\psi_1(k+n-l) - \triangle\gamma(k+n+l)}{l}\right| \leq M\psi_1(n+1).$$

Аналогічно буде для ψ_2. Прикладами таких послідовностей є, наприклад, $\psi(k) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k^2}\left|\sin k\,\dfrac{\pi}{2}\right|$ [19, с. 104] або $\triangle\psi(2^s) = \dfrac{1}{2^s}$ та $\triangle\psi(k) = 0,\ k \neq 2^s,\ s = 0,1,2,3,\ldots,\ \psi(k) = \sum_{m=k}^{\infty}\triangle\psi(k)$ [10, с. 217].

***Зауваження* 2.** Теореми 1 та 2 лишаються справедливими і при заміні метрики L_∞ на L_1.

1. *Landau E.* Darstellung und Begrundung einiger neuer Ergebnisse der Funktionentheorie. – Berlin, 1916.
2. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**, № 5. – С. 461 – 472.
3. *Scheik J. T.* Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – **17**, № 6. – P. 1238 – 1243.
4. *Степанец А. И., Савчук В. В.* Приближения интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 706 – 740.
5. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – **40**, ч. 2. – 468 с.
6. *Савчук В. В.* Швидкість збіжності ряду Тейлора для деяких класів аналітичних функцій // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 7. – С. 1001 – 1003.
7. *Швецова А. М.* Приближение частными суммами ряда Тейлора и наилучшее приближение некоторых классов функций, аналитических в единичном круге // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Сер. Математика, прикл. математика і механіка. – 2000. – **475**. – С. 208 – 217.
8. *Гаєвський М. В., Задерей П. В.* Наближення аналітичних функцій лінійними методами підсумовування їх рядів Тейлора // Тези доп. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. – Івано-Франківськ: Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2014.
9. *Гаєвський М. В., Задерей П. В.* Про лінійні методи підсумовування рядів Тейлора аналітичних функцій // Тези Міжнар. мат. конф. „Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки”. – Київ: Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, 2014.
10. *Фомин Г. А.* Об одном классе тригонометрических рядов // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 2. – С. 213 – 222.
11. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 336 с.
12. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 331 с.
13. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – **40,** ч. 1. – 427 с.
14. *Теляковский С. А.* Асимптотическая оценка интеграла от модуля функции, заданной рядом из синусов // Сиб. мат. журн. – 1967. – **8**, № 6. – С. 1416 – 1422.
15. *Теляковский С. А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации // Приближение периодических функций: Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – **109**. – С. 65 – 97.
16. *Теляковский С. А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1964. – **28**, № 6. – С. 1209 – 1236.
17. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
18. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
19. *Задерей П. В.* Об уклонении $(\psi, \bar{\beta})$-дифференцируемых периодических функций от линейных средних их рядов Фурье. – Варшава, 1990. – 110 с.

Одержано 19.12.14,
після доопрацювання — 27.04.15