К О Р О Т К І П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.53

Ю. Зайонц (Вища держ. проф. школа в Хелмі, Польща),
М. Є. Коренков, Ю. І. Харкевич (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк)

ПРО АСИМПТОТИКУ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ ВЕЙЄРШТРАССА

For Weierstrass functions $\sigma(z), \zeta(z)$, we present the asymptotic formulas equitable outside the efficiently constructed exceptional sets of discs that are much narrower than in the known asymptotic formulas.

Для функций Вейерштрасса $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ указаны асимптотические формулы, правильные вне исключительных множеств кругов, построенных эффективно, которые являются значительно более узкими, чем в известных асимптотических формулах.

Покажемо, що множини виняткових кругів, які будуються ефективно і зовні яких справджуються відомі асимптотичні формули для функцій Вейєрштрасса $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ [1], допускають значне звуження.

Функції $\sigma(z), \zeta(z)$ пов'язані між собою та із пе-функцією Вейєрштрасса $\wp(z)$ [1] рівностями $\zeta(z) = \sigma'(z)/\sigma(z)$, $\wp(z) = -\zeta'(z)$. Точки $\Omega_{mn} = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$, для функцій $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ є відповідно простими нулями та простими полюсами і вони є полюсами другого порядку для функції $\wp(z)$.

Не втрачаючи загальності подальших міркувань будемо вважати, що $\omega_1 = \dfrac{1}{2}$, $\omega_2 = \dfrac{\lambda}{2}e^{i\alpha}$, $0 < \lambda < +\infty$, $0 < \alpha < \pi$, тобто

$$\Omega_{mn} = m + n\lambda e^{i\alpha}, \qquad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Говорять, що система K кругів $K_j = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_j| < r_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, де $z_j \to \infty$, $j \to \infty$, має нульову μ-щільність, $1 \leq \mu \leq 2$, якщо $\sum_{|z_j| \leq r} r_j^{\mu} = o(r^{\mu})$, $r \to \infty$. Якщо попереднє співвідношення є правильним при $\mu = 1$, то говорять, що система кругів K має нульову лінійну щільність.

Асимптотика функції $\sigma(z)$ досліджувалась у роботах [2, 3].

Теорема 1. *Для функції Вейєрштрасса $\sigma(z)$ при умові* (1) *правильною є асимптотична формула*

$$\ln\left|\sigma(z)\right| = V(z) + O\Big(\varphi\big(|z|\big)\Big), \qquad z \to \infty, \quad z \in E, \tag{2}$$

де

$$V(z) = \frac{\pi|z|^2}{2\lambda\sin\alpha} + \mathrm{Re}\left[\left(\eta_1 - \frac{\pi}{2\lambda\sin\alpha}\right)z^2\right], \quad \eta_1 = \zeta\left(\frac{1}{2}\right), \tag{3}$$

$$E = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}} E_{mn}, \qquad E_{mn} = \Big\{z \in \mathbb{C} \colon |z - \Omega_{mn}| < \exp\Big(-\varphi\big(|\Omega_{mn}|\big)\Big)\Big\}, \tag{4}$$

$\varphi(t)$ — довільна додатна і зростаюча на $(0; +\infty)$ функція, така, що

$$\varphi(t) \to +\infty, \qquad \varphi(t) = o(t^2), \qquad \varphi(t+l) = O(\varphi(t)), \quad t \to +\infty, \tag{5}$$

l — довільна стала, $l > 0$.

Якщо вказана вище функція $\varphi(t)$ така, що $\varphi(t) \geq \alpha \ln t$, $1 < t < +\infty$, при $\alpha > 1$, то відповідна їй множина виняткових кругів E_{mn}, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, має нульову лінійну щільність.

Доведення. В роботі [3] при умові (1) показано подвійну періодичність (з основними періодами 1, $\lambda e^{i\alpha}$) функції $|\sigma(z)| \exp(-V(z))$, на основі чого (див. (12.6), (12.7)) отримано співвідношення

$$|\sigma(z)| \asymp \exp(V(z)), \quad z \in \Phi(d), \tag{6}$$

$$|\sigma(z)| \asymp |z - \Omega_{mn}| \exp(V(z)), \quad z \in K_d(\Omega_{mn}), \tag{7}$$

де

$$K_d(\Omega_{mn}) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - \Omega_{mn}| < d\}, \qquad \Phi(d) = \bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} K_d(\Omega_{mn}) \tag{8}$$

і $d = \mathrm{const} > 0$.

Позначимо $E'_{mn} = \Big\{z \in \mathbb{C} \colon \exp\Big(-\varphi\big(|\Omega_{mn}|\big)\Big) \leq |z - \Omega_{mn}| \leq d\Big\}$, $E' = \bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} E'_{mn}$, де $\varphi(t)$ — довільна функція, що задовольняє умови (5). Із співвідношень (6), (7) та подвійної періодичності функції $|\sigma(z)| \exp(-V(z))$ випливає, що

$$\ln |\sigma(z)| = V(z) + O(\varphi(|z|)), \qquad z \to \infty, \quad z \in E'. \tag{9}$$

Позначаючи $E = \Phi(d) \cup E'$, враховуючи (9) і те, що

$$\ln |\sigma(z)| = V(z) + O(1), \quad z \in \Phi(d),$$

як це випливає із (6), отримуємо

$$\ln |\sigma(z)| = V(z) + O(\varphi(|z|)), \qquad z \to \infty, \quad z \in E.$$

Отже, формула (2) є правильною.

Оскільки функція $\tilde{\varphi}(t) = \alpha \ln t$, $1 < t < +\infty$, де $\alpha > 1$, задовольняє умови (5), то формула вигляду (2) є правильною зовні системи кругів $\tilde{E}_{mn} = \Big\{z \in \mathbb{C} \colon |z - \Omega_{mn}| < |\Omega_{mn}|^{-\alpha}\Big\}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

На основі відомої формули для $n(r; \infty; \wp)$ (див. [1, с. 420]) маємо

$$\nu(r) = Pr^2 + O(r), \qquad r \to \infty, \quad P = \mathrm{const} > 0, \tag{10}$$

де $\nu(r)$ — кількість нулів функції $\sigma(z)$ у крузі $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq r\}$. Інтегруючи частинами і враховуючи (10), при $\alpha > 1$ отримуємо

$$\frac{1}{r} \sum_{0 < |\Omega_{mn}| \leq r} |\Omega_{mn}|^{-\alpha} = \frac{1}{r} \int_b^r \frac{d\nu(t)}{t^\alpha} = \frac{\nu(r)}{r^{\alpha+1}} + \frac{\alpha}{r} \int_b^r \frac{\nu(t)}{t^{\alpha+1}} dt + o(1) = o(1), \quad r \to \infty,$$

де $b = \mathrm{const} > 0$. Отже, сукупність виняткових кругів $\tilde{E}_{mn}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, при $\alpha > 1$ має нульову лініійну щільність. Оскільки при довільній функції $\varphi(t)$, яка задовольняє умови (5) і $\varphi(t) \geq \tilde{\varphi}(t) = \alpha \ln t$, $1 < t < \infty$, $\alpha > 1$, відповідні їй круги E_{mn}, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, мають радіуси $\exp(-\varphi(|\Omega_{mn}|))$, що не перевищують $|\Omega_{mn}|^{-\alpha}$, то сукупність кругів E_{mn}, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, при вказаних вище умовах також має нульову лінійну щільність.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Для функції Вейєрштрасса* $\zeta(z)$ *при умові* (1) *правильною є асимптотична формула*

$$\zeta(z) = w(z) + O(\psi(|z|)), \qquad z \to \infty, \quad z \in F, \tag{11}$$

де

$$w(z) = 2\eta_1 z - \frac{2\pi i}{\lambda \sin\alpha}\mathrm{Im} z, \quad \eta_1 = \zeta\left(\frac{1}{2}\right),$$
$$F = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}} F_{mn}, \qquad F_{mn} = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z - \Omega_{mn}| < \frac{1}{\psi(|\Omega_{mn}|)} \right\}, \tag{12}$$

$\psi(t)$ *— довільна додатна і зростаюча на* $(0; +\infty)$ *функція, така, що*

$$\psi(t) \to +\infty, \qquad \psi(t) = o(t), \qquad \psi(t + l) = O(\psi(t)), \quad t \to +\infty, \tag{13}$$

і l *— довільна стала,* $l > 0$.

Якщо вказана вище функція $\psi(t)$ *така, що* $\psi(t) \geq t^{\beta}$, $0 < t < +\infty$, *де* $0 < \beta < 1$, *то множина відповідних їй виняткових кругів* F_{mn}, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, *при довільному* μ, $\dfrac{2}{1+\beta} < \mu \leq$ ≤ 2, *має нульову* μ*-щільність.*

Доведення. Неважко переконатись у тому, що при умові (1) функція

$$\tilde{w}(z) = \zeta(z) - w(z) = \zeta(z) - 2\eta_1(z) + \frac{2\pi i}{\lambda \sin\alpha}\mathrm{Im} z$$

є подвійною періодичною з основними періодами 1, $\lambda e^{i\alpha}$. На основі цього в роботі [3] показано, що

$$\zeta(z) = w(z) + O(1), \quad z \in \Phi(d), \tag{14}$$

де $\Phi(d)$ — множина, яка задається рівностями (8). Отже,

$$|\tilde{w}(z)| \leq L(d), \quad z \in \Phi(d), \tag{15}$$

де $L(d)$ — стала, залежна лише від d, $L(d) > 0$. На основі (15) можна переконатись у тому, що

$$|\tilde{w}(z)| \leq 2\left(L(d) + \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{|z - \Omega_{mn}|}, \qquad z \in K_d(\Omega_{mn}), \quad z \neq \Omega_{mn}. \tag{16}$$

Позначаючи $K'_{mn} = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \dfrac{1}{\psi(|\Omega_{mn}|)} \leq |z - \Omega_{mn}| \leq d \right\}$, $F' := \bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}} K'_{mn}$, де $\psi(t)$ — довільна функція, яка задовольняє умови (13), і враховуючи (16), отримуємо

$$\tilde{w}(z) = O\left(\psi\left(|z|\right)\right), \qquad z \to \infty, \quad z \in F'. \tag{17}$$

На основі (14), (17) маємо

$$\tilde{w}(z) = O(\psi(|z|)), \qquad z \to \infty, \quad z \in F,$$

де $F = \Phi(d) \cup F'$. Отже, справедливою є асимптотична формула (11).

Оскільки функція $\tilde{\psi}(t) = t^{\beta}$, $0 < t < +\infty$, $0 < \beta < 1$, задовольняє умови (13), то формула вигляду (11) є правильною зовні системи кругів $\tilde{F}_{mn} = \left\{z \in \mathbb{C} \colon |z - \Omega_{mn}| < |\Omega_{mn}|^{-\beta}\right\}$, $m \in \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Множина полюсів функції $\zeta(z)$ збігається з множиною нулів функції $\sigma(z)$. Тому знову, використовуючи співвідношення (10) та інтегруючи частинами, при фіксованому β, $0 < \beta < 1$, і μ такому, що $\dfrac{2}{1+\beta} < \mu \leq 2$, отримуємо

$$\frac{1}{r^{\mu}} \sum_{0<|\Omega_{mn}|\leq r} \left(|\Omega_{mn}|^{-\beta}\right)^{\mu} = \frac{1}{r^{\mu}} \int\limits_{b}^{r} t^{-\beta\mu} d\nu(t) =$$

$$= \frac{\nu(r)}{r^{\mu(\beta+1)}} + \frac{\mu\beta}{r^{\mu}} \int\limits_{b}^{r} \frac{\nu(t)dt}{t^{\beta\mu+1}} + o(1) = o(1), \quad r \to \infty,$$

де $b = \mathrm{const} > 0$. Отже, сукупність виняткових кругів $\tilde{F}_{mn}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ при вказаних вище умовах має нульову μ-щільність. При довільній функції $\psi(t)$, яка задовольняє умови (13) і така, що $\psi(t) \geq \tilde{\psi}(t) = t^{\beta}$, $0 < t < +\infty$, де $0 < \beta < 1$, круги F_{mn} мають радіуси, що не перевищують $|\Omega_{mn}|^{-\beta}$. Тому згідно з вже доведеним сукупність таких кругів при умові $\dfrac{2}{1+\beta} < \mu \leq 2$ має також нульову μ-щільність.

Теорему 2 доведено.

1. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2 т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.
2. *Коренков Н. Е.* О распределении значений сигма-функции Вейерштрасса // Мат. сб. – 1976. – № 1. — С. 240 – 242.
3. *Любарский Ю. И., Содин М. Л.* Аналоги функций типа синуса для выпуклых областей. – Харьков, 1986. – 41 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-тех. ин-т низких температур).
4. *Гольдберг А. А., Коренков Н. Е.* Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста // Сиб. мат. журн. – 1980. – **21**, № 3. – С. 63 – 79.
5. *Гольдберг А. А., Коренков Н. Е.* Об асимптотике логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 1. – С. 25 – 32.

Одержано 15.01.13,
після доопрацювання — 29.04.14