УДК 513.83; 517.5

Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБОБЩЕННО ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И ЗАДАЧА О ТЕНИ

The problem of shadow is solved. It is equivalent to the problem of finding conditions for a point to belong to a generalized convex hull of a family of compact sets.

Отримано повний розв'язок проблеми про тінь, що еквівалентно знаходженню умов належності точки узагальнено опуклій оболонці сім'ї компактних множин.

Основная цель работы — решение задачи о тени, которую можно рассматривать как нахождение условий, обеспечивающих принадлежность точки обобщенно выпуклой оболочке некоторого семейства множеств.

Определение 1. *Скажем, что множество* $E \subset \mathbb{R}^n$ m*-выпукло относительно точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, *если найдется такая* m*-мерная плоскость* L, *что* $x \in L$ *и* $L \bigcap E = \varnothing$.

Определение 2. *Скажем, что множество* $E \subset \mathbb{R}^n$ m*-выпукло, если оно* m*-выпукло относительно каждой точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Легко убедиться, что оба определения удовлетворяют известной аксиоме выпуклости: пересечение каждого подсемейства таких множеств тоже удовлетворяет определению. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ мы можем рассматривать минимальное m-выпуклое множество, содержащее E, и называть его m-оболочкой множества E.

Как частный случай принадлежности точки 1-оболочке объединения некоторого набора шаров можно привести следующую задачу о тени, рассмотренную Г. Худайбергановым [1 – 3].

Задача (о тени). Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых шаров с центрами на сфере S^{n-1} и радиуса, меньше радиуса сферы, достаточно, чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

Другими словами, эту задачу можно переформулировать так. Сколько замкнутых шаров радиуса, меньше радиуса сферы, с центрами на сфере (минимальное количество) обеспечит принадлежность центра сферы 1-оболочке семейства шаров?

Если в сферу вписать правильный n-мерный симплекс и разместить шары радиуса равного половине длины ребра симплекса в его вершинах, то очевидно, что эта система шаров создаст тень для центра сферы. Однако при этом мы нарушим одно условие — шары попарно касаются один другого. Пусть a — половина длины ребра правильного симплекса. Рассмотрим семейство из $(n+1)$-го шара радиуса $a+\varepsilon$, $a-\varepsilon/2$, $a-\varepsilon/2^2, \ldots$, $a-\varepsilon/2^n$ соответственно для достаточно малого числа ε. Разместим эти шары так, чтобы они попарно касались один другого, а их центры образовывали симплекс, мало отличающийся от правильного. Через центры этих шаров проходит единственная сфера, центр которой принадлежит 1-оболочке семейства шаров. Внутренности этого семейства шаров образуют семейство из $(n+1)$-го открытого шара, для которого центр сферы принадлежит 1-оболочке этого семейства. Если же исходные замкнутые шары немного уменьшить, то вследствие непрерывности очевидно, что $(n+1)$-го замкнутого шара достаточно для создания тени.

Лемма 1. *Если множество* $E = \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \subset \mathbb{R}^n$ *представляет собой объединение* $(n-1)$*-го выпуклого множества, то* E *— 1-выпуклое множество.*

Доказательство. Вследствие выпуклости каждого множества E для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ существует гиперплоскость L_i, содержащая эту точку, которая не пересекает множество E. Пересечение этих гиперплоскостей $L = \bigcap_{i=1}^{n-1} L_i$ содержит искомую прямую.

Из этой леммы следует, что произвольной совокупности $(n-1)$-го шаров для создания тени мало. Поэтому точное значение необходимого количества шаров — n или $n+1$.

Аналогично легко доказать следующее утверждение.

Следствие 1. *Если множество* $E = \bigcup_{i=1}^{m-1} E_i \subset \mathbb{R}^n$ *представляет собой объединение* $(m-1)$*-го выпуклого множества, где* $m < n$, *то* E *—* $(n-m)$*-выпуклое множество.*

Задача о тени была решена Г. Худайбергановым для $n = 2$ (показано, что двух шаров достаточно). Здесь же предложено решение при $n > 2$, которое оказалось ошибочным и , насколько известно авторам, точное значение количества шаров остается открытой пробл емой. Дальнейшие рассуждения позволят дать полный ответ на эту проблему.

Приведем здесь другое решение задачи о тени для $n = 2$, использующее непрерывность изменения прямых и дающее некоторые цифровые оценки. Исследуем 1-оболочку объединения двух шаров K_1, K_2 в случае $n = 2$. Для этой пары шаров есть касательная прямая l_1, которая разделяет шары, и касательная прямая l_2, для которой оба шара находятся в одной полуплоскости, задаваемой прямой. Мы рассмотрим предельный в некотором смысле случай, когда шары касаются один другого и, кроме того, прямая l_2 проходит через центр сферы S^1 (окружности). При этом прямая l_1 естественно проходит через точку касания шаров. Пусть для радиусов шаров выполняется неравенство $1 \ge r_1 \ge r_2$. Используя теорему Пифагора, легко показать, что точки касания шаров вырезают из прямой l_2 отрезок длиной $2\sqrt{r_1 r_2}$, а расстояние от центра окружности до прямой l_1 равно $(r_1 - r_2)/2$. Выясним, когда последнее расстояние можно сделать максимальным. Для этого положим $r_1 = 1$ и найдем значение r_2, использовав то, что теперь точка касания шара K_1 с прямой l_2 совпадает с центром окружности. Получим равенство

$$2\sqrt{r_2} = \sqrt{1 - r_2^2}.$$

Далее все сводится к квадратному уравнению

$$r_2^2 + 4r_2 - 1 = 0,$$

один из корней которого $r_2 = \sqrt{5} - 2$ показывает, что максимально возможное отклонение прямой l_1 от центра окружности равно $\left(3 - \sqrt{5}\right)/2$. Теперь понятно, почему мы выбрали прямую l_2 проходящей через центр окружности. Увеличение радиуса шара K_2 уменьшило бы искомое ра сстояние. Однако выбранные шары пока не удовлетворяют условию задачи о тени. Радиус большего шара равен 1, и шары касаются один другого. Но, использовав, как и выше, непрерывность изменения прямой, мы можем чуть уменьшить радиус большего шара и раздвинуть немного центры шаров, так что при этом прямая l_1 все еще не сможет пройти через центр окружности. При этом шары можно выбрать открытыми. Очевидно, что мы можем как угодно близко подойти к найденной константе $\left(3-\sqrt{5}\right)/2$. Отсюда следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Существуют два замкнутых* (*открытых*) *шара с центрами на единичной окружности и радиуса меньше* 1, *которые обеспечивают принадлежность центра окружности* 1-*оболочке семейства шаров*.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Следствие 2. *Существуют два замкнутых* (*открытых*) *шара с центрами на сфере* S^{n-1} *и радиуса меньше радиуса сферы*, *которые обеспечивают принадлежность центра сферы* $(n-1)$-*оболочке семейства шаров*.

Покажем, что в случае двумерной сферы трех шаров недостаточно. Точки пространства будем обозначать координатами (x, y, z). Не нарушая общности, предположим, что сфера с центром в начале координат имеет радиус 1 и трех открытых шаров достаточно для создания тени в центре сферы. Очевидно, что эти шары должны иметь разные радиусы, потому что при равенстве радиусов даже при касании шаров через точку касания двух шаров проходит двумерная плоскость, которая может пересечь только третий шар. Поэтому в этой плоскости через центр сферы, согласно геометрической форме теоремы Хана – Банаха [4], проходит прямая, не пересекающая ни одного шара. Предположим, что имеют место неравенства для радиусов шаров $1 \geq r_1 > r_2 > r_3$. Мы можем считать, что шары попарно касаются один другого, иначе мы могли бы их увеличить с тем же эффектом для тени. Расположим центр шара максимального радиуса в точке $(0, 0, 1)$. Проведем двумерную плоскость L через центры шаров B_1, B_2 и начало координат (рис. 1). Каждый из этих шаров порождает такой круговой конус с центром в начале координат, что произвольная прямая, лежащая внутри конуса, пересекает этот шар. Этот конус пересекает сферу по двум окружностям, которые можно задать парой параллельных плоскостей. Им в плоскости L соответствуют две прямые GB и CA. Полоса между этими плоскостями вырезает из сферы часть таких точек, что каждая прямая через центр сферы и такую точку не пересекает соответствующий шар. Аналогично для второго шара получим две прямые CG и AB в плоскости L.

Пересечение двух полос, соответствующих двум шарам, представляет собой цилиндр, в основании которого лежит параллелограмм $ABGC$. Этот цилиндр вырезает на сфере множество таких точек, что каждая прямая через центр сферы и такую точку не пересекает оба шара. Теперь очевидно, что радиус третьего шара, необходимого для создания тени, не может быть меньше половины диагонали BC этого параллелограмма. Прямая OF касается шара B_1 в точке M, поэтому из равенства треугольников OO_1M и OHF следует, что длина HF равна r_1. Отсюда получаем, что расстояние между прямыми GB и CA равно $|BD| = 2\sqrt{1-r_1^2}$. Поскольку шары B_1 и B_2 касаются, то $|O_1O_2| = r_1 + r_2$. Следовательно, $\angle O_1OO_2 = 2\arcsin((r_1 + r_2)/2)$. Отрезок OO_1 перпендикулярен к прямой GB, а отрезок OO_2 — к прямой AB. Отсюда находим стороны параллелограмма $ABGC$. Имеем

$$|AB| = 2\sqrt{1-r_1^2}\,/\sin(2\arcsin((r_1 + r_2)/2)).$$

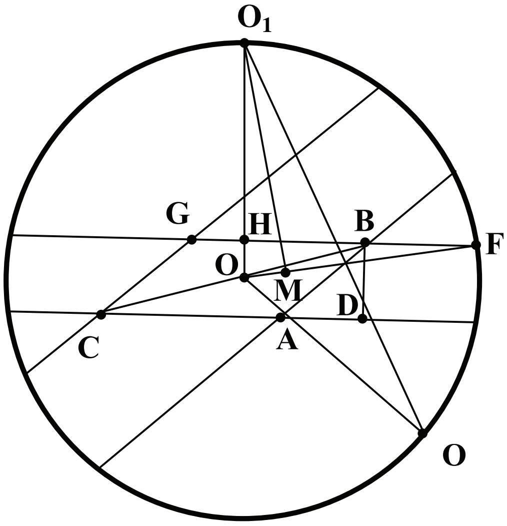

Рис. 1

Аналогично

$$|AC| = 2\sqrt{1-r_2^{\,2}}\,/\sin(2\arcsin((r_1+r_2)/2)).$$

Теперь из теоремы косинусов получаем

$$|OB| = \frac{\sqrt{2-r_1^{\,2}-r_2^{\,2}-2\sqrt{1-r_1^{\,2}}\sqrt{1-r_2^{\,2}}\cos\left(2\arcsin((r_1+r_2)/2)\right)}}{\sin\left(2\arcsin((r_1+r_2)/2)\right)}. \qquad (1)$$

Установим числовые оценки. Поскольку из вписанных в окружность треугольников максимальный периметр имеет правильный треугольник, сумма радиусов шаров не превышает полупериметр правильного треугольника, вписанного в единичную окружность,

$$r_1+r_2+r_3 \le 1{,}5\sqrt{3} \approx 2{,}598. \qquad (2)$$

Радиус шара B_2 не может быть меньше $\sqrt{2}/2$, иначе из-за неравенства $r_2 > r_3$ шары B_2 и B_3 не смогут обеспечить пересечение с ними произвольной прямой, проходящей через начало координат и лежащей в плоскости xOy, а шар B_1 с этой плоскостью не пересекается.

Используя программу Derive, из (1) получаем, что при радиусе $r_2 < 0{,}77$ радиус $r_3 > 0{,}77$. Следовательно, не выполнено неравенство $r_2 > r_3$. Если же $r_2 > 0{,}85$, то также с помощью программы Derive получаем неравенство

$$r_1+r_2+r_3 > 2{,}6,$$

что противоречит (2). Для суммы радиусов шаров r_1+r_2 имеем неравенства $1{,}54 < 2r_2 < < r_1+r_2 \le 1+r_2 < 1{,}85$.

Далее получим следующие оценки (рис. 2):

$$1{,}1858 \;\le\; |O_1K| \;=\; (r_1+r_2)^2/2 \le 1{,}7113,$$

$$0{,}9826 \;\ge\; |KO_2| \;=\; |OL| \;=\; (r_1+r_2)\sqrt{1-(r_1+r_2)^2/4} \;\ge\; 0{,}7029,$$

$$0{,}1858 \;\le\; |OK| \;=\; |O_1K|-1 \;=\; |LO_2| \;\le\; 0{,}7113,$$

$$0{,}4654 \;\le\; |NL| \;=\; \sqrt{|NO_2|^2-|LO_2|^2} \;=\; \sqrt{|r_2|^2-|LO_2|^2} \;\le\; 0{,}5216.$$

Отрезок $|NL|$ равен радиусу окружности, по которой шар B_2 пересекает плоскость xOy.

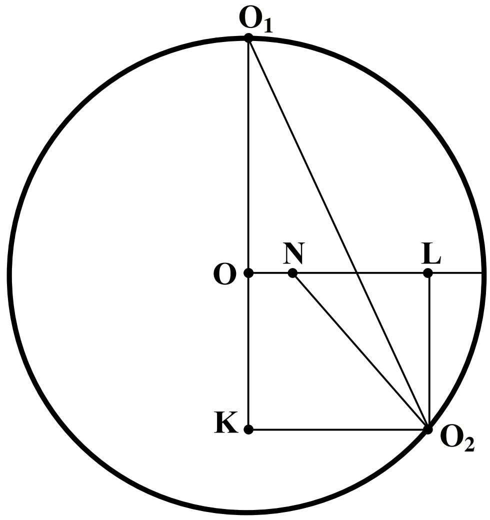

Рис. 2

Точка L — центр этой окружности. Отношение $|NL|/|OL|$ задает синус половины угла α, под которым видна эта окружность из начала координат. Для $\sin(\alpha/2)$ имеем оценку сверху $\sin(\alpha/2) = |NL|/|OL| \le 0{,}6621$, тогда $\arcsin(\alpha/2) \le \arcsin 0{,}6621 \le 0{,}7236$. Поэтому угол α не превышает 1,4472. Аналогичные рассуждения в силу неравенства для радиусов показывают, что окружность, по которой с плоскостью xOy пересекается шар B_3, также видна из начала координат под углом, не превышающим 1,4472. Эти две окружности суммарно закрывают угол, который не превышает 2,8945, что меньше развернутого угла размерности π. Поэтому в плоскости xOy существует прямая, проходящая через начало координат и не пересекающая ни один из трех шаров. Следовательно, для создания тени в центре сферы при $n = 3$ необходимо четыре шара. При $n > 3$ оценка получается применением математической индукции. Рассматриваем гиперплоскость через центр сферы, которая не пересекает один из шаров. Для создания тени в начале координат этой гиперплоскости, согласно предположению индукции, необходимо n шаров. Поэтому, прибавляя шар, который не пересекает выбранную гиперплоскость, получаем необходимость $(n+1)$-го шара. Получили следующее утверждение, полностью решающее проблему тени.

Теорема 2. *Для того чтобы центр* $(n-1)$*-сферы в* n*-мерном евклидовом пространстве при* $n > 2$ *принадлежал* 1*-оболочке семейства открытых* (*замкнутых*) *шаров радиуса, не* *превышающего (меньшего) радиус сферы и с центрами на сфере, необходимо и достаточно* $(n+1)$*-го шара.*

Рассмотрим более общие определения по отношению к предыдущим определениям.

Определение 3. *Скажем, что множество* $E \subset \mathbb{R}^n$ m*-полувыпукло относительно точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, *если найдется такая* m*-мерная полуплоскость* P, *что* $x \in P$ *и* $P \bigcap E = \varnothing$.

Определение 4. *Скажем, что множество* $E \subset \mathbb{R}^n$ m*-полувыпукло, если оно* m*-полувыпукло относительно каждой точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Легко убедиться, что и эти определения удовлетворяют аксиоме выпуклости, и мы можем строить m-полувыпуклые оболочки множеств согласно этим определениям.

Рассмотрим аналог задачи о тени для полувыпуклости. Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых (открытых) шаров с центрами на сфере S^{n-1} и радиуса, меньшего (не превышающего) радиуса сферы, достаточно, чтобы любой луч из центра сферы пересекал хотя бы один из этих шаров?

Задача проста в плоском случае $n=2$. Если мы впишем в окружность остроугольный треугольник с неравными сторонами $a>b>c$, а в его вершинах разместим три замкнутых круга радиусов $p-a$, $p-b$, $p-c$ соответственно, где $p=(a+b+c)/2$, то очевидно, что полувыпуклая оболочка объединения этих кругов состоит из кругов и внутренности треугольника. Если центр окружности не принадлежит объединению кругов, то такая конструкция обеспечит тень и в этой точке. Теперь, как и выше, вследствие непрерывности, если немного уменьшить радиусы кругов, то получим, что при $n=2$ три замкнутых (открытых) круга решают задачу. Исследуем соотношение сторон треугольника, которые обеспечивают решение. Из неравенств $p-a<p-b<p-c$ следует, что радиус описанной окружности должен превышать $p-c$. Не нарушая общности, будем считать, что сторона $c=1$ и выполняются неравенства $a>b>1$. Другие треугольники с нужным свойством получаются преобразованием подобия. Из формулы для радиуса описанной окружности, заменяя стороны треугольника переменными $x=a$, $y=b$, получаем, что координаты нужных сторон должны находиться внутри криволинейного треугольника, две стороны которого — прямые $x=y$, $y=1$, а третья — кривая, заданная неявным уравнением

$$x+y-1 = \frac{2xy}{\sqrt{(x+y+1)(-x+y+1)(x-y+1)(x+y-1)}}.$$

Построением графика в программе Derive убеждаемся, что множество таких точек не пусто. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Для того чтобы центр окружности* $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ *принадлежал* 1*-полувыпуклой оболочке семейства открытых (замкнутых) кругов радиуса, не превышающего (меньшего) радиус окружности, с центрами на этой окружности, необходимо и достаточно трех кругов.*

С увеличением размерности задача усложняется. Покажем сначала, что существуют семейства выпуклых множеств, 1-полувыпуклая оболочка которых совпадает с таким семейством.

Лемма 2. *Если множество* $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$, *где все множества* K_i *— выпуклые компакты, то* $H^k(K) = 0$, $k \geq n-1$ *при* $n > 1$ ($H^k(K)$ *— группы когомологий компакта* K [5]).

Доказательство проведем с помощью индукции. Как показано в [6], объединение двух выпуклых компактов не может быть носителем никакого коцикла в положительных размерностях. Следовательно, теорема справедлива при $n = 2$. Предположим, что она справедлива при $m = n-1$, и докажем ее при $m = n$. Применим точную когомологическую последовательность Майера – Вьеториса [5] для триады

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i, \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i, K_n \right).$$

Запишем три ее последовательных члена:

$$H^j\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (K_i \bigcap K_n \right) \to H^{j+1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \right) \to H^{j+1}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i \right) \oplus H^{j+1}(K_n).$$

Множества $(K_i \bigcap K_n)$ выпуклые. Поэтому в силу предположения индукции первый член последовательности равен нулю при $j \geq n-2$. То же следует и для обоих слагаемых третьего члена последовательности. Теперь в силу точности последовательности получаем утверждение леммы.

Теорема 4. *Каждое множество* $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ *в* $\mathbb{R}^n$, *где все множества* K_i *— выпуклые компакты, является* 1-*полувыпуклым*.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку x, не лежащую в K. Выберем сферу S^{n-1} с центром в точке x так, чтобы внутри шара, ограниченного этой сферой, точек K не было. Для каждого компакта K_i построим однополостный конус $\operatorname{con} K_i$ с вершиной в точке x. Пусть множества E_i заданы пересечениями $E_i = (\operatorname{con} K_i) \bigcap S^{n-1}$. Рассмотрим их выпуклые оболочки [7] $F_i = \operatorname{conv} E_i$. Каждое из построенных сейчас множеств выпукло и является подмножеством соответственного конуса. Объединение множеств F_i не может содержать всю сферу S^{n-1}, иначе оно было бы носителем ненулевого коцикла, что невозможно согласно предыдущей лемме. Следовательно, на сфере S^{n-1} найдется точка y, не принадлежащая объединению $\bigcup F_i$, и тогда луч, выходящий из точки x и проходящий через точку y, не пересекает ни одно из множеств K_i. В силу произвольности выбора точки x теорема доказана.

Замечание. Из множества $(n-1)$-мерных граней n-мерного симплекса легко составить множество, которое 1-полувыпуклым не будет.

Усложним задачу, наложив на множество дополнительные условия. Выясним, когда семейство шаров с центрами на фиксированной сфере обеспечит принадлежность центра сферы 1-полувыпуклой оболочке семейства.

Пусть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ — единичная сфера. Точки пространства будем обозначать координатами (x, y, z). Выберем два открытых шара единичного радиуса в точках $(0, 0, 1)$ и $(0, 0, -1)$.

Теперь лучи, которые не пересекают эти два шара, должны лежать в плоскости xOy. Открытый шар радиуса $\sqrt{2}-1$ в точке $(1, 0, 0)$ касается заданных двух шаров и виден из начала координат в плоскости xOy под углом α, синус половины которого равен $\sqrt{2}-1$. Следовательно, $\alpha/2 = \arcsin\left(\sqrt{2}-1\right) = 0{,}4271$, $\alpha = 0{,}8542$. Поскольку этот угол помещается 7,35 раз в развернутом угле 2π, заполним окружность в плоскости xOy четырьмя шарами радиуса $\sqrt{2}-1$ с центрами в точках $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ соответственно. После этого между ними вставим четыре шара радиуса $\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1$ с центрами в точках пересечения единичной окружности плоскости xOy с биссектрисами координатных углов. Эти шары касаются двух соседних из предыдущих четырех. В силу разности радиусов соседних шаров с центрами в плоскости xOy этот набор из 10 шаров обеспечит принадлежность центра сферы 1-полувыпуклой оболочке их объединения. Как и выше, немного уменьшая радиусы шаров, видим, что существует набор замкнутых десяти шаров с теми же свойствами. Получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Для того чтобы центр двумерной сферы в трехмерном евклидовом пространстве принадлежал* 1*-полувыпуклой оболочке семейства открытых* (*замкнутых*) *шаров радиуса*, *не превышающего* (*меньшего*) *радиус сферы*, *с центрами на сфере*, *достаточно десяти шаров*.

Вложением рассмотренного выше трехмерного пространства как линейного подпространства в $\mathbb{R}^n$ вместе с десятком шаров радиусов, выбранных при доказательстве теоремы 5, получаем следующую оценку для $(n-2)$-полувыпуклости.

***Следствие* 3.** *Для того чтобы центр* $(n-1)$*-мерной сферы в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$ *принадлежал* $(n-2)$*-полувыпуклой оболочке семейства открытых* (*замкнутых*) *шаров радиуса*, *не превышающего* (*меньшего*) *радиус сферы, с центрами на сфере, достаточно десяти шаров*.

К сожалению, предыдущие рассуждения не переносятся на более высокие размерности и не дают необходимых условий даже в трехмерном пространстве. Поэтому следующие вопросы остаются открытыми.

***Вопрос* 1.** Какое минимальное количество шаров в трехмерном евклидовом пространстве обеспечит принадлежность центра сферы их 1-полувыпуклой оболочке?

При размерностях выше трех неясно даже существование конечного необходимого множества шаров.

***Вопрос* 2.** Существует ли конечное количество шаров с перечисленными выше условиями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, которое обеспечит принадлежность центра сферы их 1-полувыпуклой оболочке?

Если расположить центры шаров на двух концентрических сферах, то, используя конструкцию для 1-выпуклости в $\mathbb{R}^n$, шары и радиус второй сферы получаем гомотетией относительно центра первой сферы. Коэффициент гомотетии выберем с отрицательным знаком, чтобы образ гомотетии не пересекался с исходным множеством. Очевидно, что центр сферы будет принадлежать 1-полувыпуклой оболочке шаров. Поэтому $2n+2$ шаров для этого достаточно.

1. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 264 с.
2. *Зелинский Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **92**. – 280 с.
3. *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров. – Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.82, № 1772-85 Деп.
4. *Шеффер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
5. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. – М.: Мир, 1971. – 680 с.
6. *Зелинский Ю. Б.* Теорема Хелли и смежные вопросы // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 125 – 128.
7. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. – М.: Наука, 1985. – 336 с.

Получено 19.11.14