УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепропетр. нац. ун-т)

НЕРАВЕНСТВА РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

We prove the following sharp inequality of various metrics:

$$\|x\|_q \le \|\varphi_r\|_q \left(\frac{\|x\|_p}{\|\varphi_r\|_p} \right)^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \|x^{(r)}\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}}, \qquad q > p > 0,$$

for 2π-periodic functions $x \in L^r_\infty$ satisfying condition

$$L(x)_p \le 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_p, \tag{A}$$

where

$$L(x)_p := \sup \left\{ \|x\|_{L_p[a,b]} : \; a, b \in [0, 2\pi], \; |x(t)| > 0, \; t \in (a,b) \right\},$$

and φ_r is the Euler spline of order r.

As a special case, we establish the Nikolskii-type sharp inequalities for polynomials and polynomial splines satisfying the condition (A).

Доведено непокращувану нерівність різних метрик

$$\|x\|_q \le \|\varphi_r\|_q \left(\frac{\|x\|_p}{\|\varphi_r\|_p} \right)^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \|x^{(r)}\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}}, \qquad q > p > 0,$$

для 2π-періодичних функцій $x \in L^r_\infty$, що задовольняють умову

$$L(x)_p \le 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_p, \tag{A}$$

де

$$L(x)_p := \sup \left\{ \|x\|_{L_p[a,b]} : \; a, b \in [0, 2\pi], \; |x(t)| > 0, \; t \in (a,b) \right\},$$

а φ_r– ідеальний сплайн Ейлера порядку r.

Як наслідок отримано точні нерівності типу Нікольського для поліномів і поліноміальних сплайнів, що задовольняють умову (A).

1. Введение. Пусть G — некоторое измеримое подмножество числовой оси. Через $L_p(G)$, $0 < p \le \infty$, обозначим пространства измеримых функций $x\colon G \to \mathbf{R}$ таких, что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int\limits_G |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{если} \quad 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \in G} |x(t)|, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

В качестве G будем рассматривать отрезок $[a, b]$ или окружность T, реализованную в виде отрезка $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами. Вместо $L_p(T)$ и $\|x\|_{L_p(T)}$ будем писать для краткости L_p и $\|x\|_p$ соответственно.

Для $r \in \mathbf{N}$ через L^r_∞ обозначим пространство функций $x \in L_\infty$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до порядка $r-1$ включительно, причем $x^{(r)} \in L_\infty$.

Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим r-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$.

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема А. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $q > p > 0$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty$, *имеющей нули, выполняется точное на классе* L^r_∞ *неравенство*

$$\|x\|_q \le \sup_{c\in[0,K_r]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{1}$$

где $\alpha = \dfrac{r+1/q}{r+1/p}$, $K_r := \|\varphi_r\|_\infty$.

При этом в работе [1] показано, что

$$\sup_{x\in L^r_\infty} \frac{\|x\|_q}{\|x\|_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}} = \infty,$$

т. е. условие о том, что функция $x \in L^r_\infty$ имеет нули, существенно в теореме А. В этой же работе доказано, что на классах функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, супремум в определении точной константы в неравенстве (1) достигается при $c = 0$. В частности, для функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих одному из следующих условий:

$$\|x_+\|_\infty = \|x_-\|_\infty, \qquad \|x_+\|_p = \|x_-\|_p,$$

где $x_\pm := \max\{\pm x, 0\}$, выполняется точное неравенство

$$\|x\|_q \le \|\varphi_r\|_q \left(\frac{\|x\|_p}{\|\varphi_r\|_p}\right)^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \|x^{(r)}\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}}, \qquad q > p > 0. \tag{2}$$

В работе [2] неравенство (2) доказано на классе функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих условию

$$\|x_+\|_s = \|x_-\|_s\,, \quad p < s < \infty.$$

В настоящей работе продолжено изучение условий на функцию $x \in L^r_\infty$, обеспечивающих выполнение неравенства (2). А именно, доказано, что если $L(x)_p$– локальная „норма” [3], определяемая равенством

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} :\ a,b \in [0,2\pi],\ |x(t)| > 0,\ t \in (a,b)\right\}, \tag{3}$$

а функция $x \in L^r_\infty$ удовлетворяет условию

$$L(x)_p \le 2^{-\frac{1}{p}}\,\|x\|_p\,, \tag{4}$$

то для нее выполняется неравенство (2) (теорема 2). С помощью полученного неравенства доказаны точные неравенства разных метрик типа Никольского для тригонометрических полиномов и полиномиальных сплайнов (теоремы 3, 4), удовлетворяющих условию (4).

Отметим, что условию (4) удовлетворяет любая функция $x \in L_p$ такая, что

$$\|x_+\|_p = \|x_-\|_p\,.$$

В частности, условию (4) при $p = 1$ удовлетворяет любая функция $x \in L_1$, в среднем равная нулю на периоде.

Кроме того, нетрудно видеть, что условие (4) выполнено для любой функции $x \in L_p$, удовлетворяющей равенству

$$L(x_+)_p = L(x_-)_p.$$

При $p = \infty$ условие (4) превращается в тождество $L(x)_\infty = \|x\|_\infty$.

2. Неравенства разных метрик для локальных „норм” функций $x \in L^r_\infty$. Для функции $x \in L_p$ положим
$$E_0(x)_p := \inf_{c\in\mathbf{R}} \|x-c\|_p$$
и через $c_p(x)$ обозначим константу наилучшего L_p-приближения функции x, т. е. константу, реализующую инфимум в этом определении.

В работе [4] доказана следующая теорема.

Теорема B. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $p > 0$, $q \geq 1$. Тогда для любой функции $x \in L^r_\infty$ выполняется точное на классе L^r_∞ неравенство*

$$L(x^{(k)})_q \leq L(\varphi_{r-k})_q \left(\frac{\|x\|_p}{E_0(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r-k+1/q}{r+1/p}$.

С помощью теоремы B доказан ряд точных неравенств типа Колмогорова и Бернштейна [4 – 6]. В приведенной ниже теореме, которая используется при получении основных результатов работы, утверждается, что при выполнении условия (4) имеет место аналог неравенства теоремы B для $k=0$.

Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) = \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $q > p > 0$. Тогда для любой функции $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющей условию*

$$L(x)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_p \,, \tag{5}$$

выполняется неравенство

$$L(x)_q \leq L(\varphi_r)_q \left(\frac{\|x\|_p}{\|\varphi_r\|_p}\right)^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{6}$$

где $\alpha = \dfrac{r+1/q}{r+1/p}$.

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющую условию (5), и пусть

$$A_r := \|x^{(r)}\|_\infty \,. \tag{7}$$

Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$\|x\|_p = A_r \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,\,2\pi/\lambda]}. \tag{8}$$

Тогда в силу (5)
$$L(x)_p \leq 2^{-\frac{1}{p}} A_r \, \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,\,2\pi/\lambda]} = A_r \, L(\varphi_{\lambda,r})_p \,.$$

Отсюда следует неравенство
$$L(x)_q \leq A_r L(\varphi_{\lambda,r})_q$$
согласно следствию 1 леммы 1 из работы [7]. Учитывая последнее неравенство, равенства (7), (8) и определение α, а также применяя очевидные соотношения

$$\|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,\,2\pi/\lambda]} = \lambda^{-(r+1/p)}\|\varphi_r\|_p, \qquad L(\varphi_{\lambda,r})_q = \lambda^{-(r+1/q)}L(\varphi_r)_q\,,$$

получаем

$$\frac{L(x)_q}{\|x\|_p^\alpha} \le \frac{A_r L(\varphi_{\lambda,r})_q}{[A_r\|\varphi_{\lambda,r}\|_p]^\alpha} = \frac{\lambda^{-(r+1/q)}L(\varphi_r)_q}{\left[\lambda^{-(r+1/p)}\|\varphi_r\|_p\right]^\alpha}\, A_r^{1-\alpha} = \frac{L(\varphi_r)_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha}\, \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}\,.$$

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 в силу равенства $L(x)_\infty = \|x\|_\infty$ вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p > 0$. Тогда для любой функции $x \in L_\infty^r$, удовлетворяющей условию*

$$L(x)_p \le 2^{-\frac{1}{p}}\, \|x\|_p\,,$$

выполняется неравенство

$$\|x\|_\infty \le \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{\|x\|_p}{\|\varphi_r\|_p}\right)^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r}{r+1/p}$.

Отметим, что для всех функций $x \in L_\infty^r$ в работе [8] доказано неравенство

$$E_0(x)_\infty \le \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{\|x\|_p}{E_0(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \qquad p > 0\,,$$

где $\alpha = \dfrac{r}{r+1/p}$.

***Замечание* 1.** Без условия (5) теорема 1 перестает быть справедливой. Действительно, пусть r четно. Известно [9], что тогда для достаточно малых $p \in (0,1)$

$$E_0(\varphi_r)_p < \|\varphi_r\|_p\,.$$

Поэтому если $c_p(\varphi_r)$ — константа наилучшего приближения сплайна φ_r в пространстве L_p, то $c_p(\varphi_r) \ne 0$ для рассматриваемых r и p. Следовательно, для функции $x = \tilde{\varphi}_r := \varphi_r - c_p(\varphi_r)$ выполняется неравенство

$$L(\tilde{\varphi}_r)_q > L(\varphi_r)_q, \qquad q > 0\,,$$

и для этой функции ни условие (5), ни неравенство (6) не выполняются.

3. Вспомогательные утверждения. Для p, $\Delta > 0$ и $x \in L_p(\mathbf{R})$ положим

$$\|x\|_{p,\Delta} := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R},\ 0 < b - a \le \Delta\right\}. \tag{9}$$

Лемма 1. *Если функция x непрерывна на $\mathbf{R}$, а супремум в определении* (9) *реализуется на отрезке $[a,b]$, то*

$$|x(a)| = |x(b)|.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы 1 неверно. Пусть для определенности

$$|x(a)| < |x(b)|.$$

Вследствие непрерывности x существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых $t_1, t_2 \in (0, \varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|x(a + t_1)| < |x(b + t_2)|.$$

Тогда

$$\|x\|_{L_p[a,a+\varepsilon]} < \|x\|_{L_p[b,b+\varepsilon]}.$$

Следовательно,

$$\|x\|_{L_p[a,b]} < \|x\|_{L_p[a+\varepsilon,b+\varepsilon]}.$$

Последнее неравенство противоречит предположению о том, что супремум в определении (9) реализуется на отрезке $[a, b]$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $p > 0$, а функция $x \in L^r_\infty$ такова, что*

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1 \tag{10}$$

и

$$L(x)_p \le 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_p . \tag{11}$$

Если Δ выбрано так, что

$$\|x\|_{p,\Delta} = 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_p , \tag{12}$$

а λ удовлетворяет условию

$$\|x\|_{p,\Delta} = L(\varphi_{\lambda,r})_p , \tag{13}$$

то

$$\frac{\pi}{\lambda} \le \Delta \le \pi. \tag{14}$$

Доказательство. Заметим, что второе из неравенств (14) $\Delta \le \pi$ непосредственно следует из условия (12) в силу определения (9) нормы $\|x\|_{p,\Delta}$.

Докажем первое из неравенств (14). Прежде всего отметим некоторые следствия условий (11)–(13). Поскольку

$$L(\varphi_{\lambda,r})_p = 2^{-\frac{1}{p}} \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]},$$

то в силу (12) условие (13) можно записать в виде

$$\|x\|_p = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} . \tag{15}$$

Из последнего равенства, условия (10) и следствия теоремы 1 вытекает неравенство

$$\|x\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty . \tag{16}$$

Для доказательства неравенства $\Delta \ge \pi/\lambda$ предположим противное. Пусть $\Delta < \pi/\lambda$. Через $[a, b]$ обозначим отрезок, на котором реализуется супремум в определении (9) нормы $\|x\|_{p,\Delta}$. Рассмотрим два случая: 1) $x(t) \ne 0$ для $t \in [a, b]$; 2) существует $c \in [a, b]$ такое, что $x(c) = 0$.

В первом случае вследствие непрерывности функции $x(t)$ найдутся такие α и β, что $\alpha < a < b < \beta$, причем $x(t) \neq 0$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда, принимая во внимание определение (3) величины $L(x)_p$ и равенство (12), получаем

$$L(x)_p \geq \|x\|_{L_p[\alpha,\beta]} > \|x\|_{L_p[a,b]} = \|x\|_{p,\Delta} = 2^{-\frac{1}{p}} \|x\|_p \,,$$

что противоречит условию (11).

Рассмотрим теперь второй случай: существует $c \in [a, b]$ такое, что $x(c) = 0$. Если $c = a$ или $c = b$, то по лемме 1 $x(a) = x(b) = 0$. Заметим далее, что в силу (10) и (16) для функции x выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [10]. Поскольку по предположению $b - a < \pi/\lambda$, существует такой сдвиг сплайна $\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau)$, что $[a, b] \subset [\alpha, \alpha + \pi/\lambda]$, где α — некоторый нуль $\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau)$. Тогда из теоремы сравнения Колмогорова следует неравенство

$$|x(t)| \leq \varphi_{\lambda,r}(t + \tau), \qquad t \in [a, b] \,.$$

Отсюда, так как $b - a < \pi/\lambda$, получаем

$$\|x\|_{p,\Delta} = \|x\|_{L_p[a,b]} \leq \|\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau)\|_{L_p[a,b]} < L(\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau))_p = L(\varphi_{\lambda,r})_p \,,$$

что противоречит (13).

Пусть теперь в рассматриваемом втором случае $c \in (a, b)$. Переходя, если нужно, к сдвигу сплайна $\varphi_{\lambda,r}$, можно считать, что $\varphi_{\lambda,r}(c) = 0$. Через x_1 обозначим сужение функции x на отрезок $[a, c]$, а через x_2 — сужение x на отрезок $[c, b]$. Пусть далее $\tilde{x}_1(t) := x_1(t - \pi/\lambda)$. Ясно, что

$$\|x\|^p_{L_p[a,b]} = \|x_1\|^p_{L_p[a,c]} + \|x_2\|^p_{L_p[c,b]} \tag{17}$$

и

$$\|x_1\|^p_{L_p[a,c]} = \|\tilde{x}_1\|^p_{L_p[a+\pi/\lambda, c+\pi/\lambda]} \,. \tag{18}$$

С другой стороны, из теоремы сравнения Колмогорова следуют неравенства

$$|\tilde{x}_1(t)| \leq |\varphi_{\lambda,r}(t)|, \qquad t \in [a + \pi/\lambda, c + \pi/\lambda] \,, \tag{19}$$

и

$$|x_2(t)| \leq |\varphi_{\lambda,r}(t)|, \qquad t \in [c, b] \,. \tag{20}$$

Заметим, что $b < a + \pi/\lambda$ в силу предположения о противном. Поэтому из (17)–(20) следует, что

$$\|x\|^p_{p,\Delta} = \|x\|^p_{L_p[a,b]} \leq \|\varphi_{\lambda,r}\|^p_{L_p[c,b]} + \|\varphi_{\lambda,r}\|^p_{L_p[a+\pi/\lambda, c+\pi/\lambda]} <$$
$$< \|\varphi_{\lambda,r}\|^p_{L_p[c,c+\pi/\lambda]} = L(\varphi_{\lambda,r})^p_p \,,$$

что противоречит условию (13). Тем самым неравенство $\Delta \geq \pi/\lambda$, а вместе с ним и лемма 2 доказаны.

4. Неравенства разных метрик для норм функций $x \in L^r_\infty$.

Теорема 2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $q > p > 0$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty$, *которая удовлетворяет условию*

$$L(x)_p \le 2^{-\frac{1}{p}} \, \|x\|_p \, ,$$

выполняется точное неравенство

$$\|x\|_q \le \|\varphi_r\|_q \left(\frac{\|x\|_p}{\|\varphi_r\|_p} \right)^{\alpha} \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{21}$$

где $\alpha = \dfrac{r+1/q}{r+1/p}$.

Доказательство. Вследствие однородности неравенства (21) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{22}$$

Тогда выполнено условие (10). Выберем $\Delta > 0$ и $\lambda > 0$, как в лемме 2, т. е. так, чтобы имели место равенства

$$\|x\|_{p,\Delta} = 2^{-\frac{1}{p}} \, \|x\|_p \tag{23}$$

и

$$\|x\|_{p,\Delta} = L(\varphi_{\lambda,r})_p \, . \tag{24}$$

Тогда выполнены все условия леммы 2 и, следовательно, по лемме 2

$$\frac{\pi}{\lambda} \le \Delta \le \pi. \tag{25}$$

Пусть далее $[a,b]$ — отрезок, на котором реализуется супремум в определении (9) нормы $\|x\|_{p,\Delta}$. Через x_1 обозначим сужение функции x на $[a,b]$, а через x_2 — сужение функции x на $[b, a+2\pi]$. Положим $a_1 = a + 2\pi$. Вследствие леммы 1 и 2π-периодичности функции x выполнены равенства

$$|x_1(a)| = |x_1(b)| = |x_2(b)| = |x_2(a_1)|. \tag{26}$$

При этом из (25) следует, что

$$b - a \ge \frac{\pi}{\lambda}, \qquad a_1 - b \ge \frac{\pi}{\lambda}. \tag{27}$$

Заметим далее, что в силу равенства

$$L(\varphi_{\lambda,r})_p = 2^{-\frac{1}{p}} \, \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}$$

и условия (23) равенство (24) можно представить в виде

$$\|x\|_p = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} \, . \tag{28}$$

А так как для любого $s > 0$

$$\|x\|_s^s = \|x_1\|_{L_s[a,b]}^s + \|x_2\|_{L_s[b,a_1]}^s \tag{29}$$

и в силу (24)

$$\|x_1\|_{L_p[a,b]} = \|x\|_{p,\Delta} = L(\varphi_{\lambda,r})_p \, ,$$

то

$$\|x_1\|_{L_p[a,b]} = \|x_2\|_{L_p[b,a_1]} = L(\varphi_{\lambda,r})_p \, . \tag{30}$$

Положим для краткости $I_1 := [a,b]$, $I_2 := [b, a_1]$ и докажем, что для любого $q > p$ выполняются неравенства

$$\|x_k\|_{L_q(I_k)} \leq L(\varphi_{\lambda,r})_q, \qquad k = 1, 2 \, . \tag{31}$$

Через $r(x_k, t)$, $t \in [0, \mu_k]$, обозначим убывающую перестановку функции $|x_k|$, где $\mu_1 = b - a$, $\mu_2 = a_1 - b$. Положим $r(x_k, t) = 0$ для $t > \mu_k$, $k = 1, 2$. Пусть далее φ — сужение сплайна $\varphi_{\lambda,r}$ на $[0, \pi/\lambda]$, а $r(\varphi, t)$, $t \in [0, \pi/\lambda]$, — убывающая перестановка функции $|\varphi|$. Также положим $r(\varphi, t) = 0$ для $t > \pi/\lambda$.

Чтобы доказать (31), достаточно, в силу теоремы Харди – Литтлвуда – Полиа (см., например, [11], теорема 1.3.11), доказать неравенство

$$\int\limits_0^\xi r^p(x_k, t)dt \leq \int\limits_0^\xi r^p(\varphi, t)dt, \qquad \xi > 0 \, . \tag{32}$$

Прежде всего покажем, что разности $\Delta_k(t) := r(x_k, t) - r(\varphi, t)$ меняют знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что

$$r(x_k, 0) \leq r(\varphi, 0), \qquad k = 1, 2 \, . \tag{33}$$

Это непосредственно следует из неравенства

$$\|x\|_\infty \leq \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty \, , \tag{34}$$

которое, в свою очередь, вытекает из следствия теоремы 1 в силу (28) и (22). Положим далее для $k = 1, 2$

$$m_k := \min\{|x_k(t)|, t \in I_k\}, \qquad M_k := \max\{|x_k(t)|, t \in I_k\}$$

и докажем, что если для произвольного $y_k \in (m_k, M_k)$ точки $\Theta_k \in [0, \mu_k]$ и $\Theta \in [0, \pi/\lambda]$ выбраны так, что

$$y_k = r(x_k, \Theta_k) = r(\varphi, \Theta) \, , \tag{35}$$

то

$$|r'(x_k, \Theta_k)| \leq |r'(\varphi, \Theta)| \, . \tag{36}$$

Действительно, пусть точки

$$t_i^k \in I_k, \quad i = 1, \ldots, m_k, \quad k = 1, 2, \qquad z_j \in [0, \pi/\lambda], \quad j = 1, 2\,,$$

таковы, что

$$y_k = |x_k(t_i^k)| = |\varphi(z_j)|\,.$$

При этом из (26) следует оценка $m_k \geq 2$. Тогда по теореме сравнения Колмогорова (ее условия выполнены в силу (22) и (34)) имеют место неравенства

$$|x'(t_i^k)| \leq |\varphi'(z_j)|, \qquad i = 1, \ldots, m_k, \quad j = 1, 2\,.$$

Поэтому по теореме о производной перестановки (см., например, [11], предложение 1.3.2)

$$|r'(x_k, \Theta_k)| = \left[\sum_{i=1}^{m_k} |x_k'(t_i^k)|^{-1}\right]^{-1} \leq \left[\sum_{j=1}^{2} |\varphi'(z_j)|^{-1}\right]^{-1} = |r'(\varphi, \Theta)|.$$

Тем самым импликация (35) $\Rightarrow$ (36) доказана. Из этой импликации и неравенств (27) и (33) следует, что разности $\Delta_k(t) := r(x_k, t) - r(\varphi, t)$ меняют знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). То же самое справедливо и для разностей

$$\Delta_{k,p}(t) := r^p(x_k, t) - r^p(\varphi, t).$$

Докажем теперь неравенство (31). Положим

$$I_k(\xi) = \int\limits_0^{\xi} \Delta_{k,p}(t)dt, \qquad k = 1, 2.$$

Из (30) следует, что

$$I_k(0) = I_k(\mu_k) = 0\,.$$

При этом производная $I_k'(t) = \Delta_{k,p}(t)$ меняет знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с минуса на плюс). Отсюда следует неравенство

$$I_k(\xi) \leq 0\,, \qquad \xi > 0,$$

которое равносильно (32). Тем самым неравенство (31) доказано.

Из (31) и (29) (при $s = q$) непосредственно следует, что

$$\|x\|_q \leq \|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_q[0,2\pi/\lambda]}\,.$$

Применяя последнее неравенство, равенство (28), очевидное соотношение

$$\|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_p[0,\,2\pi/\lambda]} = \lambda^{-(r+1/p)}\|\varphi_r\|_p\,, \qquad p > 0\,,$$

и определение α, получаем неравенство

$$\frac{\|x\|_q}{\|x\|_p^\alpha} \leq \frac{\|\varphi_{\lambda,r}\|_{L_q[0,\,2\pi/\lambda]}}{\|\varphi_{\lambda,r}\|_p^\alpha} \leq \frac{\lambda^{-(r+1/q)}\|\varphi_r\|_q}{\left[\lambda^{-(r+1/p)}\|\varphi_r\|_p\right]^\alpha} = \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha}\,,$$

которое в силу (22) равносильно (21). Ясно, что неравенство (21) обращается в равенство для функции $x = \varphi_r$.

Теорема 2 доказана.

***Замечание* 2.** Неравенство (21) было доказано ранее для функций $x \in L^r_\infty$, в среднем равных нулю на периоде, при $p = 1$ [1] и $p < 1$ [2].

5. Неравенства типа Никольского для полиномов и сплайнов.

Теорема 3. *Пусть* $n \in \mathbf{N}$, $q > p > 0$. *Тогда для любого тригонометрического полинома* T_n *порядка не выше* n, *удовлетворяющего условию*

$$L(T_n)_p \le 2^{-\frac{1}{p}} \, \|T_n\|_p \,,$$

выполняется неравенство

$$\|T_n\|_q \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\cos(\cdot)\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_p} \|T_n\|_p \,, \tag{37}$$

точное на пространстве всех тригонометрических полиномов.

Доказательство. Зафиксируем произвольный тригонометрический полином T_n, удовлетворяющий условию теоремы. Ясно, что $T_n \in L^r_\infty$ при любом $r \in \mathbf{N}$. Применим к полиному T_n неравенство (21):

$$\|T_n\|_q \le \|\varphi_r\|_q \left(\frac{\|T_n\|_p}{\|\varphi_r\|_p}\right)^\alpha \|T_n^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha} \,,$$

где $\alpha = \dfrac{r + 1/q}{r + 1/p}$. Оценивая далее $\|T_n^{(r)}\|_\infty$ с помощью неравенства Бернштейна

$$\|T_n^{(r)}\|_\infty \le n^r \|T_n\|_\infty \,,$$

имеем

$$\|T_n\|_q \le n^{r(1-\alpha)}) \|\varphi_r\|_q \left(\frac{\|T_n\|_p}{\|\varphi_r\|_p}\right)^\alpha \|T_n\|_\infty^{1-\alpha} \,.$$

Перейдем в последнем неравенстве к пределу при $r \to \infty$. Учитывая, что при этом $\alpha \to 1$, $r(1-\alpha) \to 1/p - 1/q$, и применяя соотношение (см., например, [12])

$$\|\varphi_r\|_p \to \frac{4}{\pi} \|\cos(\cdot)\|_p \,, \qquad p > 0,$$

получаем доказываемое неравенство (37). Осталось заметить, что неравенство (37) обращается в равенство для полинома $T_1(t) = \cos t$.

Теорема 3 доказана.

Для $n, r \in \mathbf{N}$ через $S_{n,r}$ обозначим пространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n$, $k \in \mathbf{Z}$.

Теорема 4. *Пусть* r, $n \in \mathbf{N}$, $q > p \ge 1$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$, *удовлетворяющего условию*

$$L(s)_p \le 2^{-\frac{1}{p}} \, \|s\|_p \,, \tag{38}$$

выполняется неравенство

$$\|s\|_q \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p} \|s\|_p \,, \tag{39}$$

точное на множестве $\bigcup_{n=1}^\infty S_{n,r}$ *всех сплайнов порядка* r.

Доказательство. Пусть сплайн $s \in S_{n,r}$ удовлетворяет условию теоремы. Ясно, что $s \in \in L^r_\infty$. Применим к сплайну s неравенство (21):

$$\|s\|_q \leq \|\varphi_r\|_q \left(\frac{\|s\|_p}{\|\varphi_r\|_p}\right)^\alpha \|s^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r+1/q}{r+1/p}$. Оценивая далее $\|s^{(r)}\|_\infty$ с помощью неравенства [12] (лемма 8.5.1)

$$\|s^{(r)}\|_\infty \leq n^{r+1/p} \frac{\|s\|_p}{\|\varphi_r\|_p}$$

и замечая, что

$$(r+1/p)(1-\alpha) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

получаем доказываемое неравенство (39). Осталось заметить, что неравенство (38) обращается в равенство для сплайна $s = \varphi_r$.

Теорема 4 доказана.

***Замечание* 3.** Неравенства (37) и (39) были доказаны ранее для полиномов и сплайнов, в среднем равных нулю на периоде, при $p = 1$ [1] и $p < 1$ [2].

1. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Comparison of rearrangements and Kolmogorov – Nagy type inequalities for periodic functions // Approxim. Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov / Ed. B. Bojanov. – Sofia: Darba, 2002. – P. 24 – 53.
2. *Kofanov V. A.* Comparison of rearrangements and inequalities of various metrics // East. J. Approxim. – 2002. – **8**, № 3. – P. 311 – 325.
3. *Pinkus A., Shisha O.* Variations on the Chebyshev and L^q theories of best approximation // J. Approxim. Theory. – 1982. – **35**, № 2. – P. 148 – 168.
4. *Kofanov V. A.* Sharp inequalities of Bernstein and Kolmogorov type // East. J. Approxim. – 2005. – **11**, № 2. – P. 131 – 145.
5. *Кофанов В. А.* О точных неравенствах типа Бернштейна для сплайнов // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 10. – С. 1357 – 1367.
6. *Kofanov V. A., Miropolskiy V. E.* On the best constants in inequalities of Kolmogorov type // East. J. Approxim. – 2007. – **13**, № 4. – P. 455 – 466.
7. *Кофанов В. А.* О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 6. – С. 765 – 776.
8. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Kolmogorov type and some their applications in approximation theory // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. II. Suppl.– 1998. – **52**. – P. 223 – 237.
9. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Аппроксимация синусоподобных функций константами в пространствах L_p, $p < 1$ // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 6. – С. 745 – 762.
10. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика.– М.: Наука, 1985. – С. 252 – 263.
11. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
12. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.

Получено 23.01.14