УДК 512.61

И. В. Сергиенко, Е. Ф. Галба, В. С. Дейнека (Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВЗВЕШЕННОГО СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

A weighted singular-valued decomposition of matrices with singular weights is obtained by using orthogonal matrices. Necessary and sufficient conditions for the existence of the constructed weighted singular-valued decomposition are found. The indicated singular-valued decomposition of matrices is used to obtain a decomposition of their weighted pseudoinverse martrices and decompose them into matrix power series and products. The applications of these decompositions are discussed.

Одержано зважене сингулярне розвинення матриць з виродженими вагами при використанні ортогональних матриць. Визначено необхідні та достатні умови, при яких існує побудоване зважене сингулярне розвинення матриць. На основі цього сингулярного розвинення матриць отримано розвинення зважених псевдообернених до них матриць з виродженими вагами та розвинення цих матриць в матричні степеневі ряди і добутки. Визначено застосування цих розвинень.

Введение. Впервые сингулярное разложение квадратных матриц получено в работе [1]. В работах [2, 3] получено взвешенное сингулярное разложение произвольных матриц с положительно определенными весами. Сингулярное разложение матриц широко применяется при теоретических исследованиях и многочисленных приложениях (см., например, [4]). В работе [5] получено взвешенное сингулярное разложение матриц с вырожденными весами на основе взвешенных ортогональных матриц и взвешенных псевдоортогональных матриц. Определены достаточные условия существования предложенного варианта взвешенного сингулярного разложения матриц. В [5] приведен обзор литературы по использованию взвешенного сингулярного разложения матриц с положительно определенными весами для теоретических исследований взвешенных псевдобратных матриц и построения методов вычисления взвешенных псевдобратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с положительно определенными весами.

В настоящей работе получено взвешенное сингулярное разложение матриц с вырожденными весами с использованием ортогональных матриц. На основании построенного взвешенного сингулярного разложения матриц дано представление взвешенных псевдообратных матриц с положительно полуопределенными матрицами-весами. Определены необходимые и достаточные условия, при которых существует построенное взвешенное сингулярное разложение матриц. Показано, что полученное сингулярное разложение матриц можно использовать при обосновании разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с отрицательными показателями степеней. Определено применение этих разложений. Отметим, что основные результаты, изложенные и доказанные в данной статье, опубликованы в [6] без доказательства утверждений.

Работа состоит из пяти пунктов. В первом пункте приводятся и исследуются необходимые для дальнейшего изложения свойства взвешенных псевдообратных матриц. Во втором пункте получено взвешенное сингулярное разложение матриц с вырожденными весами и на основании взвешенного сингулярного разложения матриц дано представление взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. В третьем пункте получены и исследованы разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с отрицательными показателями степеней. В четвертом и пятом пунктах на основании результатов третьего пункта строятся и исследуются соответственно регуляризованные задачи для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений и регуляризованные итерационные процессы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами.

1. Обозначения, определения, известные факты и вспомогательные утверждения. Отметим, что в дальнейшем везде предполагается вещественность используемых скаляров, векторов, матриц и пространств. Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения и определения. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно полуопределенные матрицы. Тогда взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами для матрицы A в [7] определяется как матрица $X = A^{+}_{BC}$, удовлетворяющая четырем условиям

$$AXA = A\,, \qquad XAX = X\,, \qquad (BAX)^T = BAX\,, \qquad (CXA)^T = CXA\,, \tag{1}$$

т. е. рассматривается случай, когда обе матрицы AX и XA симметризуемы слева вырожденными симметризаторами B и C.

В указанной работе установлено, что для существования единственного решения системы матричных уравнений (1) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\mathrm{rk}\,(BA) = \mathrm{rk}\,(A), \qquad AC^{+}_{EE}C = A\,, \tag{2}$$

где C^{+}_{EE} — псевдообратная матрица Мура – Пенроуза [8, 9], $\mathrm{rk}\,(A)$ — ранг матрицы A.

В настоящей работе ограничимся рассмотрением взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (1), (2). Другие определения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами и их исследование можно найти в работах [10 – 12].

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, где векторы — это матрицы размера $n\times 1$. Пусть H — симметричная положительно определенная или же положительно полуопределенная матрица. Через $\mathbb{R}^n(H)$ будем обозначать евклидово пространство в случае положительно определенной метрики или же псевдоевклидово в случае неотрицательной метрики, введенной скалярным произведением $(u,v)_H = (Hu,v)_E$, где $(u,v)_E = u^T v$, E — единичная матрица. Норму (полунорму) в $\mathbb{R}^n(H)$ введем соотношением $\|u\|_H = (u,u)_H^{1/2}$. В случае положительно полуопределенной матрицы H через $\overline{\mathbb{R}}^n(H) \subset \mathbb{R}^n(H)$ и $\overline{\mathbb{R}}^n(H^{+}_{EE}) \subset \mathbb{R}^n(H^{+}_{EE})$ будем обозначать подпространство векторов u, удовлетворяющих условию

$$HH^{+}_{EE}u = H^{1/2}H^{+1/2}_{EE}u = u\,, \tag{3}$$

где обозначено $H^{+1/2}_{EE} = (H^{1/2})^{+}_{EE}$.

В дальнейшем для положительно полуопределенных матриц H будем использовать обозначение $H_{EE}^{+p} = (H^p)_{EE}^{+}$, где p — целое или дробное число. Поскольку нуль-пространства матриц H, H_{EE}^{+}, HH_{EE}^{+} и $H^{1/2}H_{EE}^{+1/2}$ совпадают [13], полунормы $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H_{EE}^{+}}$ для векторов в $\mathbb{R}^n(H)$, $\mathbb{R}^n(H_{EE}^{+})$ становятся нормами в $\overline{\mathbb{R}}^n(H)$, $\overline{\mathbb{R}}^n(H_{EE}^{+})$.

Определим норму прямоугольной матрицы [14]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $V \in \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно определенные или положительно полуопределенные матрицы. Предполагаем выполнение условий

$$\mathrm{rk}\,(HA) = \mathrm{rk}\,(A), \qquad \mathrm{rk}(AV) = \mathrm{rk}(A). \tag{4}$$

Если H и V — положительно определенные матрицы, то условия в (4) заведомо выполняются.

Для множества матриц A, удовлетворяющих (4), норму введем соотношением

$$\|A\|_{HV} = \sup_{x\neq 0} \frac{\left\|H^{1/2}AVx\right\|_{E_m}}{\|x\|_{E_n}}, \tag{5}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а нижний индекс при единичной матрице означает ее размерность.

При таком определении норма матрицы A

$$\|A\|_{HV} = [\lambda_{\max}(VA^T HAV)]^{1/2}, \tag{6}$$

где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы L.

В [14] показано, что функция $\|\cdot\|_{HV}$, определенная формулой (5), при выполнении условий (4) является аддитивной матричной нормой. Если условия (или одно из условий) (4) не выполняются, то формула (5) определяет полунорму матрицы A. При $H = V = E$ функция (5) определяет спектральную норму матрицы A.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, а $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ — симметричные положительно определенные или положительно полуопределенные матрицы, причем выполняется одно из условий

$$AMM_{EE}^{+} = AM_{EE}^{+}M = A, \qquad MM_{EE}^{+}B = M_{EE}^{+}MB = B. \tag{7}$$

Тогда (см. [14, 15]) из определения нормы матриц (5) следует, что

$$\|AB\|_{HV} \leq \|A\|_{HM}\,\|B\|_{M_{EE}^{+2}V}. \tag{8}$$

Теперь определим матричную норму для квадратной матрицы [16]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — произвольная квадратная матрица, а $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричная положительно полуопределенная матрица, которые удовлетворяют условиям

$$\mathrm{rk}\,(HA) = \mathrm{rk}\,(AH) = \mathrm{rk}\,(A)\,. \tag{9}$$

Норму матрицы A определим соотношением

$$\|A\|_H = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_H}{\|x\|_H} = \sup_{x\neq 0}\frac{\left\|H^{1/2}AH_{EE}^{+1/2}H^{1/2}x\right\|_E}{\left\|H^{1/2}x\right\|_E}\,, \tag{10}$$

где x — произвольный вектор из $\overline{\mathbb{R}}^n(H)$.

При таком определении норма матрицы A

$$\|A\|_H = [\lambda_{\max}(H_{EE}^{+1/2}A^T HAH_{EE}^{+1/2})]^{1/2}\,. \tag{11}$$

Пусть A и B — квадратные матрицы одного порядка, причем выполняется одно из условий

$$AHH_{EE}^{+} = A\,, \qquad HH_{EE}^{+}B = B\,, \tag{12}$$

где H — симметричная положительно полуопределенная матрица. Тогда

$$\|AB\|_H \le \|A\|_H\,\|B\|_H\,, \tag{13}$$

т. е. функция $\|\cdot\|_H$, определенная формулой (10), при выполнении условий (9) и одного из условий (12) является мультипликативной матричной нормой.

Определим симметризуемые матрицы с положительно полуопределенными симметризаторами [16].

Определение 1. *Квадратную матрицу* U *будем называть симметризуемой слева или справа с помощью симметричных положительно полуопределенных матриц* M *и* N, *если выполняются соответственно условия*

$$MU = U^T M\,, \quad \mathrm{rk}\,(MU) = \mathrm{rk}\,(U)\,, \quad UN = NU^T\,, \quad \mathrm{rk}\,(UN) = \mathrm{rk}\,(U)\,. \tag{14}$$

Используя первое и второе условия в (2) и первое условие в (1), можно показать, что $\mathrm{rk}\,(BAX) = \mathrm{rk}\,(AX)$ и $\mathrm{rk}\,(CXA) = \mathrm{rk}\,(XA)$. Тогда третье условие в (1) вместе с первым условием в (2) и четвертое условие в (1) вместе со вторым условием в (2) будут соответственно означать, что матрицы AX и XA симметризуемы слева соответственно симметризаторами B и C.

В ряде работ определялись симметризуемые матрицы и изучались их свойства. В качестве симметризаторов, в основном, используются положительно определенные матрицы, а в работах [17, 18] изучались H-симметричные матрицы, причем предполагалось, что H — симметричная невырожденная знаконеопределенная матрица.

Определение 2. *Матрицу* Q, *определенную равенством* $Q^T HQ = I(H)$, *где* H — *симметричная положительно определенная* (*положительно полуопределенная*) *матрица,*

$I(H)$ — *матрица инерции для* H, *будем называть* H*-взвешенной ортогональной* (*псевдоортогональной*).

***Замечание* 1.** Различным видам обобщенной симметрии матриц посвящена диссертация [19], где изложены результаты исследований автора и приведена библиография известных публикаций на время написания работы.

Лемма 1. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *а* $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *и* $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — *симметричные положительно полуопределенные матрицы,* $U^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — *невырожденная матрица. Тогда*:

1) *при выполнении условий*

$$B_{EE}^{+}BA = A, \quad AC_{EE}^{+}C = A \tag{15}$$

ранги матриц $C_{EE}^{+1/2}A^T BAC_{EE}^{+1/2}$, $B^{1/2}AC_{EE}^{+}A^T B^{1/2}$, $U^T B^{1/2}AC_{EE}^{+1/2}$ *и* A *совпадают*;

2) *собственные значения матриц* $C_{EE}^{+1/2}A^T BAC_{EE}^{+1/2}$ *и* $B^{1/2}AC_{EE}^{+}A^T B^{1/2}$ *вещественные и неотрицательные*.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что из (15) следует $\mathrm{rk}\,(B^{1/2}A) = \mathrm{rk}\,(A)$, $\mathrm{rk}\,(AC_{EE}^{+1/2}) = \mathrm{rk}\,(A)$. В силу первого равенства из этих двух, второго равенства из (15) и легко проверяемого равенства $C_{EE}^{+}C = C_{EE}^{+1/2}C^{1/2}$ получаем $\mathrm{rk}\,(A) = \mathrm{rk}\,(B^{1/2}A) = \mathrm{rk}\{(B^{1/2}A)^T B^{1/2}A\} = \mathrm{rk}(A^T BA) = \mathrm{rk}(C^{1/2}C_{EE}^{+1/2}A^T BAC^{1/2}C_{EE}^{+1/2}) \le \mathrm{rk}(C_{EE}^{+1/2}A^T BAC_{EE}^{+1/2}) \le \mathrm{rk}(A)$, откуда $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(C_{EE}^{+1/2}A^T BAC_{EE}^{+1/2})$. Аналогично, в силу второго равенства из отмеченных выше двух и первого равенства из (15) получаем $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B^{1/2}AC_{EE}^{+}A^T B^{1/2})$. Поскольку ранг не изменяется при умножении на невырожденную матрицу, учитывая (15) и соотношение для рангов матриц-произведения и матриц-сомножителей, имеем

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B_{EE}^{+}BAC_{EE}^{+}C) = \mathrm{rk}(B^{1/2}AC_{EE}^{+1/2}) \le \mathrm{rk}(U^T B^{1/2}AC_{EE}^{+1/2}) \le \mathrm{rk}(A),$$

т. е. $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}\left(U^T B^{1/2}AC_{EE}^{+1/2}\right)$.

Второе утверждение леммы 1 вытекает из того обстоятельства, что рассматриваемые матрицы являются симметричными положительно полуопределенными [20].

Лемма 1 доказана.

При исследовании разложений взвешенных псевдообратных матриц будем использовать следующие утверждения [21].

Лемма 2. *Для любых матриц* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *и действительного числа* $0 < \delta < \infty$ *имеет место тождество*

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left\{E + \delta^{2^k}(P+\delta E)^{-(2^k)}\right\}(P+\delta E)^{-1}W = \sum_{k=1}^{2^n}\delta^{k-1}(P+\delta E)^{-k}W, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{16}$$

Лемма 3. *Для любых матриц* $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *и действительного числа* $0 < \delta < \infty$ *имеет место тождество*

$$M(L+\delta E)^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left\{E+\delta^{2^k}(L+\delta E)^{-(2^k)}\right\} = M\sum_{k=1}^{2^n}\delta^{k-1}(L+\delta E)^{-k}, \quad n=1,2,\ldots. \tag{17}$$

Пусть

$$Ax = f, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad f\in\mathbb{R}^m \tag{18}$$

— система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с произвольной матрицей $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Определение 3. *Вектор* x^+, *который является решением задачи: найти*

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n(C)\bigcap\Omega}\|x\|_C, \quad \Omega = \operatorname{Arg}\min_{x\in\mathbb{R}^n}\|Ax-f\|_B, \tag{19}$$

где B *и* C *— симметричные положительно полуопределенные матрицы, будем называть взвешенным нормальным псевдорешением с вырожденными весами* B *и* C *системы* (18).

***Замечание* 2**. В [7] показано, что задача (19) имеет единственное решение, которое определяется взвешенной псевдообратной матрицей с вырожденными весами, определенной условиями (1), (2) и правой частью системы (18) согласно формуле $x^+ = A^+_{BC}f$.

В дальнейшем вместо взвешенной псевдообратной матрицы A^+_{BC}, определенной условиями (1), (2), будем рассматривать взвешенную псевдообратную матрицу A^+_{BC}, определенную условиями (1), (15), т. е. первое условие $\operatorname{rk}(BA)=\operatorname{rk}(A)$ в (2) заменим более жестким условием $B^+_{EE}BA=A$. Легко убедиться, что из первого условия в (15) следует первое условие в (2), поэтому все свойства взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (1), (2), будут иметь место для матрицы, определенной условиями (1), (15), в том числе для последней будет иметь место замечание 2. Такая замена условия в определении взвешенной псевдообратной матрицы обусловлена тем обстоятельством, что рассмотренный вариант взвешенного сингулярного разложения матрицы A получен при выполнении условий (15). Кроме того, показано, что эти условия являются необходимыми и достаточными для существования рассмотренного варианта сингулярного разложения матриц.

2. Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц.

Теорема 1. *Пусть* $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ *и выполняются равенства* (15). *Тогда*:

1) *для матрицы* A *существуют ортогональные матрицы* $U\in\mathbb{R}^{m\times m}$ *и* $V\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *такие, что*

$$U^TB^{1/2}AC^{+1/2}_{EE}V = \Sigma = \begin{cases} \left\| \operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r,0,\ldots,0)O^{n-m}_m \right\|, & \text{если} \quad m\le n, \\ \left\| \begin{matrix}\operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r,0,\ldots,0)\\ O^n_{m-n}\end{matrix} \right\|, & \text{если} \quad m\ge n, \end{cases} \tag{20}$$

и

$$A = B_{EE}^{+1/2} U \Sigma V^T C^{1/2} , \tag{21}$$

где r *— ранг матрицы* A, *столбцы матрицы* U *— ортонормированные в* $\mathbb{R}^m(E)$ *собственные векторы матрицы* $B^{1/2} A C_{EE}^{+} A^T B^{1/2}$, *столбцы матрицы* V *— ортонормированные в* $\mathbb{R}^n(E)$ *собственные векторы матрицы* $C_{EE}^{+1/2} A^T B A C_{EE}^{+1/2}$, σ_i, $i = 1,\ldots,r$, *— квадратные корни из ненулевых собственных значений матрицы* $B^{1/2} A C_{EE}^{+} A^T B^{1/2}$ *или* $C_{EE}^{+1/2} A^T B A C_{EE}^{+1/2}$, $O_k^l \in \mathbb{R}^{k \times l}$ *— нулевая матрица*;

2) *условия* (15) *являются необходимыми и достаточными для существования взвешенного сингулярного разложения матрицы* A *вида* (21).

Доказательство. Прежде всего отметим, что $B_{EE}^{+} B = B_{EE}^{+1/2} B^{1/2}$, $C_{EE}^{+} C = C_{EE}^{+1/2} C^{1/2}$. Следовательно, при необходимости вместо условий (15) можно использовать условия $B_{EE}^{+1/2} B^{1/2} A = A$, $A C_{EE}^{+1/2} C^{1/2} = A$. Не ограничивая общности, будем считать, что $m \le n$ (в противном случае нужно заменить A на A^T). Обозначим $L = B^{1/2} A C_{EE}^{+} A^T B^{1/2}$. В лемме 1 отмечено, что собственные значения матрицы L вещественные и неотрицательные. Обозначим их через σ_i^2, где $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_r > 0$, $\sigma_{r+1},\ldots,\sigma_m = 0$, $r = rk(L)$, а согласно лемме 1 $r = rk(A)$. Поскольку матрица L симметричная, она ортогонально диагонализуемая, т. е.

$$U^T B^{1/2} A C_{EE}^{+} A^T B^{1/2} U = \Sigma_1^2 , \quad U^T U = E , \quad \Sigma_1^2 = \operatorname{diag}(\sigma_i^2) . \tag{22}$$

Определим матрицу $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$Z = U^T B^{1/2} A C_{EE}^{+1/2} . \tag{23}$$

Тогда на основании (22)

$$Z Z^T = U^T B^{1/2} A C_{EE}^{+1/2} C_{EE}^{+1/2} A^T B^{1/2} U = \Sigma_1^2 . \tag{24}$$

Следовательно, матрица $ZZ^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ является диагональной. При этом i-й диагональный элемент в (24) указывает, что норма $\|\cdot\|_E$ i-й строки z_i^T матрицы Z равна σ_i, т. е. $\|z_i\|_E = \sigma_i$, $i = 1,\ldots,m$. Равенство нулю недиагональных элементов в (24) показывает, что различные строки матрицы Z в $\mathbb{R}^n(E)$ попарно ортогональны. Ранг матрицы Z согласно лемме 1 равен рангу матрицы A, и если $r < m$, то первые r строк матрицы Z — ненулевые попарно ортогональные в $\mathbb{R}^n(E)$ векторы $z_1^T,\ldots,z_r^T$, а остальные строки $z_{r+1}^T,\ldots,z_m^T$ являются нулевыми векторами.

Построим взвешенную ортонормальную в $\mathbb{R}^n(E)$ систему векторов-строк $v_1^T,\ldots,v_n^T$. Обозначим

$$v_i^T = \sigma_i^{-1} z_i^T, \quad i = 1,\ldots,r. \tag{25}$$

Поскольку $||z_i||_E = \sigma_i$, то $||v_i||_E = 1$, $i = 1,\ldots,r$. При этом, очевидно, что векторы v_i^T попарно ортогональны в $\mathbb{R}^n(E)$, поскольку попарно ортогональны векторы z_i^T в $\mathbb{R}^n(E)$. Таким образом, имеем в $\mathbb{R}^n(E)$ взвешенную ортонормированную систему векторов-строк v_i^T, $i = 1,\ldots,r$.

Для $i = r+1,\ldots,n$ выберем в качестве v_i^T такие векторы с единичной нормой, чтобы векторы $v_1^T,\ldots,v_n^T$ были ортонормальны в $\mathbb{R}^n(E)$. Для этого воспользуемся системой линейно независимых собственных векторов $w_{r+1}^T,\ldots,w_n^T$, соответствующих нулевому собственному значению симметричной матрицы $K = C_{EE}^{+1/2} A^T BAC_{EE}^{+1/2}$ для процесса ортонормирования Грама – Шмидта. Положим $y_{r+1}^T = w_{r+1}^T + \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i^T$, где w_{r+1}^T — собственный вектор матрицы K, соответствующий $(r+1)$-му собственному значению этой матрицы. Подберем числа α_i так, чтобы вектор y_{r+1}^T был ортогонален в $\mathbb{R}^n(E)$ к $v_1^T,\ldots,v_r^T$. Для этого нужно, чтобы выполнялось равенство

$$(y_{r+1}, v_i)_E = (w_{r+1}, v_i)_E + \alpha_i ||v_i||_E^2 = 0, \quad i = 1,2,\ldots,r. \tag{26}$$

Отсюда $\alpha_i = -(w_{r+1}, v_i)_E$ и $v_{r+1}^T = \dfrac{y_{r+1}^T}{||y_{r+1}||_E}$, так как векторы v_i^T, $i = 1,\ldots,r$, имеют в $\mathbb{R}^n(E)$ единичную норму.

Если y_{r+1}^T — нулевой вектор, то положим $y_{r+1}^T = w_{r+1}^T + w_j^T + \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i^T$, где w_j^T — любой собственный вектор матрицы K. Вместо (26) будем иметь

$$(y_{r+1}, v_i)_E = (w_{r+1}, v_i)_E + (w_j, v_i)_E + \alpha_i ||v_i||_E^2 = 0, \quad i = 1,2,\ldots,r,$$

откуда $\alpha_i = (w_{r+1},\, v_i)_E - (w_j,\, v_i)_E$ и $v_{r+1}^T = \dfrac{y_{r+1}^T}{||y_{r+1}||_E}$. Далее строим векторы $y_{r+2}^T = w_{r+2}^T + \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i v_i^T$, $y_{r+3}^T,\ldots,y_n^T$ по предыдущей схеме.

Пусть V^T — матрица, строками которой являются векторы $v_1^T,\ldots,v_n^T$, тогда $V^T V = E$, т. е. V — ортогональная матрица. Из (25) имеем $z_i^T = \sigma_i v_i^T$, и матрицу Z можно представить в виде

$$Z = \Sigma V^T, \tag{27}$$

где $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — матрица вида $\Sigma = \|\Sigma_1 \; O\|$, а матрица $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ определена формулой (22), $O \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$ — нулевая матрица.

Из (23) и (27) следует

$$U^T B^{1/2} A C_{EE}^{+1/2} = \Sigma V^T . \tag{28}$$

Умножим справа левую и правую части равенства (28) на V. Учитывая ортогональность матрицы V, имеем $U^T B^{1/2} A C_{EE}^{+1/2} V = \Sigma$, т. е. получили формулу (20) приведения матрицы A к диагональному виду при $m \le n$. Умножая (28) слева на $B_{EE}^{+1/2} U$, а справа на $C^{1/2}$, учитывая равенства (15) и ортогональность матрицы U, получаем $A = B_{EE}^{+1/2} U \Sigma V^T C^{1/2}$, т. е. формулу (21).

Теперь для доказательства теоремы 1 осталось показать, что столбцы ортогональной матрицы V являются собственными векторами матрицы $C_{EE}^{+1/2} A^T B A C_{EE}^{+1/2}$. Для этого сначала покажем, что $v_i \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+} C)$.

Учитывая второе равенство в (15), которое означает, что векторы-строки матрицы A принадлежат $\overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+} C)$, имеем $U^T B^{1/2} A U \Sigma V^T C_{EE}^{+1/2} C_{EE}^{+} C = U^T B^{1/2} A C_{EE}^{+1/2} = Z$, откуда следует $z_i^T C_{EE}^{+} C = z_i^T$ и в силу (25) $v_i \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+} C)$, $i = 1,\ldots,r$. В качестве v_i при $i = r + 1,\ldots,n$ взяты собственные векторы матрицы $K = C_{EE}^{+1/2} A^T B A C_{EE}^{+1/2}$, соответствующие нулевому собственному значению этой матрицы. Легко убедиться, что $C_{EE}^{+} C K = K$ и, следовательно, $K v_i = \lambda v_i$, $C_{EE}^{+} C K v_i = \lambda C_{EE}^{+} C v_i = \lambda v_i$, так что среди векторов v_i нет принадлежащих нуль-пространству проекционной матрицы $C_{EE}^{+} C$, в силу чего $v_i \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+} C)$, $i = r+1,\ldots,n$. Тогда на основании изложенного выше $v_i \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+} C)$, $i = 1,\ldots,n$. Учитывая последнее обстоятельство и равенства (21), $C_{EE}^{+} C = C_{EE}^{+1/2} C^{1/2}$, получаем

$$K = C_{EE}^{+1/2} C^{1/2} V \Sigma^T U^T B_{EE}^{+1/2} B B_{EE}^{+1/2} U \Sigma V^T C^{1/2} C_{EE}^{+1/2} = V \Sigma^T P \Sigma V^T ,$$

т. е.

$$C_{EE}^{+1/2} A^T B A C_{EE}^{+1/2} = V \Sigma^T P \Sigma V^T , \tag{29}$$

где $P = U^T B_{EE}^{+} B U$.

Легко убедиться, что P — проекционная матрица. Рассмотрим матрицу $P\Sigma$. Очевидно, что $\mathrm{rk}(P) \ge \mathrm{rk}(\Sigma)$. Тогда в силу леммы 1 и равенства (22) имеем $\mathrm{rk}(\Sigma) = \mathrm{rk}\left(U^T B^{1/2} A C_{EE}^{+1/2} \right) = \mathrm{rk}\left(C_{EE}^{+1/2} A^T B A C_{EE}^{+1/2} \right) = \mathrm{rk}(A)$ и очевидно, что $\mathrm{rk}(P) \ge \mathrm{rk}(\Sigma)$. В силу (29) ненулевые столбцы матрицы Σ не могут принадлежать нуль-пространству проекционной матрицы P, следовательно, $P\Sigma = \Sigma$ и равенство (29) принимает вид

$$C_{EE}^{+1/2} A^T BAC_{EE}^{+1/2} = V\Sigma_2^2 V^T, \tag{30}$$

где $\Sigma_2^2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\Sigma_2^2 = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0)$.

Ненулевые собственные значения матриц $B^{1/2} AC_{EE}^{+} A^T B^{1/2}$ и $C_{EE}^{+1/2} A^T BAC_{EE}^{+1/2}$ совпадают, так как эти матрицы получены в результате перестановки матриц-сомножителей [22]. Тогда диагональные элементы матрицы Σ_2^2 являются собственными значениями матрицы $C_{EE}^{+1/2} A^T BAC_{EE}^{+1/2}$. После умножения равенства (30) справа на V в силу ортогональности матрицы V получаем $C_{EE}^{+1/2} A^T BAC_{EE}^{+1/2} V = V\Sigma_2^2$, откуда следует, что столбцы матрицы V являются собственными векторами матрицы $C_{EE}^{+1/2} A^T BAC_{EE}^{+1/2}$.

Таким образом, установлено, что условия (15) являются достаточными для существования взвешенного сингулярного разложения матрицы A вида (21). Чтобы показать, что эти условия являются необходимыми для существования взвешенного сингулярного разложения матрицы A вида (21), достаточно воспользоваться равенствами $B_{EE}^{+} BB_{EE}^{+1/2} = B_{EE}^{+1/2}$, $C^{1/2} C_{EE}^{+} C = C^{1/2}$, в силу которых для разложения матрицы A вида (21) имеем $B_{EE}^{+} BA = A$, $AC_{EE}^{+} C = A$, т. е. для матрицы A выполняются условия (15).

Теорема 1 доказана.

Пусть $\Sigma_{EE}^{+} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — матрица, полученная из матрицы Σ, определенной формулой (20), транспонированием и заменой положительных диагональных элементов обратными величинами. Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрица Σ_{EE}^{+} является псевдообратной матрицей Мура – Пенроуза к матрице Σ, т. е. удовлетворяет условиям

$$\Sigma\Sigma_{EE}^{+}\Sigma = \Sigma, \quad \Sigma_{EE}^{+}\Sigma\Sigma_{EE}^{+} = \Sigma_{EE}^{+}, \quad (\Sigma\Sigma_{EE}^{+})^T = \Sigma\Sigma_{EE}^{+}, \quad (\Sigma_{EE}^{+}\Sigma)^T = \Sigma_{EE}^{+}\Sigma. \tag{31}$$

Теорема 2. *Взвешенная псевдообратная матрица для матрицы* A *при выполнении условий* (15) *имеет разложение*

$$A_{BC}^{+} = C_{EE}^{+1/2} V\Sigma_{EE}^{+} U^T B^{1/2}, \tag{32}$$

где матрицы V, U, B, C *определены в теореме* 1, *а матрица* Σ_{EE}^{+} *определена условиями* (31).

Доказательство. Достаточно показать, что матрица A_{BC}^{+}, определенная формулой (32), удовлетворяет системе (1) при выполнении условий (15).

Учитывая разложения матриц A и A_{BC}^{+}, представленные соответственно формулами (21) и (32), и то обстоятельство, что столбцы матрицы V принадлежат $\overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+} C)$, получаем

$$AA_{BC}^{+}A \,=\, B_{EE}^{+1/2}U\Sigma V^{T}C^{1/2}C_{EE}^{+1/2}V\Sigma_{EE}^{+}U^{T}B^{1/2}B_{EE}^{+1/2}U\Sigma V^{T}C^{1/2} \,=\, B_{EE}^{+1/2}U\Sigma\Sigma_{EE}^{+}P\Sigma V^{T}C^{1/2}\,,$$

где $P = U^{T}B_{EE}^{+}BU = U^{T}B_{EE}^{+1/2}B^{1/2}U$ — проекционная матрица. При доказательстве теоремы 1 установлено, что $P\Sigma = \Sigma$. Тогда, учитывая первое равенство в (31), из последнего равенства имеем $AA_{BC}^{+}A = B_{EE}^{+1/2}U\Sigma\Sigma_{EE}^{+}\Sigma V^{T}C^{1/2} = B_{EE}^{+1/2}U\Sigma V^{T}C^{1/2} = A$, т. е. матрица A_{BC}^{+} удовлетворяет первому условию в (1).

В силу второго равенства в (31), отмеченных выше свойств и разложений матриц A и A_{BC}^{+} имеем

$$A_{BC}^{+}AA_{BC}^{+} \,=\, C_{EE}^{+1/2}V\Sigma_{EE}^{+}U^{T}B^{1/2}B_{EE}^{+1/2}U\Sigma V^{T}C^{1/2}C_{EE}^{+1/2}V\Sigma_{EE}^{+}U^{T}B^{1/2} \,=$$

$$=\, C_{EE}^{+1/2}V\Sigma_{EE}^{+}P\Sigma\Sigma_{EE}^{+}U^{T}B^{1/2} \,=\, C_{EE}^{+1/2}V\Sigma_{EE}^{+}U^{T}B^{1/2} \,=\, A_{BC}^{+}\,,$$

так что матрица A_{BC}^{+} удовлетворяет и второму условию в (1).

Осталось показать, что матрицы BAA_{BC}^{+} и $CA_{BC}^{+}A$ симметричные. Учитывая ортогональность матрицы V, принадлежность ее столбцов $\overline{\mathbb{R}}^{n}(C_{EE}^{+}C)$ и равенство $BB_{EE}^{+1/2} = B^{1/2}$, получаем

$$BAA_{BC}^{+} = BB_{EE}^{+1/2}U\Sigma V^{T}C^{1/2}C_{EE}^{+1/2}V\Sigma_{EE}^{+}U^{T}B^{1/2} = B^{1/2}U\Sigma\Sigma_{EE}^{+}U^{T}B^{1/2} \,=\, B^{1/2}U\Sigma\Sigma_{EE}^{+}U^{T}B^{1/2}\,,$$

откуда следует, что BAA_{BC}^{+} — симметричная матрица. Наконец, с учетом равенств $CC_{EE}^{+1/2} = C^{1/2}$, $U^{T}B^{1/2}B_{EE}^{+1/2}U\Sigma = P\Sigma = \Sigma$ имеем

$$CA_{BC}^{+}A \,=\, CC_{EE}^{+1/2}V\Sigma_{EE}^{+}U^{T}B^{1/2}B_{EE}^{+1/2}U\Sigma V^{T}C^{1/2} = C^{1/2}V\Sigma_{EE}^{+}\Sigma V^{T}C^{1/2}\,,$$

т. е. мы установили, что $CA_{BC}^{+}A$ — симметричная матрица.

Кроме того, из первого условия в (15) следует первое условие в (2), так что для матрицы, определенной формулой (32), выполняются условия (1), (2).

Теорема 2 доказана.

***Замечание* 3.** Полученные взвешенные сингулярные разложения матриц и псевдообратных к ним являются обобщением соответствующих разложений для случая положительно определенных весов. Например, в случае положительно определенных весов условия (15) заведомо выполняются, столбцы матрицы U — ортонормированные в $\mathbb{R}^{m}(E)$ собственные векторы матрицы $B^{1/2}AC^{-1}A^{T}B^{1/2}$, столбцы матрицы V состоят из ортонормированных в $\mathbb{R}^{n}(E)$ собственных векторов матрицы $C^{-1/2}A^{T}BAC^{-1/2}$.

3. Разложения в ряды и произведения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. Для взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (1), (2), в работе [5] получены разложения в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней на основе представления взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых и симметричных матриц. В этом пункте на основании взвешенного сингулярного разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, предложенного в настоящей работе, получены и исследованы разложения в матричные степенные ряды и произведения взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (1), (15), с отрицательными показателями степеней.

Теорема 3. *Для произвольной матрицы* $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *симметричных положительно полуопределенных матриц* $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *и* $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *удовлетворяющих условиям* (15), *и для действительного числа* $0 < \delta < \infty$ *имеют место следующие разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды*:

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C_{EE}^{+} A^{T} B^{1/2} \left(B^{1/2} A C_{EE}^{+} A^{T} B^{1/2} + \delta E \right)^{-k} B^{1/2}, \tag{33}$$

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} \left(C_{EE}^{+} A^{T} B A + \delta E \right)^{-k} C_{EE}^{+} A^{T} B, \tag{34}$$

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C_{EE}^{+} A^{T} B \left(A C_{EE}^{+} A^{T} B + \delta E \right)^{-k}, \tag{35}$$

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C_{EE}^{+} \left(A^{T} B A C_{EE}^{+} + \delta E \right)^{-k} A^{T} B, \tag{36}$$

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C_{EE}^{+1/2} \left(C_{EE}^{+1/2} A^{T} B A C_{EE}^{+1/2} + \delta E \right)^{-k} C_{EE}^{+1/2} A^{T} B, \tag{37}$$

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C_{EE}^{+} A^{T} \left(B A C_{EE}^{+} A^{T} + \delta E \right)^{-k} B, \tag{38}$$

причем

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,p}^{+} \right\|_{CB_{EE}^{+1/2}} \leq \sigma_{*}^{-1} \delta^{p} (\delta + \sigma_{*}^{2})^{-p}, \tag{39}$$

где $A_{\delta,p}^{+} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} C_{EE}^{+} A^{T} B^{1/2} \left(B^{1/2} A C_{EE}^{+} A^{T} B^{1/2} + \delta E \right)^{-k} B^{1/2}$, $p = 1, 2, \ldots$, σ_{*} — *минимальный ненулевой диагональный элемент матрицы* Σ, *определенной в* (20).

Доказательство. Сначала докажем соотношение (33). Обозначим $L = B^{1/2} A C_{EE}^{+} A^{T} B^{1/2}$. Матрица L симметричная и положительно полуопределенная, так что ее собственные значения действительные и неотрицательные. Обозначим $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, где λ_i — собственные значения матрицы L. Рассмотрим одно из слагаемых ряда (33). Поскольку матрицы L^{k}, $(L + \delta E)^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$, симметричные, для них имеет место спектральное разложение с одной и той же ортогональной матрицей U, определенной в теореме 1. Используя это обстоятельство, сингулярное разложение матрицы A, равенство $C_{EE}^{+}C^{1/2} = C_{EE}^{+1/2}$, получаем

$$\delta^{k-1}C_{EE}^{+}A^{T}B^{1/2}(L+\delta E)^{-k}B^{1/2} = \delta^{k-1}C_{EE}^{+}C^{1/2}V\Sigma^{T}U^{T}B_{EE}^{+1/2}B^{1/2}U(\Sigma\Sigma^{T}+\delta E)^{-k}U^{T}B^{1/2} =$$

$$= \delta^{k-1}C_{EE}^{+1/2}V\Sigma^{T}P(\Sigma\Sigma^{T}+\delta E)^{-k}U^{T}B^{1/2}, \tag{40}$$

где $P = U^{T}B_{EE}^{+1/2}B^{1/2}U$.

Легко убедиться, что P — проекционная матрица. Рассмотрим матрицу $\Sigma^{T}P$. Очевидно, что $\mathrm{rk}(P) \geq \mathrm{rk}(\Sigma^{T}) = \mathrm{rk}(\Sigma)$, так как в силу леммы 1 и равенств (20), (22) имеем $\mathrm{rk}(\Sigma^{T}) = \mathrm{rk}(\Sigma) = \mathrm{rk}(B^{1/2}AC_{EE}^{+}A^{T}B^{1/2}) = \mathrm{rk}(A)$. Тогда ненулевые столбцы матриц Σ^{T} и Σ не могут принадлежать нуль-пространству матрицы P, следовательно, $P\Sigma = \Sigma$, $\Sigma^{T}P = \Sigma^{T}$ и в силу (40) можем записать

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k-1}C_{EE}^{+}A^{T}B^{1/2}(L+\delta E)^{-k}B^{1/2} = \delta^{-1}C_{EE}^{+1/2}V\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k}\Sigma^{T}(\Sigma\Sigma^{T}+\delta E)^{-k}U^{T}B^{1/2}. \tag{41}$$

Поскольку $\delta^{k}(\Sigma\Sigma^{T}+\delta E)^{-k} = \mathrm{diag}\left[\delta^{k}(\sigma_i^{2}+\delta)^{-k}\right]$ и $\delta(\sigma_i^{2}+\delta)^{-1} < 1$ при $\sigma_i > 0$, а $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\delta(\Sigma\Sigma^{T}+\delta E)^{-1}\right]^{k} = \delta\sigma_i^{-2}$, $i = 1,\ldots,r$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k}\Sigma^{T}(\Sigma\Sigma^{T}+\delta E)^{-k}$ вследствие структуры матрицы Σ^{T} сходится, причем имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k}\Sigma^{T}(\Sigma\Sigma^{T}+\delta E)^{-k} = \delta\Sigma_{EE}^{+}, \tag{42}$$

где Σ_{EE}^{+} — псевдообратная матрица Мура – Пенроуза, определенная условиями (31).

Учитывая (32) и (42), из (41) получаем $\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k-1}C_{EE}^{+}A^{T}B^{1/2}(L+\delta E)^{-k}B^{1/2} = C_{EE}^{+1/2}V\Sigma_{EE}^{+}U^{T}B^{1/2} = A_{BC}^{+}$, т. е. разложение (33) взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричный степенной ряд с отрицательными показателями степеней.

Аналогично, используя спектральное разложение матрицы $C_{EE}^{+1/2}A^{T}BAC_{EE}^{+1/2} + \delta E$ и взвешенное сингулярное разложение матрицы A_{BC}^{+} согласно формуле (32), можно получить разложение (37) взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричный степенной ряд.

Рассмотрим разложение (35) взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричный степенной ряд. Для доказательства соотношения (35) будем использовать разложение взвешенных псевдообратных матриц в матричный степенной ряд (33) и свойство псевдообращения по Муру – Пенроузу для произведения двух матриц. Известно (см., например, [13]), что для произведения двух произвольных прямоугольных матриц равенство

$$(MN)^{+}_{EE} = N^{+}_{EE} M^{+}_{EE} \tag{43}$$

в общем случае не является справедливым. В монографии [13] указаны необходимые и достаточные условия, при которых равенство имеет место. Для этого должны выполняться соотношения

$$M^{+}_{EE} MNN^{T} M^{T} = NN^{T} M^{T}, \quad NN^{+}_{EE} M^{T} MN = M^{T} MN. \tag{44}$$

Рассмотрим матрицу $W = (L + \delta E)^{-1} B^{1/2}$, где, как и выше, $L = B^{1/2} A C^{+}_{EE} A^{T} B^{1/2}$. Учитывая равенство $(A^{+}_{EE})^{+}_{EE} = A$, справедливое для произвольной матрицы A [13], матрицу W записываем в виде $W = (L + \delta E)^{-1} \left(B^{+1/2}_{EE} \right)^{+}_{EE}$. В формуле (43) положим $N = L + \delta E$, $M = B^{+1/2}_{EE}$. Нетрудно убедиться, что такие матрицы M и N удовлетворяют условиям (44). Тогда, учитывая первое равенство в (15), равенство $B^{1/2} = B^{1/2} B^{1/2} B^{+1/2}_{EE}$, на основании (43) получаем $W = \left(B^{+1/2}_{EE} L + \delta B^{+1/2}_{EE} \right)^{+}_{EE} = \left(A C^{+}_{EE} A^{T} B B^{+1/2}_{EE} + \delta B^{+1/2}_{EE} \right)^{+}_{EE}$. В формуле (43) положим $N = B^{+1/2}_{EE}$, $M = A C^{+}_{EE} A^{T} B + \delta E$. Нетрудно убедиться, что и в этом случае матрицы M и N удовлетворяют условиям (44) и матрица W принимает вид $W = B^{1/2} (A C^{+}_{EE} A^{T} B + \delta E)^{-1}$. Легко проверить, что для любого $k = 2, 3, \ldots$ получаем

$$(L + \delta E)^{-k} B^{1/2} = B^{1/2} (A C^{+}_{EE} A^{T} B + \delta E)^{-k}. \tag{45}$$

Тогда в силу (33), (45)

$$A^{+}_{BC} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C^{+}_{EE} A^{T} B^{1/2} (L + \delta E)^{-k} B^{1/2} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C^{+}_{EE} A^{T} B (A C^{+}_{EE} A^{T} B + \delta E)^{-k},$$

что и требовалось показать. Аналогично, используя равенство (43), можно убедиться в справедливости остальных разложений взвешенной псевдообратной матрицы, которые приведены в теореме 3.

Перейдем к доказательству оценки (39). На основании (41) с учетом вида $A^{+}_{\delta,p}$, определенного в теореме 3, получаем

$$A^{+}_{BC} - A^{+}_{\delta,p} = \delta^{-1} C^{+1/2}_{EE} V \sum_{k=p+1}^{\infty} \delta^{k} \Sigma^{T} (\Sigma\Sigma^{T} + \delta E)^{-k} U^{T} B^{1/2}. \tag{46}$$

Оценивать погрешность приближения $Z = A^{+}_{BC} - A^{+}_{\delta,p}$ к взвешенной псевдообратной матрице будем в норме $\|\cdot\|_{CB^{+1/2}_{EE}}$. Необходимо показать, что для матрицы Z выполняется аксиома матричной нормы $\|Z\|_{CB^{+1/2}_{EE}} > 0$, т. е. это будет норма, а не полунорма. Для этого достаточно показать, что для матриц Z и C выполняется первое условие из (4), а для матриц Z и

$B_{EE}^{+1/2}$ — второе условие. Из вида матрицы Z, определенной формулой (46), следует $C_{EE}^{+}CZ = Z$. Тогда $\mathrm{rk}(Z) = \mathrm{rk}(C_{EE}^{+}CZ) \le \mathrm{rk}(CZ) \le \mathrm{rk}(Z)$, откуда и следует выполнение первого условия из (4) для матриц Z и C. Поскольку нуль-пространства матрицы $B^{1/2}$ и проекционной матрицы $B^{1/2}B_{EE}^{+1/2}$ совпадают и $\mathrm{rk}(B_{EE}^{+1/2}) \ge \mathrm{rk}(Z)$, то $\mathrm{rk}(ZB_{EE}^{+1/2})^T = \mathrm{rk}(ZB_{EE}^{+1/2}) = \mathrm{rk}(Z)$, т. е. второе условие из (4) для матриц Z и $B_{EE}^{+1/2}$ также выполняется.

Положим в (8) $M = E_n$, тогда (7) выполняется и из (46) имеем

$$\left\|A_{BC}^{+} - A_{\delta,p}^{+}\right\|_{CB_{EE}^{+1/2}} \le \delta^{-1}\left\|C_{EE}^{+1/2}V\right\|_{CE_n}\left\|\sum_{k=p+1}^{\infty}\delta^k\Sigma^T(\Sigma\Sigma^T + \delta E)^{-k}U^T B^{1/2}\right\|_{E_n B_{EE}^{+1/2}}.$$

При доказательстве теоремы 1 установлено, что $v_i \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+}C)$, так что матрица V взвешенная псевдоортогональная с весом $C_{EE}^{+}C$, т. е. $V^T C_{EE}^{+}CV = I(C_{EE}^{+}C)$. Тогда согласно определению величины нормы равенством (6) имеем $\left\|C_{EE}^{+1/2}V\right\|_{CE_n} = 1$, а для оценки второй нормы в правой части последнего неравенства опять используем (8), где положим $M = E_m$. Получим

$$\left\|A_{BC}^{+} - A_{\delta,p}^{+}\right\|_{CB_{EE}^{+1/2}} \le \delta^{-1}\left\|\sum_{k=p+1}^{\infty}\delta^k\Sigma^T(\Sigma^T\Sigma + \delta E)^{-k}\right\|_{E_n E_m}\left\|U^T B^{1/2}\right\|_{E_m B_{EE}^{+1/2}}. \tag{47}$$

Поскольку U — ортогональная матрица, а собственные значения матрицы-произведения двух квадратных матриц при их перестановке не изменяются [22], в силу определения величины матричной нормы согласно формуле (6) имеем $\left\|U^T B^{1/2}\right\|_{E_m B_{EE}^{+1/2}} = 1$ и (47) принимает вид

$$\left\|A_{BC}^{+} - A_{\delta,p}^{+}\right\|_{CB_{EE}^{+1/2}} \le \delta^{-1}\left\|\sum_{k=p+1}^{\infty}\delta^k\Sigma^T(\Sigma^T\Sigma + \delta E)^{-k}\right\|_{E_n E_m}. \tag{48}$$

Нетрудно убедиться, что сумма $\sum_{k=p+1}^{\infty}\delta^k\sigma_i(\sigma_i^2 + \delta)^{-k} = \delta^{p+1}\sigma_i^{-1}(\sigma_i^2 + \delta)^{-p}$ при $\sigma_i \ne 0$ и равна нулю при $\sigma_i = 0$. Тогда, учитывая то обстоятельство, что $\delta^k\sigma_i(\Sigma^T\Sigma + \delta E)^{-k}\Sigma^T = \mathrm{diag}\left[\delta^k\sigma_i(\sigma_i^2 + \delta)^{-k}\right]$, и формулу для величины матричной нормы (6), из неравенства (48) получаем оценку (39), что и завершает доказательство теоремы 3.

***Замечание* 4.** Аналогично оценке (39) получим такую же оценку, если в качестве матрицы $A_{\delta,p}^{+}$ возьмем другие матрицы, определенные согласно формулам (34) – (38).

При выполнении предположений теоремы 3 на основании (16) и (34) имеем следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричное степенное произведение:

$$A_{BC}^{+} = \prod_{k=0}^{\infty}\left\{E+\delta^{2^k}(C_{EE}^{+}A^T BA+\delta E)^{-(2^k)}\right\}\left(C_{EE}^{+}A^T BA+\delta E\right)^{-1}C_{EE}^{+}A^T B\,. \tag{49}$$

Обозначим $A_{\delta,n}^{+} = \prod_{k=0}^{n-1}\left\{E+\delta^{2^k}(C_{EE}^{+}A^T BA+\delta E)^{-(2^k)}\right\}(C_{EE}^{+}A^T BA+\delta E)^{-1}C_{EE}^{+}A^T B$, $n=1$, $2,\ldots$. Тогда в силу тождества (16) и замечания 4 получаем

$$\left\|A_{BC}^{+}-A_{\delta,n}^{+}\right\|_{CB_{EE}^{+1/2}} \le \sigma_*^{-1}\delta^{2^n}(\delta+\sigma_*^2)^{-(2^n)}\,. \tag{50}$$

При выполнении предположений теоремы 3 в силу (17) и (35) имеем следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричное степенное произведение:

$$A_{BC}^{+} = C_{EE}^{+}A^T B(AC_{EE}^{+}A^T B+\delta E)^{-1}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+\delta^{2^k}(AC_{EE}^{+}A^T B+\delta E)^{-(2^k)}\}\,. \tag{51}$$

Обозначим $A_{\delta,n}^{+} = C_{EE}^{+}A^T B(AC_{EE}^{+}A^T B+\delta E)^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}\{E+\delta^{2^k}(AC_{EE}^{+}A^T B+\delta E)^{-(2^k)}\}$, $n=1$, $2,\ldots$. Тогда в силу тождества (17), соотношения (39) и замечания 4 получаем

$$\left\|A_{BC}^{+}-A_{\delta,n}^{+}\right\|_{CB_{EE}^{+1/2}} \le \sigma_*^{-1}\delta^{2^n}(\delta+\sigma_*^2)^{-(2^n)}\,. \tag{52}$$

4. Регуляризация задач. Из оценки (39) и замечания 4 следует, что для любого $p = 1,2,\ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы:

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta\to+0}\sum_{k=1}^{p}\delta^{k-1}(C_{EE}^{+}A^T BA+\delta E)^{-k}C_{EE}^{+}A^T B\,, \tag{53}$$

а из оценки (50) для любого $n=1,2,\ldots$ —

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta\to+0}\prod_{k=0}^{n-1}\left\{E+\delta^{2^k}(C_{EE}^{+}A^T BA+\delta E)^{-(2^k)}\right\}(C_{EE}^{+}A^T BA+\delta E)^{-1}C_{EE}^{+}A^T B\,. \tag{54}$$

Из предельных представлений (53), (54) взвешенных псевдообратных матриц следует, что при достаточно малом параметре δ матрицы A_{BC}^{+} и $A_{\delta,p}^{+}$, $A_{\delta,n}^{+}$ могут как угодно мало отличаться одна от другой и на основании предложенных предельных представлений можно вычислять приближения к взвешенным псевдообратным матрицам. Оценки близости взвешенных псевдообратных матриц и их приближенных значений даны формулами (39), (50), (52).

На основе предельных представлений взвешенных псевдообратных матриц можно также предложить регуляризованные задачи для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений. Сначала рассмотрим регуляризованную задачу для нахождения взвешенного нормального псевдорешения СЛАУ (18) на основе формулы (53). Согласно (53) приближение к взвешенному нормальному псевдорешению при достаточно малом δ можно получить по формуле $x_{\delta,p} = A^{+}_{\delta,p} f = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C^{+}_{EE} A^T BA + \delta E)^{-k} C^{+}_{EE} A^T Bf$. Умножив слева обе части этого равенства на $(C^{+}_{EE} A^T BA + \delta E)^{p-m}$, где $m = 0, 1, \ldots, p-1$, получим СЛАУ для вычисления приближения к взвешенному нормальному псевдорешению системы (18):

$$(C^{+}_{EE} A^T BA + \delta E)^{p-m} x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C^{+}_{EE} A^T BA + \delta E)^{p-m-k} C^{+}_{EE} A^T Bf . \qquad (55)$$

В частности, при $m = 0$

$$(C^{+}_{EE} A^T BA + \delta E)^{p} x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C^{+}_{EE} A^T BA + \delta E)^{p-k} C^{+}_{EE} A^T Bf , \qquad (56)$$

а при $m = p-1$

$$(C^{+}_{EE} A^T BA + \delta E) x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C^{+}_{EE} A^T BA + \delta E)^{1-k} C^{+}_{EE} A^T Bf . \qquad (57)$$

Поскольку матрица $C^{+}_{EE} A^T BA$ — произведение двух симметричных положительно полуопределенных матриц, ее собственные значения неотрицательные и вещественные [20]. Тогда матрица $(C^{+}_{EE} A^T BA + \delta E)^{p}$, $p = 1, 2, \ldots$, при $\delta > 0$ невырождена и, следовательно, существует единственное решение систем (55) – (57).

При $p \geq 2$ для решения СЛАУ (57) необходимо вычислять обратную матрицу к матрице $C^{+}_{EE} A^T BA + \delta E$. При решении СЛАУ (56) обратную матрицу не нужно вычислять, но может ухудшаться обусловленность матрицы $(C^{+}_{EE} A^T BA + \delta E)^{p}$. Вопрос выбора СЛАУ для вычисления $x_{\delta,p}$, по-видимому, будет зависеть не столько от объема вычислительной работы, сколько от величины погрешности, вносимой вычислительным процессом.

Пусть x^{+} — взвешенное нормальное псевдорешение системы (18), а $x_{\delta,p}$ — решение одной из систем (55) – (57). Тогда

$$x^{+} - x_{\delta,p} = A^{+}_{BC} f - A^{+}_{\delta,p} f = (A^{+}_{BC} - A^{+}_{\delta,p}) f . \qquad (58)$$

Оценивать погрешность $z = x^{+} - x_{\delta,p}$ будем в векторной норме $\|\cdot\|_C$. Тогда нужно показать, что для вектора z выполняется первая аксиома векторной нормы $\|\cdot\|_C > 0$, т. е. это будет норма, а не полунорма. Для этого достаточно показать, что $z \in \overline{\mathbb{R}}^n(C)$. Поскольку

$z = (A^+_{BC} - A^+_{\delta,p})f = Zf$ и при доказательстве теоремы 3 установлено, что $C^+_{EE}CZ = Z$, то очевидно, что $z \in \overline{\mathbb{R}}^n(C)$.

На основании определения нормы прямоугольной матрицы формулой (5), равенств $B^{1/2}B^{+1/2}_{EE}B^{1/2} = B^{1/2}$, $BB^{+1/2}_{EE}B^{1/2} = B$, вида матриц A^+_{BC}, $A^+_{\delta,p}$, определенных в теореме 3, из (58) имеем $\left\|x^+ - x_{\delta,p}\right\|_C = \left\|(A^+_{BC} - A^+_{\delta,p})B^{+1/2}_{EE}B^{1/2}f\right\|_C \le \left\|A^+_{BC} - A^+_{\delta,p}\right\|_{CB^{+1/2}_{EE}} \|f\|_B$. В силу (39) из последнего соотношения получаем

$$\left\|x^+ - x_{\delta,p}\right\|_C \le \sigma_*^{-1}\delta^p(\delta + \sigma_*^2)^{-p}\|f\|_B. \tag{59}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* x^+ *— взвешенное нормальное псевдорешение с положительно полуопределенными весами системы* (18), *а* $x_{\delta,p}$ *— решение одной из систем* (55) – (57). *Тогда справедлива оценка* (59).

Теперь для получения регуляризованной задачи нахождения приближения к взвешенному нормальному псевдорешению СЛАУ (18) используем формулу (54), согласно которой можно положить

$$x_{\delta,n} = \prod_{k=0}^{n-1}\left\{E + \delta^{2^k}(C^+_{EE}A^TBA + \delta E)^{-(2^k)}\right\}(C^+_{EE}A^TBA + \delta E)^{-1}C^+_{EE}A^TBf, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Умножив слева обе части этого равенства на $(C^+_{EE}A^TBA + \delta E)^{n-m}$, где $m = 0, 1, \ldots, n-1$, получим СЛАУ для вычисления приближения $x_{\delta,n}$ к взвешенному нормальному псевдорешению системы (18)

$$(C^+_{EE}A^TBA + \delta E)^{n-m}x =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1}\left\{(C^+_{EE}A^TBA + \delta E)^{n-m-1} + \delta^{2^k}(C^+_{EE}A^TBA + \delta E)^{n-m-(2^k)-1}\right\}C^+_{EE}A^TBf. \tag{60}$$

Используя оценку (50), как и при установлении оценки (59), для погрешности $z = x^+ - x_{\delta,n}$ имеем

$$\left\|x^+ - x_{\delta,n}\right\|_C \le \sigma_*^{-1}\delta^{2^n}(\delta + \sigma_*^2)^{-(2^n)}\|f\|_B. \tag{61}$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* x^+ *— взвешенное нормальное псевдорешение с положительно полуопределенными весами системы* (18), *а* $x_{\delta,n}$ *— решение одной из систем* (60). *Тогда справедлива оценка* (61).

***Замечание* 5.** Если матрицы B и C положительно определенные, то в теореме 3 вместо псевдообратных матриц к этим матрицам необходимо брать обратные. Тогда будем иметь представления взвешенных псевдообратных матриц с положительно определенными весами, полученные в [23], где математическим аппаратом исследования служит взвешенное сингулярное разложение матриц с невырожденными весами.

Отметим, что метод регуляризации для нахождения нормальных псевдорешений СЛАУ предложен и исследован в [24, 25], а для вычисления L-псевдорешений — в [26].

5. Построение итерационных процессов. Рассмотрим методику построения итерационных процессов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц. Сначала для построения итерационного процесса используем разложение (34) взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричный степенной ряд. Положим

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} \delta^{i-1}(C_{EE}^{+}A^T BA + \delta E)^{-i} C_{EE}^{+}A^T B .$$

Тогда для вычисления A_{BC}^{+} получим итерационный процесс

$$X_0 = 0, \quad X_k = \delta(C_{EE}^{+}A^T BA + \delta E)^{-1} X_{k-1} + (C_{EE}^{+}A^T BA + \delta E)^{-1} C_{EE}^{+}A^T B =$$
$$= (C_{EE}^{+}A^T BA + \delta E)^{-1}(\delta X_{k-1} + C_{EE}^{+}A^T B), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{62}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (62) к A_{BC}^{+} определяется формулой (39), где следует положить $p = k$. Из оценки (39) следует, что погрешность приближения зависит от количества итераций и параметра δ. Очевидно, что параметр δ необходимо выбирать, по возможности, наименьшим. Но его величина ограничивается в сторону уменьшения необходимой точностью вычисления обратной матрицы к матрице $C_{EE}^{+}A^T BA + \delta E$.

Теперь для построения итерационного процесса используем разложение (49) взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричное степенное произведение. Положим

$$X_k = \prod_{i=0}^{k-1} \left\{ E + \delta^{2^i} (C_{EE}^{+}A^T BA + \delta E)^{-(2^i)} \right\} (C_{EE}^{+}A^T BA + \delta E)^{-1} C_{EE}^{+}A^T B .$$

Тогда для вычисления A_{BC}^{+} получим итерационный процесс

$$X_0 = (C_{EE}^{+}A^T BA + \delta E)^{-1} C_{EE}^{+}A^T B ,$$
$$X_k = \left\{ E + \delta^{2^{k-1}} (C_{EE}^{+}A^T BA + \delta E)^{-(2^{k-1})} \right\} X_{k-1} =$$
$$= X_{k-1} + \delta^{2^{k-1}} (C_{EE}^{+}A^T BA + \delta E)^{-(2^{k-1})} X_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{63}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (63) к A_{BC}^{+} определяется формулой (50), где следует положить $n = k$.

Рассмотрим методику построения итерационных процессов для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений. Положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k определены формулой (62). Тогда для вычисления приближения к $x^{+} = A_{BC}^{+} f$ получим итерационный процесс

$$x_0 = 0, \quad x_k = \delta(C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-1} x_{k-1} + (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-1} C_{EE}^{+} A^T Bf =$$

$$= (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-1} (\delta x_{k-1} + C_{EE}^{+} A^T Bf), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{64}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (64) к x^+ определяется формулой (59), где следует положить $p = k$.

Итерационный процесс (64) можно представить в виде

$$x_0 = 0, \qquad \delta x_k + C_{EE}^{+} A^T BA x_k = \delta x_{k-1} + C_{EE}^{+} A^T Bf, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{65}$$

При реализации итерационного процесса (64) необходимо один раз вычислить обратную матрицу к матрице $C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E$, а при реализации итерационного процесса (65) необходимо на каждой итерации решать систему линейных алгебраических уравнений. Вопрос выбора итерационного метода, по-видимому, будет зависеть не столько от объема вычислительной работы, сколько от величины погрешности, вносимой вычислительным процессом.

Отметим, что, положив в (65) $B = C = E$, получим итерационный процесс, предложенный и исследованный в монографии [27] для решения некорректных задач для операторных уравнений и названный авторами итерационным методом регуляризации. В работе [28] предложены и исследованы итерационные методы регуляризации для решения задач связанного псевдообращения. Отметим также, что в работе [29] построены итерационные процессы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений, которые могут быть альтернативой предложенным выше.

Для построения следующего итерационного процесса с более высокой скоростью сходимости опять положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k теперь определены формулой (63). Тогда для вычисления приближения к $x^+ = A_{BC}^{+} f$ получим итерационный процесс

$$x_0 = (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-1} C_{EE}^{+} A^T Bf ,$$

$$x_k = \left\{ E + \delta^{2^{k-1}} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-(2^{k-1})} \right\} x_{k-1} =$$

$$= x_{k-1} + \delta^{2^{k-1}} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{-(2^{k-1})} x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{66}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (66) к x^+ определяется формулой (61), где следует положить $n = k$.

1. *Форсайт Дж., Молер К.* Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. – М.: Мир, 1969. – 168 с.
2. *Van Loan C. F.* Generalizing the singular value decomposition // SIAM J. Numer. Anal. – 1976. – **13,** № 1. – P. 76 – 83.
3. *Галба Е. Ф.* Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 10. – С. 1426 – 1430.
4. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 232 с.

5. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2012. – **52**, № 12. – С. 2115 – 2132.
6. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Необходимые и достаточные условия существования одного из вариантов взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами // Докл. РАН. – 2014. – **455**, № 3. – С. 261 – 264.
7. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2009. – **49**, № 8. – С. 1347 – 1363.
8. *Moore E. H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix // Abstrs Bull. Amer. Math. Soc. – 1920. – **26**. – P. 394 – 395.
9. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1955. – **51**, № 3. – P. 406 – 413.
10. *Ward J. F., Boullion T. L., Lewis T. O.* Weighted pseudoinverses with singular weights // SIAM J. Appl. Math. – 1971. – **21**, № 3. – P. 480 – 482.
11. *Сергиенко И. В., Галба Е. Ф., Дейнека В. С.* Существование и единственность взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 1. – С. 80 – 101.
12. *Сергиенко И. В., Галба Е. Ф., Дейнека В. С.* Теоремы существования и единственности в теории взвешенной псевдоинверсии с вырожденными весами // Кибернетика и систем. анализ. – 2011. – № 1. – С. 14 – 33.
13. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1975. – 223 с.
14. *Галба Е. Ф., Молчанов И. Н., Скопецкий В. В.* Итерационные методы для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами // Кибернетика и систем. анализ. – 1999. – № 5. – С. 150 – 169.
15. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами и регуляризация задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2004. – **44**, № 11. – С. 1928 – 1946.
16. *Галба Е. Ф.* Итерационные методы для вычисления взвешенного нормального псевдорешения с вырожденными весами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1999. – 3**9**, № 6. – С. 882 – 896.
17. *Lancaster P., Rozsa P.* Eigenvectors of H-self-adjoint matrices // Z. angew. Math. und Mech. – 1984. – **64**, № 9. – S. 439 – 441.
18. *Икрамов Х. Д.* Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и H-самоспряженных матриц // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1992. – **32**, № 8. – С. 155 – 169.
19. *Икрамов Х. Д.* Задачи линейной алгебры с обобщенными симметриями и численные алгоритмы их решения: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – М., 1991.
20. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1982. – 270 с.
21. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2007. – **47**, № 5. – С. 747 – 766.
22. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 656 с.
23. *Сергиенко И. В., Галба Е. Ф., Дейнека В. С.* Разложение взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 11. – С. 1539 – 1556.
24. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
25. *Жданов А. И.* Метод расширенных регуляризованных нормальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2012. – **52**, № 2. – С. 205 – 208.
26. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
27. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986. – 183 с.
28. *Архаров Е. В., Шафиев Р. А.* Методы регуляризации задачи связанного псевдообращения с приближенными данными // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2003. – **43**, № 3. – С. 347 – 353.
29. *Сергиенко И. В., Галба Е. Ф., Дейнека В. С.* Разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения и итерационные методы // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 9. – С. 1269 – 1290.

Получено 17.04.14