УДК 519.21

П. П. Чернега (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРЕМА ЛЕВИ ДЛЯ ПОТОКА АРРАТЬЯ

We study the total number of down crossings of a strip by the trajectories of the continuum system of particles from the Arratia flow. We prove the convergence of the product of the strip width and the total number of down crossings of the strip to the total local time for the Arratia flow. This statement is an analog of the well-known Levy's down-crossing theorem for a Wiener process.

Досліджується сумарне число перетинів зверху вниз смуги траєкторіями континуальної системи частинок потоку Арратья. Доведено збіжність добутку ширини смуги і сумарного числа перетинів зверху вниз цієї смуги до сумарного локального часу для потоку Арратья. Це твердження є аналогом відомої теореми Леві про число перетинів смуги траєкторіями вінерівського процесу.

1. Введение. В данной работе доказывается аналог известной теоремы Леви о числе пересечений сверху вниз полосы для потока Арратья. Согласно этой теореме [1, с. 456], для стандартного винеровского процесса w имеет место соотношение

$$\mathrm{P}\Big\{\lim_{\delta\to 0}\delta\nu^{|w|,\delta}_{[0,t]} = L^w_{0,t}\Big\} = 1, \tag{1.1}$$

в котором $\nu^{|w|,\delta}_{[0,t]}$ обозначает число пересечений сверху вниз полосы $[0,\delta]$ отраженным винеровским процессом $|w|$, $L^w_{0,t}$ — локальное время, проведенное процессом w в точке нуль до момента времени t. Другими словами, произведение $\delta\nu^{|w|,\delta}[0,t]$ можно рассматривать как аппроксимацию локального времени.

В данной работе мы исследуем возможность формулировки аналога вышеуказанного утверждения для стохастических потоков. Поскольку поведение одноточечных процессов в стохастическом потоке в большинстве случаев достаточно похоже на поведение винеровского процесса, представляет интерес вопрос о возможности построения *суммарного числа пересечений сверху вниз* полосы $[0;\delta]$ траекториями всех одноточечных процессов потока. Если удастся корректно определить это число, то каково его предельное поведение при $\delta\to 0$? В данной работе мы дадим ответы на эти вопросы для одного из стохастических потоков на вещественной прямой $\mathbb{R}$ — потока Арратья.

Приведем основные определения.

Определение 1.1. *Потоком Арратья* [3, с. 59; 4, с. 1282; 5, с. 183, 184; 6, с. 527] *будем называть семейство мартингалов* $x = \big\{x(u,t),\ u\in\mathbb{R},\ t\in[0;1]\big\}$ *относительно общей фильтрации*, *таких*, *что*:

1) $x(u,0) = u,\ u\in\mathbb{R}$,
2) $\dfrac{d}{dt}\langle x(u,\cdot), x(v,\cdot)\rangle_t = 1_{\{x(u,t)=x(v,t)\}}$,
3) $x(u,t)\le x(v,t)$ *для всех* $u\le v$.

В работе [7, с. 12] была определена случайная величина, называемая *суммарным локальным временем* в нуле для потока Арратья. Идея определения состояла в следующем. Рассматривалась последовательность измельчающихся двоично-рациональных разбиений вещественной прямой вида $\Delta_m = \left\{\dfrac{k}{2^m},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, $m\in\mathbb{N}$, и для фиксированного разбиения суммировались локальные времена, проведенные в нуле каждым из процессов $x\left(\dfrac{k}{2^m},\cdot\right)$ до момента первой встречи с предыдущим процессом. Таким образом была получена последовательность случайных величин S_m, возрастающая с вероятностью единица. Оказалось, что предел последовательности ES_m является конечным. Поэтому существует предел $\lim_{m\to\infty} S_m$, обозначаемый $\int_{\mathbb{R}} L^{x(u)}_{0,t\wedge\tau(u)}$ и называемый *суммарным локальным временем* в нуле для потока Арратья. В этом обозначении выражение $\tau(u)$ не является отдельной случайной величиной, это лишь часть обозначения. Заметим, что мы пользуемся обозначением $\int_{\mathbb{R}} L^{x(u)}_{0,t\wedge\tau(u)}$, где символы du опущены. Этим мы хотим подчеркнуть результат работы [5, с. 184], в которой доказана асимптотическая эквивалентность

$$\mathrm{E}\tau(u_k^m) \sim \frac{1}{2^m}, \quad m\to\infty,$$

где

$$u_k^m = \frac{k}{2^m}, \qquad \tau(u_k^m) = \inf\left\{t\colon x(u_k^m,t) = x(u_{k-1}^m,t)\right\} \wedge 1.$$

Случайная величина $\tau(u_k^m)$ отвечает за время первой встречи процессов $x(u_k^m,\cdot)$ и $x(u_{k-1}^m,\cdot)$. В данной работе мы будем пользоваться подобным алгоритмом для определения *суммарного числа пересечений сверху вниз* полосы.

Поскольку каждый одноточечный процесс потока Арратья является винеровским, можно ожидать, что имеет место аналог соотношения (1.1), в котором в качестве числа пересечений сверху вниз полосы винеровским процессом используется *суммарное число пересечений сверху вниз* полосы потоком Арратья. Согласно вышеизложенному, произведения *суммарного числа пересечений сверху вниз* полосы потоком Арратья и ширины этой полосы можно рассматривать как аппроксимацию *суммарного локального времени* для потока Арратья.

Опишем кратко структуру статьи. Во втором пункте мы определяем *суммарное число пересечений сверху вниз* полосы потоком Арратья, связанное с фиксированным двоично-рациональным разбиением вещественной прямой. Обозначим через $\nu^{|x(u,\cdot)|,\delta}_{[s;t]}$ число пересечений полосы $[0;\delta]$ на интервале времени $[s;t]$, $0\le s,\ t\le 1$, процессом $|x(u,\cdot)|$. Мы допускаем, что s и t могут быть случайными величинами, и условимся полагать $\nu^{|x(u,\cdot)|,\delta}_{[s;t]} = 0$ в случае $s\ge t$.

Доказана теорема, которая дает возможность определить случайную величину

$$\nu^{\mathrm{Arr}}_{m,[s;t]} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]}$$

для $s<t$. Эту величину будем называть *суммарным числом пересечений сверху вниз полосы потоком Арратья до момента склейки, связанным с разбиением* $\{u_k^m\}$.

В третьем пункте мы доказываем аналог теоремы Леви о пересечении полосы для одноточечных процессов потока Арратья, стартовавших из точек фиксированного двоично-рационального разбиения вещественной прямой.

Далее, в пункте 4 мы осуществим предельный переход, устремив диаметр разбиения к нулю, и докажем основной результат данной статьи (теорему 4.2).

2. Суммарное число пересечений сверху вниз полосы потоком Арратья, связанное с фиксированным разбиением вещественной прямой. Сначала рассмотрим число пересечений сверху вниз $\nu_{[0;1]}^{w,\delta}$ полосы $[0;\delta]$ винеровским процессом w на интервале времени $[0;1]$.

Лемма 2.1. *Имеет место оценка*

$$E_x\nu_{[0;1]}^{w,\delta} \le C\cdot P_x\{\tau_\delta \le 1\},$$

где E_x — математическое ожидание, соответствующее начальному положению x винеровского процесса, C — некоторая константа, $\tau_\delta = \inf\{t\colon w(t)=\delta\}$.

Доказательство. Рассмотрим процесс $\widetilde{w}(t) := w(t+\tau_\delta) - w(\tau_\delta)$. Заметим, что число пересечений сверху вниз полосы $[0;\delta]$ процессом w на интервале времени $[0;1]$ не превышает числа пересечений сверху вниз полосы $[-\delta;0]$ процессом $\widetilde{w}$ на том же интервале времени $[0;1]$. Процесс $\widetilde{w}$ не зависит от σ-алгебры $\mathfrak{F}_{\tau_\delta}$, где $\mathfrak{F}_t := \sigma\{w(s),\ s\le t\}$. Поэтому выполняется равенство

$$E_x\nu_{[0;1]}^{w,\delta} = E_x\nu_{[0;1]}^{w,\delta}1_{\{\tau_\delta\le 1\}} \le E_x\nu_{[0;1]}^{\widetilde{w},\delta}1_{\{\tau_\delta\le 1\}} = E_x1_{\{\tau_\delta\le 1\}}E_x\nu_{[0;1]}^{\widetilde{w},\delta}.$$

При этом математическое ожидание $E_x\nu_{[0;1]}^{\widetilde{w},\delta}$ является конечным согласно теореме Дуба о числе пересечений полосы.

Лемма доказана.

Следствие. *Справедливо соотношение*

$$\mathrm{E}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\nu_{[0;1]}^{x(u_k^m,\cdot),\delta} < \infty.$$

Мы хотим определить суммарное число пересечений сверху вниз полосы $[0;\delta]$ траекториями процессов потока Арратья. Используя предыдущее следствие, получаем соотношение

$$\mathrm{E}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\nu_{[0;\tau(u_k^m)]}^{x(u_k^m,\cdot),\delta} < \infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\nu_{[0;\tau(u_k^m)]}^{x(u_k^m,\cdot),\delta}$ является сходящимся.

Выясним предельное поведение этого ряда при $m\to\infty$.

В следующем утверждении описывается поведение числа частиц потока Арратья, которые не успели склеиться до момента времени s, $s>0$. Нам понадобится понятие двойственного потока. Рассмотрим промежуток времени $[0;T]$, $T>0$.

Определение 2.1 [3, с. 95]**.** *Двойственным потоком $\overline{x}$ будем называть поток Арратья в обратном времени, удовлетворяющий условию*

$$(x(y_1,r_1)-\overline{x}(y_2,T-r_1))\cdot(x(y_1,r_2)-\overline{x}(y_2,T-r_2))\ge 0, \qquad y_1,y_2\in\mathbb{R},\quad r_1,r_2\in[0;T].$$

Существование двойственного потока доказано в работе [3, с. 95]. Следует заметить, что Харрис в работе [9, с. 198] получил результат, согласно которому число не склеившихся частиц $N_{s,[a;b]}$ в момент времени s среди всех частиц, стартовавших из интервала $[a;b]$ в нулевой момент времени, является конечным для произвольного ограниченного интервала $[a;b]$.

Лемма 2.2. *Для произвольного ограниченного интервала $[a;b]$ и момента времени $s>0$ выполняется неравенство*

$$\mathrm{E}N_{s,[a;b]}^2 \le \frac{(b-a)e^{\frac{b-a}{\sqrt{\pi s}}}}{\sqrt{\pi s}}\left(1+\frac{b-a}{\sqrt{\pi s}}\right).$$

Доказательство. Введем обозначение

$$R_m := \sum_{u_k^m \in [a;b]} 1_{\{x(u_k^m, s) > x(u_{k-1}^m, s)\}}.$$

Заметим, что $R_m = n-1$ тогда и только тогда, когда в точности n частиц, стартующих из точек $u_k^m \in [a;b]$, не склеились до момента времени s. Поскольку разбиения $\Delta_m := \Big\{u_k^m = \dfrac{k}{2^m},\ k \in \in \mathbb{Z}\Big\}$, $m \geq 1$, являются вложенными, $\Delta_m \subset \Delta_{m+1}$, выполняется неравенство $R_m \leq R_{m+1}$. Имеет место соотношение

$$\mathrm{P}\{R_m = n-1\} = \int\limits_{\{z_1 < z_2 < \ldots < z_n\}} dz_1 \ldots dz_n \rho_{l_m,\, n}(z_1, \ldots, z_n;\ s), \qquad l_m = \sharp\big\{k : u_k^m \in [a;b]\big\},$$

где $\rho_{l_m, n}(z_1, \ldots, z_n;\ s)$ — плотность, определяемая равенством

$$\mathrm{P}\Big\{\text{среди частиц } \big\{x(u_k^m, s),\ u_k^m \in [a;b]\big\}$$

$$\text{имеется ровно } n \text{ не склеившихся, расположенных в интервалах}$$

$$[z_1, z_1 + dy_1], \ldots, [z_n, z_n + dz_n]\Big\} = \rho_{l_m,\, n}(z_1, \ldots, z_n; s) dz_1 \ldots dz_n.$$

Оценим второй момент случайной величины R_m. Поскольку траектории процессов потока Арратья являются упорядоченными и не пересекаются с траекториями процессов двойственного потока $\overline{x}$ [3, с. 95] на промежутке времени $[0; s]$, для произвольных чисел $a_1 < b_1 < \ldots \ldots < a_n < b_n$ выполняется следующее соотношение между случайными событиями (с точностью до множеств нулевой меры):

$$\Big\{\text{среди частиц } \big\{x(u_k^m, s),\ u_k^m \in [a;b]\big\} \text{ имеется ровно } n \text{ не склеившихся,}$$

$$\text{расположенных в интервалах } [a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]\Big\} \subseteq$$

$$\subseteq \Big\{\text{среди частиц } \overline{x}(b_1, T-s), \overline{x}(b_2, T-s) b_2, \ldots, \overline{x}(b_{n-1}, T-s)$$

$$\text{имеется ровно } n-1 \text{ не склеившихся}$$

$$\text{в момент времени нуль, расположенных в интервале } [a;b]\Big\}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\{a_1 \leq z_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq z_n \leq b_n\}} dz_1 \ldots dz_n \rho_{l_m,\, n}(z_1, \ldots, z_n;\ s) \leq$$

$$\leq \int\limits_{\{a \leq z_1 < z_2 < \ldots < z_{n-1} \leq b\}} dz_1 \ldots dz_{n-1} \widetilde{\rho}_{n-1, n-1}(z_1, \ldots, z_{n-1};\ s),$$

где плотность $\widetilde{\rho}_{n-1,n-1}(z_1, \ldots, z_{n-1};\ s)$ соответствует точкам старта $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ процессов потока Арратья.

Для произвольных $y_i \in \mathbb{R}$, $y_1 < \ldots < y_n$, $t > 0$ имеет место неравенство [10, с. 718]

$$\widetilde{\rho}_{n,n}(y_1, \ldots, y_n; t) \leq (\pi t)^{-n/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{s^{\frac{n}{2}} n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{s^{\frac{n}{2}} (n-1)!} = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{s}}}}{\sqrt{s}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{s}}\right), \quad s > 0,$$

справедлива оценка

$$\sup_{m \geq 1} \mathrm{E}(R_m)^2 \leq \frac{(b-a) e^{\frac{b-a}{\sqrt{\pi s}}}}{\sqrt{\pi s}} \left(1 + \frac{b-a}{\sqrt{\pi s}}\right).$$

Далее, используя соотношение

$$N_{s,[a;b]} = \lim_{m \to \infty} R_m,$$

получаем утверждение леммы.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.3. *Имеет место следующее соотношение*:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sqrt{\mathrm{P}\{x(j+1, s) \geq \delta, x(j, s) \leq \delta + 1\}} < \infty.$$

Доказательство. Утверждение следует из оценки

$$\int_a^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx \leq \exp\left\{-\frac{a^2}{2}\right\}, \quad a \geq 1,$$

и неравенства

$$\mathrm{P}\big(x(j+1, s) \geq \delta; x(j, s) \leq \delta + 1\big) \leq \mathrm{P}\big(x(j+1, s) \geq \delta\big) \wedge \mathrm{P}\big(x(j, s) \leq \delta + 1\big).$$

Лемма 2.4. *Для произвольного* $s \in (0; 1)$ *справедливо соотношение*

$$\sup_{m > 0} \mathrm{E} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_{[s; \tau(u_k^m)]}^{x(u_k^m, \cdot), \delta} < \infty.$$

Доказательство. С вероятностью 1 выполняется неравенство

$$\nu_{[s \vee \sigma(u_k^m); \tau(u_k^m)]}^{x(u_k^m, \cdot), \delta} \leq \nu_{[s;1]}^{x(u_k^m, \cdot), \delta} 1_{\{\tau(u_k^m) > s\}}.$$

Обозначим

$$\mathfrak{F}^{[s]} := \sigma\big\{x(\cdot, s)\big\}.$$

Поскольку

$$\big\{\tau(u_k^m) > s\big\} = \big\{x(u_k^m, s) > x(u_{k-1}^m, s)\big\} \in \mathfrak{F}^{[s]},$$

имеет место равенство

$$\mathrm{E}\left[\nu_{[s;1]}^{x(u_k^m,\cdot),\delta} 1_{\{\tau(u_k^m)>s\}}/\mathfrak{F}^{[s]}\right] = \mathrm{E}\left[\nu_{[s;1]}^{x(u_k^m,\cdot),\delta}/\mathfrak{F}^{[s]}\right]\mathrm{E}\left[1_{\{\tau(u_k^m)>s\}}/\mathfrak{F}^{[s]}\right].$$

Используя лемму 2.1, получаем

$$\mathrm{E}\left[\nu_{[s;1]}^{x(u_k^m,\cdot),\delta}/\mathfrak{F}^{[s]}\right] \le C\left\{1_{\{x(u_k^m,s)\ge\delta\}}\int\limits_{x(u_k^m,s)-\delta}^{\infty} p_1(y)dy + 1_{\{x(u_k^m,s)<\delta\}}\int\limits_{\delta-x(u_k^m,s)}^{\infty} p_1(y)dy\right\}. \quad (2.1)$$

Оценим выражение, соответствующее первому слагаемому. После подстановки с точностью до константы получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 1_{\{x(u_k^m,s)\ge\delta\}}\int\limits_{x(u_k^m,s)-\delta}^{\infty} p_1(y)dy\cdot 1_{\{x(u_k^m,s)>x(u_{k-1}^m,s)\}}.$$

Поскольку в произвольный момент времени процессы потока Арратья упорядочены, предыдущее выражение можно оценить суммой ряда

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int\limits_{x(j,s)-\delta} p_1(y)dy \sum_{u_k^m\in[j;j+1)} 1_{\{x(u_k^m,s)\ge\delta\}}1_{\{x(u_k^m,s)>x(u_{k-1}^m,s)\}}.$$

Последнюю сумму можно представить в виде

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 1_{\{x(j+1,s)\ge\delta\}}\int\limits_{x(j,s)-\delta} p_1(y)dy \sum_{u_k^m\in[j;j+1)} 1_{\{x(u_k^m,s)\ge\delta\}}1_{\{x(u_k^m,s)>x(u_{k-1}^m,s)\}}. \quad (2.2)$$

Вычисляя математическое ожидание в (2.2) и используя неравенство Коши, получаем

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sqrt{\mathrm{E}1_{\{x(j+1,s)\ge\delta\}}\left(\int\limits_{x(j,s)-\delta} p_1(y)dy\right)^2}\sqrt{\mathrm{E}\left(\sum_{u_k^m\in[j;j+1)} 1_{\{x(u_k^m,s)\ge\delta\}}1_{\{x(u_k^m,s)>x(u_{k-1}^m,s)\}}\right)^2}.$$

Выполняется следующее неравенство:

$$\mathrm{E}\left(1_{\{x(j+1,s)\ge\delta\}}\int\limits_{x(j,s)-\delta} p_1(y)dy\right)^2 \le$$

$$\le \mathrm{E}\left(1_{\{x(j+1,s)\ge\delta\}}1_{\{x(j,s)-\delta\ge 1\}}\exp\left\{-\frac{(x(j,s)-\delta)^2}{2}\right\}+\right.$$

$$\left.+\,1_{\{x(j+1,s)\ge\delta\}}1_{\{x(j,s)-\delta<1\}}\right)^2 \le$$

$$\le 2\left[\mathrm{E}\left(1_{\{x(j+1,s)\ge\delta\}}1_{\{x(j,s)-\delta\ge 1\}}\exp\left\{-\frac{(x(j,s)-\delta)^2}{2}\right\}\right)^2+\right.$$

$$+ \mathrm{E}\left(1_{\{x(j+1,s)\geq\delta\}}1_{\{x(j,s)-\delta<1\}}\right)^2\Bigg].$$

Поэтому

$$\sqrt{\mathrm{E}1_{\{x(j+1,s)\geq\delta\}}\left(\int\limits_{x(j,s)-\delta} p_1(y)dy\right)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{E}\left(1_{\{x(j+1,s)\geq\delta\}}1_{\{x(j,s)-\delta\geq 1\}}\exp\left\{-\frac{(x(j,s)-\delta)^2}{2}\right\}\right)^2}+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{E}\Big(1_{\{x(j+1,s)\geq\delta\}}1_{\{x(j,s)-\delta<1\}}\Big)^2}.$$

Для получения оценки для второго момента суммы ряда

$$\sum_{u_k^m\in[j;j+1]} 1_{\{x(u_k^m,s)>x(u_{k-1}^m,s)\}},$$

не зависящей от m, воспользуемся леммой 2.2. Конечность суммы по индексу $j \in \mathbb{Z}$ следует теперь из леммы 2.3.

Подобным образом можно оценить выражение, соответствующее второму слагаемому в (2.1).

Лемма доказана.

Предыдущую лемму можно перенести на случай числа пересечений снизу вверх полосы $[0;\delta]$.

Подобным образом можно получить оценку на число пересечений снизу вверх полосы $[0;\delta]$.

Рассмотрим теперь число пересечений сверху вниз $\nu_{[s;\tau(u_k^m)]}^{|x(u_k^m,\delta)|,\delta}$ полосы $[0;\delta]$ процессом $|x(u_k^m,\cdot)|$.

Теорема 2.1. *Имеет место соотношение*

$$\sup_{m>0}\mathrm{E}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\nu_{[s;\tau(u_k^m)]}^{|x(u_k^m,\delta)|,\delta} < \infty.$$

Доказательство. Воспользуемся представлением

$$\nu_{[s;\tau(u_k^m)]}^{|x(u_k^m,\delta)|,\delta} = \nu_{1,[s;\tau(u_k^m)]}^{x(u_k^m,\cdot),\delta} + \nu_{2,[s;\tau(u_k^m)]}^{x(u_k^m,\cdot),\delta},$$

где $\nu_{1,[s;\tau(u_k^m)]}^{x(u_k^m,\cdot),\delta}$ — число пересечений сверху вниз полосы $[0,\delta]$, а $\nu_{2,[s;\tau(u_k^m)]}^{x(u_k^m,\cdot),\delta}$ — число пересечений снизу вверх полосы $[-\delta,0]$ винеровским процессом $x(u_k^m,\cdot)$. Теперь утверждение теоремы следует из леммы 2.4.

Определим случайную величину

$$\nu_{m,[s;t]}^{\mathrm{Arr}} := \sum_{k\in\mathbb{Z}}\nu_{[s;\tau(u_k^m)]}^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}.$$

Будем называть ее *суммарным числом пересечений сверху вниз полосы потоком Арратья до момента склейки*, *связанным с разбиением* $\{u_k^m\}$.

Следует заметить, что в последнем обозначении пересечения полосы образуются отраженными процессами $|x(u_k^m,\cdot)|$, $k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{N}$, потока Арратья.

3. Сходимость к суммарному локальному времени в нуле для потока Арратья, связанному с разбиением $\{u_k^m\}$. Нижеприведенная теорема содержит известный результат [1, с. 456] о сходимости произведения числа пересечений полосы и ее ширины к локальному времени для винеровского процесса.

Теорема 3.1. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{\delta\to 0}\delta\nu_{[0,t]}^{|w|,\delta} = L_{0,t}^{w} \text{ п.н.}$$

Заметим, что теорема 3.1 остается в силе, если вместо момента t использовать произвольный ограниченный момент остановки τ.

В этом пункте мы докажем аналогичный теореме 3.1 результат для потока Арратья.

Теорема 3.2. *Для произвольного $m\in\mathbb{N}$ выполняется соотношение*

$$\lim_{\delta\searrow 0+}\delta\nu_{m,[s;t]}^{\mathrm{Arr}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} L_{s,t\wedge\tau(u_k^m)}^{x(u_k^m)}.$$

Доказательство. Для заданного $m\in\mathbb{N}$ определим множество

$$\Omega_1 := \Big\{\omega\in\Omega\colon \exists N(\omega,\delta)\in\mathbb{N}\colon \Big\{x(u,t),\ t\in[0;1]\Big\}\cap\ [0;\delta]=\varnothing, |u|>N(\omega,\delta)\Big\},\quad \mathrm{P}(\Omega_1)=1.$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\forall\omega\in\Omega_\delta\ \exists N_0(\omega,\delta)\in\mathbb{N}\colon \sum_{k=-\infty}^{-N_0-1}\nu_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]}^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}+\sum_{k=N_0+1}^{\infty}\nu_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]}^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}=0,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-N_0-1}L_{s,t\wedge\tau(u_k^m)}^{x(u_k^m)}+\sum_{k=N_0+1}^{\infty}L_{s,t\wedge\tau(u_k^m)}^{x(u_k^m)}=0.$$

Рассмотрим множества

$$\Omega_2 := \big\{\omega\in\Omega\colon \text{теорема Леви выполняется для всех винеровских процессов } x(u_k^m,\cdot),\ k\in\mathbb{Z}\big\},$$

$$\Omega_3 := \Omega_1\cap\Omega_2.$$

Получаем

$$\forall\omega\in\Omega_3\colon \lim_{\delta_1\searrow 0+}\sum_{|k|\le N_0(\omega,\delta)}\delta_1\nu_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]}^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}=\sum_{|k|\le N_0(\omega,\delta)}L_{s,t\wedge\tau(u_k^m)}^{x(u_k^m)}.$$

В последнем выражении $\nu^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}$ обозначает число пересечений сверху вниз полосы $[0;\delta_1]$. Рассмотрим случайную величину

$$N_\delta := \min\Big\{N\in\mathbb{N}\colon \{x(u,t),\ t\in[0;1]\}\cap\ [0;\delta]=\varnothing,\ |u|>N\Big\}.$$

Существует множество

$$\Omega_4 := \{N_{\delta_1}\le N_{\delta_2}\ \forall\delta_1\le\delta_2\},\quad \mathrm{P}(\Omega_4)=1.$$

Рассмотрим множество

$$\Omega_5 := \Omega_4 \cap \Omega_3.$$

Справедливо утверждение

$$\forall \omega \in \Omega_5 : \lim_{\delta_1 \searrow 0+} \sum_{|k| \le N_0(\omega,\delta_1)} \delta_1 \nu^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]} = \sum_{|k| \le N_0(\omega,\delta_1)} L^{x(u_k^m)}_{s,t\wedge\tau(u_k^m)}.$$

Поскольку справедливы соотношения

$$\sum_{|k| \le N_0(\omega,\delta_1)} \nu^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]},$$

$$\sum_{|k| \le N_0(\omega,\delta_1)} L^{x(u_k^m)}_{s,t\wedge\tau(u_k^m)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} L^{x(u_k^m)}_{s,t\wedge\tau(u_k^m)},$$

теорема доказана.

В дальнейшем под потоком Арратья будем подразумевать его cadlag-модификацию по отношению к пространственной переменной u [8, c. 1330].

Замечание. С вероятностью единица

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \nu^{x(u,\cdot),\delta}_{[0;1]} < +\infty.$$

Действительно, если приведенное выше свойство не выполняется для некоторого ω, то существует последовательность $\{u_n\}$ такая, что $\nu^{x(u_n,\cdot),\delta}_{[0;1]} \to \infty$. Поскольку каждый случайный процесс $x(u,\cdot)$, $u \in \mathbb{R}$, является винеровским, с вероятностью 1 можно указать такое положительное число $N(\omega)$, что при $|u| > N(\omega)$ процесс $x(u,\cdot)$ не достигнет пределов полосы $[0;\delta]$ на промежутке времени $[0;1]$. Так как траектории случайных процессов потока Арратья упорядочены в произвольный момент времени, последовательность $\{u_n\}$ должна быть ограничена для почти всех ω. Выберем из нее монотонно сходящуюся подпоследовательность. Поскольку рассматривается cadlag-модификация потока Арратья, мы получим последовательность функций, которая сходится в $C[0;1]$ и имеет сходящиеся к $+\infty$ количества пересечений полосы. Полученное противоречие доказывает приведенное свойство.

4. Теорема Леви о пересечениях для потока Арратья. В данной главе мы определим случайную величину, называемую *суммарным числом пересечений сверху вниз полосы* для потока, и докажем аналог теоремы Леви о числах пересечения. Этот результат является основным результатом данной работы.

Для заданного числа $0 < s < 1$ рассмотрим последовательность $\{S_m\}_{m\ge1}$:

$$S_m := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu^{x(u_k^m,\cdot),\delta}_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]}.$$

Лемма. *Последовательность $\{S_m\}_{m\ge1}$ начиная с некоторого номера становится неубывающей*:

$$\exists \Omega_0 : \mathrm{P}(\Omega_0) = 1,\ \forall \omega_0 \in \Omega_0\ \exists m_0(\omega_0) \in \mathbb{N} : \forall m \ge m_0 : S_{m+1} \ge S_m.$$

Доказательство. Заметим, что с вероятностью 1 в произвольный положительный момент времени в потоке Арратья есть лишь локально конечное множество „слипшихся” частиц. Поэтому существует множество Ω_0, $\mathrm{P}(\Omega_0) = 1$, элементов вероятностного пространства, для которых является конечным число не склеившихся до момента времени s частиц потока Арратья, успевших достичь уровня δ до момента времени $t = 1$.

Для $\omega_0 \in \Omega_0$ число склеек частиц потока Арратья на промежутке времени $[s; 1]$, которые влияют на последовательность $\{S_m(\omega_0)\}_{m\geq 1}$ (т. е. склеивание тех частиц, которые достигли уровня δ), является конечным. Таким образом, число склеек, для которых $S_{m+1}(\omega_0) < S_m(\omega_0)$, также является конечным.

Лемма доказана.

Теорема 4.1. *С вероятностью* 1 *существует предел*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]},$$

который будем обозначать $\nu^{\mathrm{Arr}}_{[s;t]}$, *где* $\nu^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}_{[s_0;t\wedge\tau(u_k^m)]}$ — *число пересечений сверху вниз полосы* $[0;\delta]$ *процессом* $|x(u_k^m,\cdot)|$. *Случайная величина* $\nu^{\mathrm{Arr}}_{[s;t]}$ *является конечной с вероятностью* 1.

Доказательство. Используя предыдущую лемму, соотношение

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{E} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]} < \infty$$

и лемму Фату, получаем утверждение теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть заданы* s *и* t, $0 < s < t \leq 1$. *Выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{\delta\searrow 0+} \delta\nu^{\mathrm{Arr}}_{[s;t]} = \int\limits_{\mathbb{R}} L^{x(u)}_{s,t\wedge\tau(u)}.$$

Доказательство. Можно заметить, что

$$\exists\Omega_0 \subseteq \Omega,\ \mathrm{P}(\Omega_0) = 1 \colon \forall\omega_0 \in \Omega_0 \colon \exists N(\omega_0)\colon \big\{x(u,t),\ t \in [0;1]\big\} \cap \{0\} = \varnothing, \quad |u| > N(\omega_0).$$

Рассмотрим множество A_s:

$$A_s := \{x(u,s),\ u \in [-N(\omega_0); N(\omega_0)]\}, \quad \sharp A_s < \infty.$$

Занумеруем точки множества A_s:

$$A_s = \big\{u_1(\omega_0), \ldots, u_n(\omega_0)\big\}.$$

Рассмотрим прообразы точек $u_1(\omega_0), \ldots, u_n(\omega_0)$:

$$\big\{x^{-1}(u_1(\omega_0), s, \omega_0)\big\}, \ldots, \big\{x^{-1}(u_n(\omega_0), s, \omega_0)\big\}.$$

Эти множества являются непустыми интервалами. Когда в каждом из интервалов окажется по крайней мере по одной точке разбиения $\{u_k^m,\ k \in \mathbb{Z}\}$ $\big($это произойдет начиная с некоторого числа $m_0(\omega)\big)$, случайная величина $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]}$ будет принимать одинаковые значения для $m > m_0$:

$$\exists m_0(\omega) \colon \forall m \geq m_0(\omega) \colon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu^{|x(u_k^m,\cdot)|,\delta}_{[s;\tau(u_k^m)]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu^{|x(u_k^{m_0},\cdot)|,\delta}_{[s;\tau(u_k^{m_0})]}.$$

Заметим, что число $m_0(\omega)$ не зависит от δ. Таким образом, получаем

$$\nu_{[s;t]}^{\mathrm{Arr}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu_{[s;t\wedge\tau(u_k^{m_0})]}^{|x(u_k^{m_0},\cdot)|,\delta},$$

$$\int_{\mathbb{R}} L_{s,t\wedge\tau(u)}^{x(u)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} L_{s,t\wedge\tau(u_k^{m_0})}^{x(u_k^{m_0})}.$$

Используя для номера m_0 теорему 3.2, получаем необходимую сходимость:

$$\lim_{\delta\to 0}\delta \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu_{[s;\tau(u_k^{m_0})]}^{|x(u_k^{m_0},\cdot)|,\delta} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} L_{s,t\wedge\tau(u_k^{m_0})}^{x(u_k^{m_0})}.$$

Теорема доказана.

1. *Kasahara Y.* On Levy′s downcrossing theorem // Proc. Jap. Acad. Ser. A. – 1980. – **56**.
2. *Ito K., McKean H.* Diffusion processes and their sample paths. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1965.
3. *Arratia R.* Coalescing Brownian motions on the line: Ph. D. Thesis. – Madison, 1979.
4. *Le Jan Y., Raimond O.* Flows, coalescence and noise // Ann. Probab. – 2004.
5. *Dorogovtsev A. A.* Measure-valued processes and stochastic flows (in Russian). – Kiev: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2007.
6. *Shamov A.* On short-time asymptotics of one-dimensional Harris flows // Communs Stochast. Anal. – 2011. – **5**, № 3. – P. 527 – 539.
7. *Chernega P. P.* Local time at zero for arratia flow // Ukr. Math. J. – 2012. – **64**, № 4. – P. 616 – 633.
8. *Dorogovtsev A. A.* Some notes on a Wiener flow with coalescing // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, № 10. – P. 1327 – 1333.
9. *Harris T. E.* Coaslescing and noncoalescing stochastic flows in R_1 // Stochast. Processes and Appl. – 1984. – **17**. – P. 187 – 210.
10. *Munasinghe R., Rajesh R., Tribe R., Zaboronskiy O.* Multi-scaling of the n-point density function for coalescing Brownian motions // Communs Math. Phys. – 2006. – **268**. – P. 717 – 725.
11. *Lotov V. I., Orlova N. G.* About number of strip intersections by a trajectories of random walk // Math. Digest. – 2003. – **194**, № 6.

Получено 02.12.13,
после доработки — 29.09.14