УДК 517.982

Г. І. Гуменчук (Чернів. мед. коледж)

ПРО СУМУ ВУЗЬКОГО ТА СКІНЧЕННОВИМІРНОГО ОРТОГОНАЛЬНО АДИТИВНИХ ОПЕРАТОРІВ

It is well known that the sum of two linear continuous narrow operators in the spaces L_p with $1 < p < \infty$ need not be narrow. However, the sum of narrow and compact linear continuous operators is narrow. In a recent paper, M. Pliev and M. Popov started the investigation of nonlinear narrow operators and, in particular, of orthogonally additive operators. As our main result, we prove that the sum of a narrow orthogonally additive operator and a finite-rank laterally-to-norm continuous orthogonally additive operator acting from an atomless Dedekind complete vector lattice into a Banach space is narrow.

Известно, что сумма двух линейных непрерывных узких операторов на пространствах L_p при $1 < p < \infty$ не обязательно должна быть узким оператором. Однако сумма узкого и компактного линейных непрерывных операторов является узким оператором. В работе М. Плиева и М. Попова начато исследование нелинейных узких операторов, в частности ортогонально аддитивных операторов. В настоящей статье доказано, что сумма узкого ортогонально аддитивного оператора и конечномерного латерально-нормировано непрерывного ортогонально аддитивного оператора, действующего из безатомной порядково полной векторной решетки в банахово пространство, является узким оператором.

1. Вступ. ***1.1. Термінологія та позначення.*** Ми будемо використовувати стандартні відомості про векторні ґратки, а також стандартні позначення з [1].

Нехай E — векторна ґратка та $x, y \in E$. Елемент x називається *фрагментом* елемента y (записується $x \sqsubseteq y$), якщо $x \perp (y - x)$ (у іншій термінології x називається *компонентою* елемента y; ще кажуть, що x є *уламком* елемента y). Якщо E — векторна ґратка функцій, то $x \sqsubseteq y$ означає, що графік функції x є підмножиною графіка функції y, якщо відкинути ту частину графіка, в якій функція x дорівнює нулю. Неважко переконатися в тому, що $\sqsubseteq$ — частковий порядок на E, який у роботі [2] названо латеральним порядком.

Елемент $u > 0$ векторної ґратки E називається *атомом*, якщо з умов $0 \le x \le u$, $0 \le y \le u$ та $x \wedge y = 0$ випливає, що $x = 0$, або $y = 0$. Векторна ґратка називається *безатомною*, якщо вона не містить атомів. Очевидно, ненульовий елемент $x \in E$ є атомом тоді і лише тоді, коли єдиними фрагментами x є 0 та сам x. Отже, векторна ґратка E є безатомною тоді і лише тоді, коли кожний ненульовий елемент $x \in E$ має такий фрагмент $y \sqsubseteq x$, що $0 \ne y \ne x$. Сітка $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ в E називається *порядково збіжною* до елемента $x \in E$ (позначення $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{o}} x$), якщо існує сітка $(u_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ в E (з тією ж самою множиною індексів) така, що $u_\alpha \downarrow 0$ та $|x_\beta - x| \le u_\beta$ для всіх $\beta \in \Lambda$. Рівність $x = \bigsqcup_{i=1}^n x_i$ означає, що $x = \sum_{i=1}^n x_i$ та $x_i \perp x_j$ при $i \ne j$. Підмножина A векторної ґратки E називається латерально обмеженою, якщо існує $e \in E$ такий, що $x \sqsubseteq e$ для всіх $x \in A$. Згідно з [3], сітка $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ в E називається *латерально збіжною* до елемента $x \in E$ (позначення $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{lat}} x$), якщо $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{o}} x$ та для деякого індексу α_0 сітка $(x_\alpha)_{\alpha\ge\alpha_0}$ є латерально обмеженою. Відображення $f\colon E \to X$ з векторної ґратки E у банахів простір X називається:

порядково-нормовано неперервним у точці $x \in E$, якщо для довільної сітки (x_α) в E з умови $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{o}} x$ випливає $\|x_\alpha - x\| \to 0$;

порядково-нормовано неперервним, якщо воно є таким у кожній точці $x \in E$;

латерально-нормовано неперервним в точці $x \in E$, якщо для довільної сітки (x_α) в E з умови $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{lat}} x$ випливає $\|x_\alpha - x\| \to 0$;

латерально-нормовано неперервним, якщо воно є таким у кожній точці $x \in E$.

Оскільки за означенням з латеральної збіжності випливає порядкова збіжність, то кожне порядково-нормовано неперервне відображення є латерально-нормовано неперервним.

1.2. Ортогонально адитивні оператори на векторних ґратках. Ортогонально адитивні оператори, що діють між векторними ґратками, було введено і досліджено у 1990 р. Х. Мазоном та С. Сегура де Леоном [4, 5], а згодом узагальнено на порядково-нормовані простори А. Г. Кусраєвим та М. А. Плієвим [6 – 8]. Питання продовження ортогонально адитивних операторів розглядалися у роботі [9]. У статті [3] доведено, що латерально-нормована неперервність ортогонально адитивного оператора рівносильна його латерально-нормованій неперервності в нулі.

Нехай E — векторна ґратка та F — дійсний лінійний простір. Оператор $T\colon E \to F$ називається *ортогонально адитивним*, якщо $T(x+y) = T(x) + T(y)$ для довільних диз'юнктних елементів $x, y \in E$. З означень безпосередньо випливає, що $T(0) = 0$, а множина всіх ортогонально адитивних операторів утворює лінійний простір відносно природних лінійних операцій. Наведемо природні приклади нелінійних ортогонально адитивних операторів:

(1) (Ω, Σ, μ) — простір з мірою, $1 \leq p < \infty$, $T\colon L_p(\mu) \to \mathbb{R}$, $T(x) = \|x\|^p$, $x \in L_p(\mu)$;

(2) E — безатомна векторна ґратка, $T_i\colon E \to E$, $T_1(x) = x^+$, $T_2(x) = x^-$, $T_3(x) = |x|$, $x \in E$.

1.3. Вузькі оператори. Вузькі оператори, як узагальнення поняття компактного оператора на функціональних просторах, формально введено і досліджено в роботі [10], але фактично ці оператори також були предметом досліджень до появи цієї статті. З сучасним станом теорії вузьких операторів можна ознайомитися в огляді [11], а також у монографії [12].

Якщо простір Кете E на безатомному просторі з мірою (Ω, Σ, μ) має абсолютно неперервну норму, то кожний компактний оператор з E у довільний F-простір є вузьким. Але на просторі L_∞, норма якого не є абсолютно неперервною, існують лінійні неперервні невузькі функціонали. З іншого боку, навіть на просторі L_p при $1 < p < \infty$ сума двох вузьких операторів не обов'язково повинна бути вузьким оператором. А отже, природно запитати: чи завжди сума вузького та вузького компактного операторів є вузьким оператором [12] (задача 5.6)? Позитивну відповідь на це питання надав В. В. Михайлюк у роботі [13]. У даній роботі ми доводимо аналогічний результат для поняття вузького оператора, що діє з векторної ґратки у банахів простір, яке було розроблено в роботі [14].

2. Вузькі ортогонально адитивні оператори та допоміжні леми. Нехай E — безатомна векторна ґратка, X — банахів простір. Зауважимо, що запис $e = e_1 \sqcup e_2$ для елементів E означає, що e подано у вигляді суми своїх диз'юнктних фрагментів e_1 та e_2. Згідно з [15], ортогонально адитивний оператор $T\colon E \to X$ називається *вузьким*, якщо довільний елемент $e \in E$ для довільного числа $\varepsilon > 0$ допускає розбиття на диз'юнктні фрагменти $e = e_1 \sqcup e_2$, для якого $\|T(e_1) - T(e_2)\| < \varepsilon$.

Нехай E — векторна ґратка та $e \in E$. Позначимо через $\mathfrak{F}_e$ множину всіх фрагментів елемента e. Згідно з теоремою 3.15 [1], якщо $e \geq 0$, то $\mathfrak{F}_e$ — булева алгебра відносно ґраткових операцій $\vee$ та $\wedge$, нуля та одиниці e, а ґратковий порядок $\leq$ збігається з латеральним порядком $\sqsubseteq$ на $\mathfrak{F}_e$. Більш того, якщо E — порядково повна векторна ґратка, то $\mathfrak{F}_e$ також є порядково повною.

Лема 2.1. *Нехай E — векторна ґратка, $0 < e \in E$. Для довільних $x, y \in \mathfrak{F}_e$ маємо*

$$x = x \wedge y \sqcup (x - x \wedge y).$$

Доведення. Оскільки $x \wedge y \leq x$ та ґратковий порядок на $\mathfrak{F}_e$ збігається з латеральним, то $x \wedge y \sqsubseteq x$, а отже, $x \wedge y \perp x - x \wedge y$.

Лему 2.1 доведено.

Будемо говорити, що підмножина $D \subseteq \mathfrak{F}_e$ є *латерально щільною* в $\mathfrak{F}_e$, якщо для довільного $x \in \mathfrak{F}_e$, $x \neq 0$, існує $d \in D$ такий, що $0 \neq d \sqsubseteq x$. Векторну ґратку E називатимемо *латерально сепарабельною*, якщо для довільного $e \in E$ існує не більш ніж зліченна латерально щільна в $\mathfrak{F}_e$ підмножина $D \subseteq \mathfrak{F}_e$. Послідовність $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ елементів векторної ґратки E називається *диз'юнктним деревом* на елементі $e \in E$, якщо $e_1 = e$ та $e_n = e_{2n} \sqcup e_{2n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що в цьому випадку всі e_n є фрагментами e. Крім того, для кожного $k = 1, 2, \ldots$ маємо $e = e_{2^k} \sqcup e_{2^k+1} \sqcup \ldots \sqcup e_{2^k+2^k-1}$, а також для для довільних індексів $n \geq 2^{k+1}$ існує єдиний індекс $\ell \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ такий, що $e_n \sqsubseteq e_{2^k+\ell}$.

Лема 2.2. *Нехай E — векторна ґратка та $x, y \in E$. Відношення $x \sqsubseteq y$ має місце тоді і лише тоді, коли $x^+ \sqsubseteq y^+$ та $x^- \sqsubseteq y^-$.*

Доведення. Нехай $x \sqsubseteq y$, тобто $y = x \sqcup (y - x)$. Тоді $y^+ = x^+ \sqcup (y - x)^+$, звідки отримуємо $x^+ \leq y^+$ та $(y - x)^+ = y^+ - x^+$. Отже, $y^+ = x^+ \sqcup (y^+ - x^+)$, тобто $x^+ \sqsubseteq y^+$. Аналогічно, $x^- \leq y^-$ та $x^- \sqsubseteq y^-$.

Нехай $x^+ \sqsubseteq y^+$ та $x^- \sqsubseteq y^-$. Тоді з першого відношення випливає, що $x^+ \leq y^+$. Тому $0 \leq x^+ \wedge y^- \leq y^+ \wedge y^- = 0$, а отже, $x^+ \perp y^-$. Оскільки, більш того, $x^+ \perp (y^+ - x^+)$ та $x^+ \perp x^-$, то $x^+ \perp (y^+ - x^+ - y^- + x^-)$, тобто $x^+ \perp (y - x)$. Аналогічно, $x^- \perp (y - x)$, а тому $x \perp (y - x)$.

Лему 2.2 доведено.

Лема 2.3. *Нехай E — безатомна порядково повна латерально сепарабельна векторна ґратка. Тоді для довільного $e \in E$ існує таке диз'юнктне дерево $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ на e, що для довільної послідовності номерів $m_1 < m_2 < \ldots$ та довільної послідовності $f_n \sqsubseteq e_{m_n}$ існує підпослідовність $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, яка латерально прямує до нуля.*

Доведення достатньо провести для довільного $e \geq 0$. Дійсно, в загальному випадку запишемо $e = e^+ - e^-$ і скористаємося доведеним випадком, окремо побудувавши диз'юнктні дерева $(e'_n)_{n=1}^{\infty}$ на e^+ та $(e''_n)_{n=1}^{\infty}$ на e^- з потрібними властивостями. Покладемо $e_n = e'_n - e''_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді для довільної послідовності номерів $m_1 < m_2 < \ldots$ та довільної послідовності $f_n \sqsubseteq e_{m_n}$, згідно з лемою 2.2 , матимемо $f_n^+ \sqsubseteq e'_{m_n}$ та $f_n^- \sqsubseteq e''_{m_n}$. Виберемо спочатку порядково збіжну до нуля підпослідовність $(f_{n_k}^+)_{k=1}^{\infty}$, а потім для послідовності номерів $m_{n_1} < m_{n_2} < \ldots$ та послідовності $f_{n_k}^- \sqsubseteq e''_{m_{n_k}}$ порядково збіжну до нуля підпослідовність $(f_{n_{k_j}}^-)_{j=1}^{\infty}$. Нарешті $f_{n_{k_j}} = f_{n_{k_j}}^+ - f_{n_{k_j}}^- \xrightarrow{\mathrm{o}} 0$, а отже, $f_{n_{k_j}} = f_{n_{k_j}}^+ - f_{n_{k_j}}^- \xrightarrow{\mathrm{lat}} 0$, оскільки, згідно з лемою 2.2, $f_{n_{k_j}} \in \mathfrak{F}_e$.

Отже, нехай $e \in E^+$ та $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ — латерально щільна в $\mathfrak{F}_e$ послідовність. Шукане дерево задамо рекурентно:

$$e_1 = e, \qquad e_{2n} = e_n \wedge d_n, \qquad e_{2n+1} = e_n - e_n \wedge d_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Згідно з лемою 2.1, $e_n = e_{2n} \sqcup e_{2n+1}$, а отже, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ — диз'юнктне дерево на E.

Нехай задано послідовність номерів $m_1 < m_2 < \ldots$ та послідовність $f_n \sqsubseteq e_{m_n}$. Покажемо, що існує така послідовність $\ell_k \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$, $k = 1, 2, \ldots$, що

$$e_{2^{k+1}+\ell_{k+1}} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}, \tag{1}$$

а також множина $\{n \in \mathbb{N} \colon f_n \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}\}$ є нескінченною для всіх $k \in \mathbb{N}$. При $k = 1$ маємо $e = e_2 \sqcup e_3$. Якщо $n \geq 2$, то або $f_n \sqsubseteq e_{m_n} \sqsubseteq e_2$, або $f_n \sqsubseteq e_{m_n} \sqsubseteq e_3$. Отже, принаймні одна з множин $\{n \in \mathbb{N} \colon f_n \sqsubseteq e_{2^1+\ell}\}$, $\ell = 0, 1$, є нескінченною. Позначимо відповідний індекс через

$\ell_1 \in \{0,1\}$. При $k=2$ маємо $e = e_4 \sqcup e_5 \sqcup e_6 \sqcup e_7$. Тоді кожний елемент f_n при $n \geq 8$, як і e_n, є фрагментом одного з елементів e_4, e_5, e_6, e_7. Отже, принаймні одна з множин $\{n \in \mathbb{N} \colon f_n \sqsubseteq e_{2^2+\ell}\}$, $\ell = 0, 12, 3$, є нескінченною. Позначимо відповідний індекс через $\ell_2 \in \{0,1,2,3\}$. Продовжуючи процес побудови очевидним чином, отримуємо шукану послідовність.

Використовуючи нескінченність кожної з множин $\{n \in \mathbb{N} \colon f_n \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}\}$, виберемо підпослідовність $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ так, щоб $f_{n_k} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$, і доведемо, що $f_{n_k} \xrightarrow{\text{o}} 0$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ покладемо

$$u_k = \sup_{j \geq k} f_{n_j}.$$

Супремум існує, адже E — порядково повна векторна ґратка, а множина обмежена зверху елементом e (нагадаємо, що ґратковий та латеральний порядок збігаються на $\mathfrak{F}_e$, а отже, супремум в означенні u_k можна брати як звичайний, так і латеральний). Тоді $0 \leq f_{n_k} \leq u_k \downarrow$. Залишилося довести, що $\inf_k u_k = 0$. Нехай, навпаки, існує такий $z \in \mathfrak{F}_e$, що $0 \neq z \sqsubseteq u_k$ для всіх k. Оскільки $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ — латерально щільна в $\mathfrak{F}_e$ послідовність, то існує такий номер $m \in \mathbb{N}$, що $d_m \sqsubseteq z$. Тоді

$$e_{2m} = e_m \wedge d_m \sqsubseteq d_m \sqsubseteq z \sqsubseteq u_k \quad \text{для всіх} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

З (1) випливає, що при $j \geq k$ має місце $f_{n_j} \sqsubseteq e_{2^j+\ell_j} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$, а отже, $u_k \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$. Враховуючи (2), отримуємо $e_{4m} \sqcup e_{4m+1} = e_{2m} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Виберемо $k \in \mathbb{N}$ так, щоб $2^k \leq 4m < 2^{k+1}$, а потім виберемо $\ell \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ так, щоб $4m = 2^k + \ell$. Тоді $4m + 1 = = 2^k + \ell + 1$, причому з парності $4m$ випливає, що $\ell \leq 2k - 2$, а отже, $\ell + 1 \leq 2^k - 1$. З умов $e_{2^k+\ell} = e_{4m} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$ випливає, що $\ell = \ell_k$, а з умов $e_{2^k+\ell+1} = e_{4m+1} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$ — що $\ell + 1 = \ell_k$. Отримали суперечність, яка доводить, що $f_{n_k} \xrightarrow{\text{o}} 0$. Оскільки при цьому $f_{n_k} \in \mathfrak{F}_e$ при всіх $k \in \mathbb{N}$, то $f_{n_k} \xrightarrow{\text{lat}} 0$.

Лему 2.3 доведено.

Лема 2.4. *Нехай E — безатомна порядково повна векторна ґратка, X — нормований простір, $T \colon E \to X$ — скінченновимірний латерально-нормовано неперервний ортогонально адитивний оператор. Тоді для довільного $e \in E$ існує таке диз'юнктне дерево $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ на e, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що для довільного $\ell \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ та довільного $f \sqsubseteq e_{2^k+\ell}$ маємо $\|T(f)\| < \varepsilon$.*

Доведення. Зафіксуємо довільний $e \in E$ та виберемо, згідно з лемою 2.3, таке диз'юнктне дерево $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ на e, що для довільної послідовності номерів $m_1 < m_2 < \ldots$ та довільної послідовності $f_n \sqsubseteq e_{m_n}$ існує підпослідовність $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, яка латерально прямує до нуля. Доведемо, що дане дерево є шуканим. Нехай, навпаки, для даного $\delta > 0$ і кожного $n \in \mathbb{N}$ існують такі $\ell_n \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ та фрагмент $f_n \sqsubseteq e_{2^n+\ell_n}$, що $\|T(f_n)\| \geq \delta$. Вибираючи латерально збіжну до нуля підпослідовність $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, отримуємо суперечність з латерально-нормованою неперервністю в нулі, адже ортогонально адитивний оператор нуль переводить в нуль.

Лему 2.4 доведено.

Наступна лема формально випливає з леми про заокруглення коефіцієнтів [16, с. 14] при $\dim X = 1$. Крім того, дану лему можна легко довести індукцією по n.

Лема 2.5. *Нехай $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, причому $|a_k| < \varepsilon$ для всіх $k = 1, \ldots, n$. Тоді існує таке розбиття $\{1, \ldots, n\} = I \sqcup J$, що*

$$\left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} a_j \right| < \varepsilon.$$

3. Основний результат.

Теорема 3.1. *Нехай E — безатомна порядково повна векторна ґратка, X — нормований простір, $S,T\colon E\to X$ — ортогонально адитивні оператори. Якщо S — вузький, а T — скінченновимірний латерально-нормовано неперервний оператор, то сума $S+T$ є вузьким оператором.*

Доведення. Спочатку покажемо, що досить розглянути випадок, коли T — одновимірний оператор. При цьому T запишемо у вигляді скінченної суми одновимірних операторів з аналогічними властивостями. Дійсно, позначимо $X_1=T(E)$ та $n=\dim X_1$. Виберемо лінійно незалежну систему $x_1,\ldots,x_n\in X_1$, а також, використавши теорему Гана – Банаха, функціонали $f_1,\ldots,f_n\in X^*$ так, щоб $f_i(x_j)=\delta_{i,j}$ при всіх $i,j\le n$. Таким чином, формулою

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,x_i,\qquad \text{де}\quad x\in X,$$

задається лінійний неперервний проектор з X на X_1. Зокрема,

$$T(e)=P\big(T(e)\big)=\sum_{i=1}^{n} f_i\big(T(e)\big)\,x_i$$

для всіх $e\in E$. Оскільки композиція ортогонально адитивного оператора на лінійний є, очевидно, ортогонально адитивним оператором, то $f_i\circ T$ є таким. Аналогічно, композиція латерально-нормовано неперервного оператора на неперервний є латерально-нормовано неперервним оператором, а отже, $f_i\circ T$ є таким для всіх $i=1,\ldots,n$. Таким чином, T є скінченною сумою латерально-нормовано неперервних ортогонально адитивних одновимірних операторів. Якщо довести теорему за припущення одновимірності T, то загальне твердження теореми випливатиме з принципу математичної індукції.

Отже, нехай T — одновимірний оператор, $x\in X$ — такий елемент та $\varphi\colon E\to\mathbb{R}$ — таке відображення, що $\|x\|=1$, $T(e)=\varphi(e)\,x$ для всіх $e\in E$. Безпосередньо отримуємо, що φ — латерально-нормовано неперервний ортогонально адитивний оператор.

Доведемо вузькість суми $S+T$. Зафіксуємо довільно $e\in E$ та $\varepsilon>0$. Виберемо, згідно з лемою 2.4, диз'юнктне дерево $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ на e та $k\in\mathbb{N}$ такі, що для довільного $\ell\in\{0,\ldots,2^k-1\}$ та довільного $f\sqsubseteq e_{2^k+\ell}$ маємо $\|T(f)\|<\varepsilon/2$, тобто $|\varphi(f)|<\varepsilon/2$. Виберемо, згідно з лемою 2.5, розбиття $\{0,\ldots,2^k-1\}=I\sqcup J$ таке, що

$$\left|\sum_{i\in I}\varphi(e_{2^k+i})-\sum_{j\in J}\varphi(e_{2^k+j})\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\|(S+T)(e')-(S+T)(e'')\|\le\|S(e')-S(e'')\|+\|T(e')-T(e'')\|=$$

$$=\left\|\sum_{i\in I}S(e_{2^k+i})-\sum_{j\in J}S(e_{2^k+j})\right\|+\left|\sum_{i\in I}\varphi(e_{2^k+i})-\sum_{j\in J}\varphi(e_{2^k+j})\right|<$$

$$<\sum_{i\in I}\|S(e_{2^k+i})\|+\sum_{j\in J}\|S(e_{2^k+j})\|+\frac{\varepsilon}{2}=\sum_{\ell=0}^{2^k-1}\|S(e_{2^k+\ell})\|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Теорему 3.1 доведено.

Зауважимо, що при доведенні як леми 2.4, так і теореми 3.1 ми використовували латерально-нормовану неперервність оператора T лише в нулі. Але, як показано в [3], для ортогонально адитивного оператора це рівносильно латерально-нормованій неперервності в усіх точках.

Автор висловлює подяку професору Попову М. М. за постановку задач та численні корисні зауваження.

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators. – Dordrecht: Springer, 2006. – 367 p.
2. *Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M.* Laterally ordered sets and orthogonally additive operators. – 2015. – Preprint.
3. *Gumenchuk A. I.* Lateral continuity and orthogonally additive operators // Carpath. Math. Publ. – 2015.
4. *Mazón J. M., Segura de León S.* Order bounded ortogonally additive operators // Rev. roum. math. pures et appl. – 1990. – **35**, № 4. – P. 329 – 353.
5. *Mazón J. M., Segura de León S.* Uryson operators // Rev. roum. math. pures et appl. – 1990. – **35**, № 5. – P. 431 – 449.
6. *Kusraev A. G., Pliev M. A.* Orthogonally additive operators on lattice-normed spaces // Vladikavkaz Math. J. – 1999. – № 3. – P. 33 – 43.
7. *Kusraev A. G., Pliev M. A.* Weak integral representation of the dominated orthogonally additive operators // Vladikavkaz Math. J. – 1990. – № 4. – P. 22 – 39.
8. *Pliev M.* Uryson operators on the spaces with mixed norm // Vladikavkaz Math. J. – 2007. – № 3. – P. 47 – 57.
9. *Gumenchuk A. I., Pliev M. A, Popov M. M.* Extensions of orthogonally additive operators // Math. Stud. – 2014. – **41**, № 2. – P. 214 – 219.
10. *Plichko A. M., Popov M. M.* Symmetric function spaces on atomless probability spaces // Diss. Math. – 1990. – **306**. – P. 1 – 85.
11. *Popov M. M.* Narrow operators (a survey) // Banach Center Publ. – 2011. – **92**. – P. 299 – 326.
12. *Popov M., Randrianantoanina B.* Narrow operators on function spaces and vector lattices. – Berlin; Boston: De Gruyter, 2013. – 319 p.
13. *Mykhaylyuk V.* On the sum of a compact and a narrow operators // J. Funct. Anal. – 2014. – **266**. – P. 5912 – 5920.
14. *Maslyuchenko O. V., Mykhaylyuk V. V., Popov M. M.* A lattice approach to narrow operators // Positivity. – 2009. – **13**. – P. 459 – 495.
15. *Pliev M. A., Popov M. M.* Narrow orthogonally additive operators // Positivity. – 2014. – **18**. – P. 641 – 667.
16. *Kadets V. M., Kadets M. I.* Rearrangements of series in Banach spaces // Transl. Math. Monogr. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1991. – **86**. – 189 p.

Одержано 25.01.15