УДК 517.956

А. Т. Асанова
(Ин-т математики и мат. моделирования М-ва образования и науки Республики Казахстан, Алматы)

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

We consider a nonlocal boundary-value problem for a system of hyperbolic equations with impulsive effects. The relationship between the well-posed solvability of the nonlocal boundary-value problem with impulsive effects for a system of hyperbolic equations and the well-posed solvability of a family of two-point boundary-value problems with impulsive effects for a system of ordinary differential equations is established. Sufficient conditions for the existence of a unique solution of a family of two-point boundary-value problems with impulsive effects for a system of ordinary differential equations are obtained by method of introduction of functional parameters. The algorithms for finding its solutions are proposed. The necessary and sufficient conditions of the well-posed solvability of a nonlocal boundary-value problem for a system of hyperbolic equations with impulsive effects are established in the terms of the initial data.

Встановлено взаємозв'язок між коректною розв'язністю нелокальної крайової задачі з імпульсним впливом для системи гіперболічних рівнянь і коректною розв'язністю сім'ї двоточкових крайових задач з імпульсним впливом для системи звичайних диференціальних рівнянь. На основі методу введення функціональних параметрів отримано достатні умови існування єдиного розв'язку сім'ї двоточкових крайових задач з імпульсним впливом для системи звичайних диференціальних рівнянь і запропоновано алгоритми знаходження її розв'язків. Одержано необхідні та достатні умови коректної розв'язності нелокальної крайової задачі для системи гіперболічних рівнянь другого порядку с імпульсним впливом в термінах вихідних даних.

Рассматривается нелокальная краевая задача для системы гиперболических уравнений второго порядка с импульсными воздействиями в фиксированные моменты времени на прямоугольнике $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \qquad t \neq t_i, \tag{1}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$P(x)u(0,x) + S(x)u(T,x) = \varphi_0(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(t_i+0,x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t_i-0,x)}{\partial x} = U_i(x)\frac{\partial u(t_i+0,x)}{\partial x} + V_i(x)\frac{\partial u(t_i-0,x)}{\partial x} + \varphi_i(x), \quad i = \overline{1,k}, \tag{4}$$

где $u = \mathrm{col}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $(n\times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ и n-вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, $(n\times n)$-матрицы $V_j(x)$, $U_j(x)$ и n-вектор-функции $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,k}$, непрерывны на $[0,\omega]$, n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, $(n \times n)$-матрицы $P(x)$, $S(x)$ и n-вектор-функция $\varphi_0(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,\omega]$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < T$,

$$\|u(t,x)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|, \qquad \|A(t,x)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t,x)|.$$

Данные задачи удовлетворяют условию согласования: $P(0)\psi(0) + S(0)\psi(T) = \varphi_0(0)$.

Обозначим $t_0 = 0$, $t_{k+1} = T$, $\Omega_i = [t_{i-1}, t_i) \times [0,\omega]$, $i = \overline{1, k+1}$, т. е. $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{k+1} \Omega_i$.

Пусть $PC(\bar{\Omega}, \{t_i\}_{i=1}^{k}, R^n)$ — пространство кусочно-непрерывных на $\bar{\Omega}$ вектор-функций $u(t,x)$ с возможными разрывами на линиях $t = t_i$, $i = \overline{1,k}$, и нормой

$$\|u\|_1 = \max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{(t,x)\in\Omega_i} \|u(t,x)\|.$$

Функция $u(t,x) \in PC(\bar{\Omega}, \{t_i\}_{i=1}^{k}, R^n)$, имеющая частные производные

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in PC(\bar{\Omega}, \{t_i\}_{i=1}^{k}, R^n), \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in PC(\bar{\Omega}, \{t_i\}_{i=1}^{k}, R^n),$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in PC(\bar{\Omega}, \{t_i\}_{i=1}^{k}, R^n),$$

называется *решением* задачи (1) – (4), если она удовлетворяет системе (1) для всех $(t,x) \in \bar{\Omega}$, кроме линий $t = t_i$, $i = \overline{1,k}$, краевым условиям (2), (3) и условиям импульсного воздействия в фиксированные моменты (4).

Задача (1) – (4) является нелокальной краевой задачей: задается значение решения на характеристике $x = 0$, дается линейная комбинация значений искомой функции на характеристиках $t = 0$, $t = T$, а также условие возможных разрывов производной по x решения в фиксированные моменты времени на характеристиках $t = t_i$, $i = \overline{1,k}$. Нелокальная краевая задача в такой постановке рассматривается впервые. Некоторые классы нелокальных краевых задач с импульсными воздействиями для гиперболических уравнений изучались в работах [1 – 5].

Для исследования и решения задачи применяется метод введения функциональных параметров [5 – 12], являющийся обобщением метода параметризации [13 – 14] на уравнения в частных производных. Сначала нелокальная краевая задача для системы гиперболических уравнений с импульсными воздействиями (1) – (4) путем введения новых неизвестных функций сводится к эквивалентной задаче, состоящей из семейства двухточечных краевых задач с импульсными воздействиями и функциональных соотношений. Устанавливается взаимосвязь между корректной разрешимостью нелокальной краевой задачи с импульсными воздействиями для системы гиперболических уравнений и корректной разрешимостью семейства двухточечных краевых задач с импульсными воздействиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе метода введения функциональных параметров получены достаточные условия существования единственного решения семейства двухточечных краевых задач с импульсными воздействиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и предложены алгоритмы нахождения его решений. Результаты применены к нелокальной краевой задаче для системы гиперболических уравнений второго порядка с импульсными воздействиями. Установлены необходимые и достаточные условия существования единственного решения нелокальной краевой задачи для системы гиперболических уравнений второго порядка с импульсными воздействиями в терминах исходных данных.

Результаты в случае, когда $U_i = 0$, $i = \overline{1,k}$, докладывались на международной конференции „Боголюбовские чтения-2013" в Севастополе.

Введем новые неизвестные функции $v(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $w(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ и задачу (1) – (4) сведем к эквивалентной задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + F(t,x,w(t,x),u(t,x)), \quad t \neq t_i, \quad x \in [0,\omega], \tag{5}$$

$$P(x)v(0,x) + S(x)v(T,x) = \Phi(x,u), \qquad x \in [0,\omega], \tag{6}$$

$$v(t_i+0,x) - v(t_i-0,x) = U_i(x)v(t_i+0,x) + V_i(x)v(t_i-0,x) + \varphi_i(x), \qquad i = \overline{1,k}, \tag{7}$$

$$u(t,x) = \psi(t) + \int\limits_0^x v(t,\xi)d\xi, \qquad w(t,x) = \dot{\psi}(t) + \int\limits_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}d\xi, \qquad (t,x) \in \bar{\Omega}, \tag{8}$$

где

$$F(t,x,w(t,x),u(t,x)) = B(t,x)w(t,x) + C(t,x)u(t,x) + f(t,x),$$

$$\Phi(x,u) = \varphi_0'(x) - P'(x)u(0,x) - S'(x)u(T,x).$$

В задаче (5) – (8) условие $u(t,0) = \psi(t)$ учтено в соотношениях (8). Условие (6) эквивалентно условию (3) и условию согласования.

Тройка $\{v(t,x), u(t,x), w(t,x)\}$ кусочно-непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций называется *решением* задачи (5) – (8), если функция $v(t,x)$ имеет кусочно-непрерывную производную относительно t на $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет однопараметрическому семейству краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями (5) – (7), где функции $u(t,x)$ и $w(t,x)$ связаны с $v(t,x)$ и $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}$ функциональными соотношениями (8).

Задача (5) – (7) при фиксированных $u(t,x)$, $w(t,x)$ требует специального изучения. Поэтому рассмотрим семейство краевых задач для системы дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + F(t,x), \qquad t \neq t_i, \quad x \in [0,\omega], \tag{9}$$

$$P(x)v(0,x) + S(x)v(T,x) = \Phi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{10}$$

$$v(t_i+0,x) - v(t_i-0,x) = U_i(x)v(t_i+0,x) + V_i(x)v(t_i-0,x) + \varphi_i(x), \qquad i = \overline{1,k}, \tag{11}$$

где $v = \mathrm{col}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, n-вектор-функция $F(t,x)$ непрерывна на $\bar{\Omega}$, n-вектор-функция $\Phi(x)$ непрерывна на $[0,\omega]$, $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t_{k+1}$.

Функция $v(t,x) \in PC(\bar{\Omega}, \{t_i\}_{i=1}^k, R^n)$, имеющая производную $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} \in PC(\Omega, \{t_i\}_{i=1}^k, R^n)$, называется *решением* семейства краевых задач с импульсными воздействиями (9) – (11), если она удовлетворяет системе (9) при всех $(t,x) \in \bar{\Omega}$, кроме линий $t = t_i$, $i = \overline{1,k}$, краевому условию (10) и условиям импульсного воздействия (11) при всех $x \in [0,\omega]$.

При фиксированном $x \in [0,\omega]$ задача (9) – (11) является линейной двухточечной краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями. Меняя переменную x на $[0,\omega]$, получаем семейство двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями.

Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с импульсными воздействиями исследована многими авторами. Различными методами и подходами были получены условия существования решения рассматриваемых задач в различных терминах [15 – 18]. Обзор, библиографию и подробный анализ применяемых методов см. в [15].

Определение 1. *Семейство краевых задач с импульсными воздействиями* (9) – (11) *называется корректно разрешимым, если для произвольных* $F(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\Phi(x) \in C([0,\omega], R^n)$, $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, *существует единственное решение* $v(t,x)$ *и справедлива оценка*

$$\max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \|v(t,x)\| \le K(x) \max\left(\max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\|, \max_{i=\overline{0,k}} \|\varphi_i(x)\| \right), \tag{12}$$

где положительная функция $K(x)$ *не зависит от* $F(t,x)$, $\Phi(x)$ *и* t_i, $i = \overline{0,k+1}$.

Введем обозначения $\bar{\Omega}_\eta = [0,T]\times[0,\eta]$, $\bar{\Omega}_\eta = \bigcup_{i=1}^{k+1} \Omega_{i,\eta}$, $\Omega_{i,\eta} = [t_{i-1},t_i)\times[0,\eta]$, $i = \overline{1,k+1}$, $\|u\|_{1,\eta} = \max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{(t,x)\in\Omega_{i,\eta}} \|u(t,x)\|$.

Определение 2. *Нелокальная краевая задача с импульсными воздействиями* (1) – (4) *называется корректно разрешимой, если для любых заданных* $f(t,x)$, $\psi(t)$, $\varphi_i(x)$, $i = \overline{0,k}$, *она имеет единственное решение* $u(t,x)$, *которое для любого* $\eta \in [0,\omega]$ *на* $\bar{\Omega}_\eta$ *удовлетворяет неравенству*

$$\max\left(\|u\|_{1,\eta}, \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{1,\eta}, \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{1,\eta} \right) \le \tilde{K} \max\left(\|f\|_{1,\eta}, \max_{t\in[0,T]} \|\psi(t)\|, \max_{i=\overline{0,k}} \max_{x\in[0,\eta]} \|\varphi_i(x)\| \right), \tag{13}$$

где постоянная $\tilde{K}$ *не зависит от* $f(t,x)$, $\psi(t)$, $\varphi_i(x)$, $i = \overline{0,k}$, *и* $\eta \in [0,\omega]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Нелокальная краевая задача с импульсными воздействиями* (1) – (4) *корректно разрешима тогда и только тогда, когда корректно разрешимо семейство краевых задач с импульсными воздействиями* (9) – (11).

Доказательство. Пусть семейство краевых задач с импульсными воздействиями (9) – (11) корректно разрешимо. Покажем корректную разрешимость задачи (1) – (4). Из эквивалентности задач (1) – (4) и (5) – (8) достаточно доказать корректную разрешимость задачи (5) – (8). Решение задачи (5) – (8) — тройку функций $\{v(t,x), u(t,x), w(t,x)\}$ — найдем методом последовательных приближений. За нулевое приближение по $u(t,x)$, $w(t,x)$ возьмем соответственно $\psi(t)$, $\dot{\psi}(t)$, а $v^{(0)}(t,x)$ найдем как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + B(t,x)\dot{\psi}(t) + C(t,x)\psi(t) + f(t,x), \quad (t,x) \in \bar{\Omega}, \tag{14}$$

$$P(x)v(0,x) + S(x)v(T,x) = \varphi_0'(x) - P'(x)\psi(0) - S'(x)\psi(T), \quad x \in [0,\omega], \tag{15}$$

$$v(t_i+0,x) - v(t_i-0,x) = U_i(x)v(t_i+0,x) + V_i(x)v(t_i-0,x) + \varphi_i(x), \quad i = \overline{1,k}. \tag{16}$$

По предположению задача (14) – (16) имеет единственное решение $v^{(0)}(t,x)$ и

$$\max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \|v^{(0)}(t,x)\| \le K(x)\max\Big(\max_{t\in[0,T]} \|B(t,x)\dot\psi(t) + C(t,x)\psi(t) + f(t,x)\|,$$

$$\|\varphi_0'(x) - P'(x)\psi(0) - S'(x)\psi(T)\|, \max_{i=\overline{0,k}} \|\varphi_i(x)\|\Big),$$

$$\max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \Big\|\frac{\partial v^{(0)}(t,x)}{\partial t}\Big\| \le \Big(\max_{t\in[0,T]} \|A(t,x)\|K(x)+1\Big)\max\Big(\max_{t\in[0,T]} \|B(t,x)\dot\psi(t)+$$

$$+C(t,x)\psi(t) + f(t,x)\|, \|\varphi_0'(x) - P'(x)\psi(0) - S'(x)\psi(T)\|, \max_{i=\overline{0,k}} \|\varphi_i(x)\|\Big).$$

Пусть известны $u^{(m-1)}(t,x)$, $w^{(m-1)}(t,x)$. Тогда $v^{(m)}(t,x)$ найдем, решая задачу (5) – (7), где $w(t,x) = w^{(m-1)}(t,x)$, $u(t,x) = u^{(m-1)}(t,x)$, $m = 1,2,\ldots$.

При найденном $v^{(m)}(t,x)$ следующие приближения по $u(t,x)$, $w(t,x)$ определим из соотношений (8):

$$u^{(m)}(t,x) = \psi(t) + \int_0^x v^{(m)}(t,\xi)d\xi, \qquad w^{(m)}(t,x) = \dot\psi(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(m)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi.$$

Составим разности $\Delta v^{(m)}(t,x) = v^{(m)}(t,x) - v^{(m-1)}(t,x)$, $\Delta u^{(m)}(t,x) = u^{(m)}(t,x) - u^{(m-1)}(t,x)$, $\Delta w^{(m)}(t,x) = w^{(m)}(t,x) - w^{(m-1)}(t,x)$ и для них, использовав корректную разрешимость задачи (9) – (11), установим оценки

$$\max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \|\Delta v^{(m+1)}(t,x)\|, \max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \left\|\frac{\partial \Delta v^{(m+1)}(t,x)}{\partial t}\right\| \le$$

$$\le K_1(x)K_2(x)\max\left(\max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \|\Delta w^{(m)}(t,x)\|, \max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \|\Delta u^{(m)}(t,x)\|\right), \tag{17}$$

$$\max\left(\max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \|\Delta w^{(m)}(t,x)\|, \max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \|\Delta u^{(m)}(t,x)\|\right) \le$$

$$\le \int_0^x \max\left(\max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \|\Delta v^{(m)}(t,\xi)\|, \max_{i=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{i-1},t_i)} \Big\|\frac{\partial \Delta v^{(m)}(t,\xi)}{\partial t}\Big\|\right)d\xi, \tag{18}$$

где

$$K_1(x) = \max\left(K(x), \max_{t\in[0,T]} \|A(t,x)\|K(x)+1\right),$$

$$K_2(x) = \max\left(\max_{t\in[0,T]} \|B(t,x)\| + \max_{t\in[0,T]} \|C(t,x)\|, \|P'(x)\| + \|S'(x)\|\right).$$

Отсюда следует основное неравенство

$$\max\left(\max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\|\Delta v^{(m+1)}(t,x)\|,\ \max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\Big\|\frac{\partial\Delta v^{(m+1)}(t,x)}{\partial t}\Big\|\right)\le$$

$$\le K_1(x)K_2(x)\int\limits_0^x\max\left(\max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\|\Delta v^{(m)}(t,\xi)\|,\ \max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\Big\|\frac{\partial\Delta v^{(m)}(t,\xi)}{\partial t}\Big\|\right)d\xi. \tag{19}$$

Из (19) следует равномерная сходимость последовательностей $\{v^{(m)}(t,x)\}$, $\left\{\dfrac{\partial v^{(m)}(t,x)}{\partial t}\right\}$ в пространстве $PC\big(\bar\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k,R^n\big)$ при $m\to\infty$. Тогда равномерная сходимость на $\bar\Omega$ последовательностей $\{u^{(m)}(t,x)\}$, $\{w^{(m)}(t,x)\}$ вытекает из (19). При этом предельные функции $v^*(t,x)\in PC(\bar\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k,R^n)$, $\dfrac{\partial v^*(t,x)}{\partial t}\in PC(\bar\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k,R^n)$, $u^*(t,x)\in PC(\bar\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k,R^n)$, $w^*(t,x)\in PC(\bar\Omega,\{t_i\}_{i=1}^k,R^n)$ и тройка функций $\{v^*(t,x),u^*(t,x),w^*(t,x)\}$ является решением задачи (5) – (8). Используя оценки (17) – (19), для $\eta\in[0,\omega]$ получаем

$$\max\left(\|v^*\|_{1,\eta},\|u^*\|_{1,\eta},\|w^*\|_{1,\eta}\right)\le$$

$$\le\widehat K\ \max\left(\|f\|_{1,\eta},\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\dot\psi(t)\|,\max_{x\in[0,\eta]}\|\varphi_0'(x)\|\max_{i=\overline{1,k}}\max_{x\in[0,\eta]}\|\varphi_i(x)\|\right), \tag{20}$$

где

$$\widehat K=\max\left(e^{\hat K_1[1+\hat K_2]\omega}\hat K_1[1+\hat K_2],1+e^{\hat K_1[1+\hat K_2]\omega}\hat K_1[1+\hat K_2]\right),$$

$$\hat K_1=\max_{x\in[0,\omega]}K_1(x),\qquad \hat K_2=\max_{x\in[0,\omega]}K_2(x)$$

и не зависят от f, ψ, φ_i, $i=\overline{0,k}$.

Пусть теперь тройка $\{\widetilde v(t,x),\widetilde u(t,x),\widetilde w(t,x)\}$ — решение задачи (4) – (6), где $f(t,x)=0$, $\psi(t)=0$, $\varphi_i(x)=0$, $i=\overline{0,k}$, для всех $(t,x)\in\bar\Omega$. Тогда из корректной разрешимости задачи (9) – (11) и соотношений (8) вытекают равенства $\widetilde v(t,x)=0$, $\widetilde u(t,x)=0$, $\widetilde w(t,x)=0$ для всех $(t,x)\in\bar\Omega$. Отсюда и из оценки (20) следует корректная разрешимость задачи (1) – (3).

Доказательство корректной разрешимости семейства краевых задач с импульсными воздействиями (9) – (11) в случае, когда корректно разрешима задача (1) – (4), проводится по схеме доказательства теоремы 1 из [18] с учетом условия импульсного воздействия (4).

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует эквивалентность корректных разрешимостей задач (1) – (4) и (9) – (11). Поэтому далее будем исследовать вопросы существования, единственности решения семейства краевых задач с импульсными воздействиями для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (9) – (11).

Отметим, что из существования только тривиального решения соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9) – (11) семейства однородных краевых задач не следует существование единственного решения задачи (9) – (11). Приведем пример.

Пример. Рассмотрим на $[0,1]\times[0,1]$ семейство периодических краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения с импульсным воздействием

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (x-1/2)v+1, \quad t\neq 1/2, \tag{9'}$$

$$v(0,x) = v(1,x), \quad x\in[0,1], \tag{10'}$$

$$v(1/2+0,x) - v(1/2-0,x) = (2-x)v(1/2-0,x), \quad x\in[0,1]. \tag{11'}$$

Общее решение соответствующего $(9')$ однородного уравнения записывается в виде $v(t,x) = e^{(x-1/2)t}C(x)$. Из условия $(10')$ получаем $C(x) = e^{x-1/2}C(x)$. Из условия $(11')$ имеем

$$e^{(x-1/2)\{1/2+0\}}C(x) - (3-x)e^{(x-1/2)\{1/2-0\}}C(x) = 0.$$

Отсюда следует, что $C(x)=0$ для всех $x\in[0,1]$, т. е. однородная краевая задача имеет только тривиальное решение $v(t,x)=0$. Задача $(9')$–$(11')$ не имеет решения.

Для исследования и решения семейства краевых задач с импульсными воздействиями применяется метод функциональной параметризации. Суть метода заключается во введении дополнительных параметров как значений искомой функции на линиях разбиения области по переменной t. Исходная задача путем замены переходит к эквивалентной задаче с функциональными параметрами. Свойства решений переходят в свойства параметров. Разбиение области может проводиться равномерно с некоторым шагом $h>0\colon Nh=T$ или неравномерно путем деления области определенными линиями.

В данной работе разбиение области Ω будет неравномерным, дополнительные параметры вводятся как значения искомой функции на линиях $t=t_i$, $i=\overline{0,k}$, $t_0=0$, $t_{k+1}=T$.

С помощью прямых $t=t_i$, $i=\overline{1,k}$, область Ω разбиваем на подобласти Ω_i, $i=\overline{1,k+1}$. Через $v_r(t,x)$ обозначим сужение функции $v(t,x)$ на Ω_r, $r=\overline{1,k+1}$. Введем параметры $\mu_r(x)=v_r(t_{r-1},x)$, $r=\overline{1,k+1}$, тогда задача (9)–(11) путем замены неизвестной функции $v(t,x)=\widetilde{v}_r(t,x)+\mu_r(x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,k+1}$, сводится к следующей эквивалентной краевой задаче с параметрами:

$$\frac{\partial \widetilde{v}_r}{\partial t} = A(t,x)\widetilde{v}_r + A(t,x)\mu_r(x) + F(t,x), \qquad (t,x)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,k+1}, \tag{21}$$

$$\widetilde{v}_r(t_{r-1},x) = 0, \qquad r=\overline{1,k+1}, \tag{22}$$

$$P(x)\mu_1(x) + S(x)\mu_{k+1}(x) + S(x)\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_{k+1}(t,x) = \Phi(x), \qquad x\in[0,\omega], \tag{23}$$

$$[I-U_i(x)]\mu_{i+1}(x) - [I+V_i(x)]\mu_i(x) = [I+V_i(x)]\lim_{t\to t_i-0}\widetilde{v}_i(t,x) + \varphi_i(x), \qquad i=\overline{1,k}. \tag{24}$$

Решением задачи (21)–(24) является система пар $(\mu(x),\widetilde{v}([t],x))$ с элементами $\mu(x) = (\mu_1(x),\mu_2(x),\ldots,\mu_{k+1}(x))'$, $\widetilde{v}([t],x) = (\widetilde{v}_1(t,x),\widetilde{v}_2(t,x),\ldots,\widetilde{v}_{k+1}(t,x))'$, где функции $\widetilde{v}_r(t,x)$ непрерывны на Ω_r, имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial\widetilde{v}_r(t,x)}{\partial t}$ на Ω_r, $r=\overline{1,k+1}$, конечный левосторонний предел $\lim_{t\to t_r-0}\widetilde{v}_r(t,x)$, $r=\overline{1,k+1}$ и при $\mu_r(x)=\mu_r^*(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (21) и условиям (22) – (24).

Задачи (9) – (11) и (21) – (24) эквивалентны в том смысле, что если функция $v(t,x)$ является решением задачи (9) – (11), то система пар $(\mu(x),\widetilde{v}([t],x))$, где $\mu(x)=(\mu_1(x),\mu_2(x),\ldots$ $\ldots,\mu_{k+1}(x))'$, $\widetilde{v}([t],x)=(\widetilde{v}_1(t,x),\widetilde{v}_2(t,x),\ldots,\ \widetilde{v}_{k+1}(t,x))'$, $v_r(t,x)=v(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=$ $=\overline{1,k+1}$, $\lim_{t\to T-0}v_{k+1}(t,x)=v(T,x)$, $\mu_r(x)=v_r(t_{r-1},x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)=v_r(t,x)-v_r(t_{r-1},x)$, $r=\overline{1,k+1}$, будет решением задачи (14) – (18), и наоборот, если $(\mu_r(x),\widetilde{v}_r(t,x))$, $r=\overline{1,k+1}$, — решение задачи (21) – (24), то функция $v(t,x)$, определяемая равенствами

$$v(t,x)=\mu_r(x)+\widetilde{v}_r(t,x),\quad (t,x)\in\Omega_r,\quad r=\overline{1,k+1},$$

$$v(T,x)=\mu_{k+1}(x)+\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_{k+1}(t,x),$$

будет решением задачи (9) – (11).

В отличие от задачи (9) – (11) здесь появились начальные условия (22) как значения неизвестной функции на линиях $t=t_{r-1}$, $r=\overline{1,k+1}$. При фиксированных $\mu_r(x)$ $r=\overline{1,k+1}$, функции $\widetilde{v}_r(t,x)$, $r=\overline{1,k+1}$, являются решениями задачи Коши на Ω_r с условием (22).

Задача Коши (21), (22) эквивалентна интегральному уравнению

$$\widetilde{v}_r(t,x)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}\Big[A(\tau,x)\widetilde{v}_r(\tau,x)+A(\tau,x)\mu_r(x)+F(\tau,x)\Big]d\tau. \tag{25}$$

Вместо $\widetilde{v}_r(\tau,x)$ подставим соответствующую правую часть (25) и, повторив этот процесс m $(m=1,2,\ldots)$ раз, получим представление функции $\widetilde{v}_r(t,x)$:

$$\widetilde{v}_r(t,x)=G_{m,r}(t,x,\widetilde{v}_r)+F_{m,r}(t,x)+D_{m,r}(t,x)\mu_r(x), \tag{26}$$

где

$$G_{m,r}(t,x,\widetilde{v}_r)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{m-1},x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{m-1}}A(\tau_m,x)\widetilde{v}_r(\tau_m,x)d\tau_m\ldots d\tau_1,$$

$$F_{m,r}(t,x)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}F(\tau_1,x)d\tau_1+\ldots+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{m-2}}A(\tau_{m-1},x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{m-1}}F(\tau_m,x)d\tau_m\ldots d\tau_1,$$

$$D_{m,r}(t,x)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)d\tau_1+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_1}A(\tau_2,x)d\tau_2d\tau_1+\ldots$$

$$\ldots+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{m-1}}A(\tau_m,x)d\tau_m\ldots d\tau_1,\qquad m=1,2,\ldots,r=\overline{1,k+1}.$$

Переходя в правой части (26) к пределу при $t \to t_r - 0$, находим $\lim_{t \to t_r - 0} \widetilde{v}_r(t, x)$, $r = \overline{1, k+1}$, $x \in [0, \omega]$. Подставляя их в (23), (24), для неизвестных вектор-функций $\mu_r(x)$, $r = \overline{1, k+1}$, получаем систему, состоящую из $(k+1)$-го функционального уравнения:

$$Q_m(x)\mu(x) = -F_m(x) - G_m(x, \widetilde{v}), \tag{27}$$

где

$$Q_m(x) = \begin{vmatrix} P(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & S(x)[I+D_{m,(k+1)}(T,x)] \\ -\widetilde{V}_{m,1}(x) & I - U_1(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\widetilde{V}_{m,2}(x) & I - U_2(x) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\widetilde{V}_{m,k}(x) & I - U_k(x) \end{vmatrix},$$

I — единичная матрица размерности $n \times n$,

$$\widetilde{V}_{m,i}(x) = [I + V_i(x)] \cdot [I + D_{m,i}(t_i, x)], \qquad i = \overline{1, k},$$

$$F_m(x) = \big(S(x)F_{m,k+1}(T, x) - \Phi(x), -[I + V_1(x)]F_{m,1}(t_1, x) - \varphi_1(x), \dots,$$

$$-[I + V_k(x)]F_{m,k}(t_k, x) - \varphi_k(x)\big)', \qquad G_m(x, \widetilde{v}) =$$

$$= \big(S(x)G_{m,k+1}(T, x, \widetilde{v}_{k+1}), -[I + V_1(x)]G_{m,1}(t_1, x, \widetilde{v}_1), \dots, -[I + V_k(x)]G_{m,k}(t_k, x, \widetilde{v}_k)\big)'.$$

Если известны функции $\mu_r(x)$, $r = \overline{1, k+1}$, то, решая интегральное уравнение (25), находим функцию $\widetilde{v}_r(t, x)$ и из системы функций $(\mu_r(x) + \widetilde{v}_r(t, x))$ получаем решение исходной задачи. Если известны функции $\widetilde{v}_r(t, x)$, то, решая уравнение (27), находим $\mu_r(x)$ и снова из системы функций $(\mu_r(x) + \widetilde{v}_r(t, x))$ получаем решение задачи (9)–(11). Здесь неизвестными являются как функции $\mu_r(x)$, так и функции $\widetilde{v}_r(t, x)$. Поэтому применяется итерационный метод и решение функциональных соотношений (25), (27) находится как пределы последовательностей $\{\mu_r^{(p)}(x)\}\}$, $\{\widetilde{v}_r^{(p)}(t, x)\}$, определяемых по следующему алгоритму:

Шаг 0. Предполагая в правой части (27) $\widetilde{v}_r(t, x) = 0$ и считая, что матрица $Q_m(x)$ обратима при всех $x \in [0, \omega]$, из уравнения (27) находим функции $\mu_r^{(0)}(x)$, $x \in [0, \omega]$, $r = \overline{1, k+1}$. Из интегрального уравнения (25), где $\mu_r(x) = \mu_r^{(0)}(x)$, определяем функции $\widetilde{v}_r^{(0)}(t, x)$, $(t, x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, k+1}$.

Шаг 1. Из системы (27), где в правой части $\widetilde{v}_r(t, x) = \widetilde{v}_r^{(0)}(t, x)$, $r = \overline{1, k+1}$, в силу обратимости $Q_m(x)$ при $x \in [0, \omega]$ находим $\mu_r^{(1)}(x)$, $x \in [0, \omega]$, $r = \overline{1, k+1}$. Из интегрального уравнения (25), где $\mu_r(x) = \mu_r^{(1)}(x)$, определяем функции $\widetilde{v}_r^{(1)}(t, x)$, $(t, x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, k+1}$.

И т. д.

Шаг p. Из системы (27), где в правой части $\widetilde{v}_r(t,x)=\widetilde{v}_r^{(p-1)}(t,x)$, $r=\overline{1,k+1}$, в силу обратимости $Q_m(x)$ при $x\in[0,\omega]$ находим $\mu_r^{(p)}(x)$, $x\in[0,\omega]$, $r=\overline{1,k+1}$. Из интегрального уравнения (25), где $\mu_r(x)=\mu_r^{(p)}(x)$, определяем функции $\widetilde{v}_r^{(p)}(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,k+1}$, $p=1,2,\ldots$.

Применяемый метод делит на две части процесс нахождения неизвестных функций:

1) нахождение введенных функциональных параметров $\mu_r(x)$ из функционального уравнения (27);

2) нахождение неизвестной функции $\widetilde{v}_r(t,x)$ из интегрального уравнения (25).

Возникает вопрос: при каких условиях будет осуществлен и сходиться построенный алгоритм, а также будет существовать единственное решение исследуемой задачи (9) – (11)? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $(n(k+1)\times n(k+1))$*-матрица* $Q_m(x)$ *при некотором* m, $m\in\mathbb{N}$, *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и выполняются неравенства*:

1) $\big\|[Q_m(x)]^{-1}\big\|\le\gamma_m(x)$, $\gamma_m(x)$ — *положительная непрерывная по* $x\in[0,\omega]$ *функция*;

2) $q_m(x)=\gamma_m(x)\max\left(\|S(x)\|\left[e^{\alpha(x)(T-t_k)}-1-\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{[\alpha(x)(T-t_k)]^j}{j!}\right],\max\limits_{i=\overline{1,k}}\|I+V_i(x)\|\times\right.$ $\left.\times\left[e^{\alpha(x)(t_i-t_{i-1})}-1-\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{[\alpha(x)(t_i-t_{i-1})]^j}{j!}\right]\right)\le\chi<1$, *где* $\alpha(x)=\max_{t\in[0,T]}\|A(t,x)\|$, χ — *постоянная.*

Тогда семейство краевых задач с импульсными воздействиями (9) – (11) *имеет единственное решение* $v^*(t,x)$ *и справедлива оценка*

$$\max_{i=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{i-1},t_i)}\|v^*(t,x)\|\le[k_1(x,m)+k_2(x,m)]\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|,\|\Phi(x)\|,\max_{i=\overline{0,k}}\|\varphi_i(x)\|\right), \tag{28}$$

где

$$k_1(x,m)=\frac{\gamma_m(x)}{1-q_m(x)}\max\left(\|S(x)\|\frac{[\alpha(x)(T-t_k)]^m}{m!},\max_{i=\overline{1,k}}\|I+V_i(x)\|\frac{[\alpha(x)(t_i-t_{i-1})]^m}{m!}\right)\times$$

$$\times k_0(x,m)+\gamma_m(x)\max\left\{1+\max\left(\|S(x)\|\sum_{j=0}^{m-1}\frac{[\alpha(x)(T-t_k)]^j}{j!}(T-t_k),\right.\right.$$

$$\left.\left.\max_{i=\overline{1,k}}\|I+V_i(x)\|\sum_{j=0}^{m-1}\frac{[\alpha(x)(t_i-t_{i-1})]^j}{j!}(t_i-t_{i-1})\right)\right\},$$

$$k_2(x,m)=\left\{\max_{r=\overline{1,k+1}}[e^{\alpha(x)(t_r-t_{r-1})}-1]\frac{\gamma_m(x)}{1-q_m(x)}\max\left(\|S(x)\|\frac{[\alpha(x)(T-t_k)]^m}{m!},\right.\right.$$

$$\left.\left.\max_{i=\overline{1,k}}\|I+V_i(x)\|\frac{[\alpha(x)(t_i-t_{i-1})]^m}{m!}\right)+1\right\}k_0(x,m),$$

$$k_0(x,m) = \max_{r=\overline{1,k+1}} [e^{\alpha(x)(t_r - t_{r-1})} - 1]\gamma_m(x) \max\Bigg\{1 + \max\Bigg(\|S(x)\| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{[\alpha(x)(T-t_k)]^j}{j!}(T-t_k),$$

$$\max_{i=\overline{1,k}} \|I + V_i(x)\| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{[\alpha(x)(t_i - t_{i-1})]^j}{j!}(t_i - t_{i-1})\Bigg) + \max_{r=\overline{1,k+1}} e^{\alpha(x)(t_r - t_{r-1})}(t_r - t_{r-1})\Bigg\}.$$

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме вышеприведенного алгоритма.

Таким образом, теорема 2 дает достаточные условия существования единственного решения задачи (9)–(11) в терминах исходных данных: коэффициентной матрицы $A(t,x)$, граничных матриц $S(x)$, $P(x)$, матриц импульсного воздействия $U_i(x)$, $V_i(x)$ и линий возможных разрывов $t = t_i$, $i = \overline{1,k}$.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $(n(k+1) \times n(k+1))$-матрица $Q_m(x)$ при некотором m, $m \in \mathbb{N}$, обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства из пп.* 1, 2 *теоремы* 2.

Тогда нелокальная краевая задача с импульсными воздействиями (1)–(4) *имеет единственное решение.*

Основным условием однозначной разрешимости исследуемых задач является существование числа $m \in \mathbb{N}$, при котором матрица $Q_m(x)$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$. Поскольку $(n(k+1) \times n(k+1))$-матрица $Q_m(x)$ имеет специальную блочно-ленточную структуру, справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть $(n \times n)$-матрицы $I - U_i(x)\big([I + V_i(x)]\,[I + D_{m,i}(t_i,x)]\big)$, $i = \overline{1,k}$, обратимы для $x \in [0,\omega]$. $\big(n(k+1) \times n(k+1)\big)$-Матрица $Q_m(x)$ при некотором m, $m \in \mathbb{N}$, обратима для всех $x \in [0,\omega]$ тогда и только тогда, когда обратима $(n \times n)$-матрица*

$$M_m(x) = P(x) + S(x)[I + D_{m,(k+1)}(T,x)] \prod_{s=k}^{1} [I - U_s(x)]^{-1}[I + V_s(x)]\,[I + D_{m,s}(t_s,x)]$$

$$\left(L_m(x) = P(x) \prod_{s=1}^{k} \{[I + V_s(x)]\,[I + D_{m,s}(t_s,x)]\}^{-1}[I - U_s(x)] + S(x)[I + D_{m,(k+1)}(T,x)]\right)$$

для всех $x \in [0,\omega]$.

Лемма 2. *Если матрицы $I - U_i(x)\left([I + V_i(x)][I + D_{m,i}(t_i,x)]\right)$, $i = \overline{1,k}$, $M_m(x)$ $(L_m(x))$ обратимы для всех $x \in [0,\omega]$, то $[Q_m(x)]^{-1} = \{g_{i,j}(x)\}$, $i,j = \overline{1,k+1}$, где*

$$g_{1,1}(x) = [M_m(x)]^{-1},$$

$$g_{1,j}(x) = -[M_m(x)]^{-1} S(x)[I + D_{m,(k+1)}(T,x)] \times$$

$$\times \prod_{s=k}^{j} [I - U_s(x)]^{-1}[I + V_s(x)]\,[I + D_{m,s}(t_s,x)][I - U_{j-1}]^{-1}, \quad 1 < j \le k+1,$$

$$g_{r,j}(x) = [I - U_{r-1}(x)]^{-1}\,[I + V_{r-1}(x)]\,[I + D_{m,r-1}(t_{r-1},x)]g_{r-1,j}(x), \quad j \ne r,$$

$$g_{r,r}(x) = [I - U_{r-1}(x)]^{-1}\,[I + V_{r-1}(x)]\,[I + D_{m,r-1}(t_{r-1},x)]g_{r-1,r}(x) +$$

$$+ [I - U_{r-1}(x)]^{-1}, \quad j,r = 2,3,\ldots,k+1$$

$$\Bigg(g_{k+1,1}(x) = [L_m(x)]^{-1},$$

$$g_{k+1,2}(x) = [L_m(x)]^{-1}P(x)\{[I + V_1(x)]\,[I + D_{m,1}(t_1,x)]\}^{-1},$$

$$g_{k+1,j}(x) = [L_m(x)]^{-1}P(x)\prod_{s=1}^{k-1}\{[I + V_s(x)]\,[I + D_{m,s}(t_s,x)]\}^{-1}[I - U_s(x)], \quad 2 < j \le k+1,$$

$$g_{r,j}(x) = \{[I + V_r(x)]\,[I + D_{m,r-1}(t_r,x)]\}^{-1}[I - U_r(x)]g_{r+1,j}(x), \quad j \ne r+1,$$

$$g_{r,r+1}(x) = \{[I + V_r(x)]\,[I + D_{m,r-1}(t_r,x)]\}^{-1}[I - U_r(x)]g_{r,r}(x) -$$

$$-\{[I + V_r(x)]\,[I + D_{m,r-1}(t_r,x)]\}^{-1}, \quad j,r = 1,2,\ldots,k \Bigg).$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. *Если семейство краевых задач с импульсными воздействиями* (9) – (11) *корректно разрешимо, то существует* $m = m(t_0, t_1, \ldots, t_k, t_{k+1})$, *при котором матрица* $Q_m(x)\colon R^{n(k+1)} \to R^{n(k+1)}$ *обратима для всех* $x \in [0,\omega]$ *и выполняются неравенства из пп.* $1, 2$ *теоремы* 2.

Теорема 5. *Нелокальная краевая задача с импульсными воздействиями* (1) – (4) *корректно разрешима тогда и только тогда, когда существует такое* $m = m(t_0, t_1, \ldots, t_k, t_{k+1})$, *при котором матрица* $Q_m(x)\colon R^{n(k+1)} \to R^{n(k+1)}$ *обратима для всех* $x \in [0,\omega]$ *и выполняются неравенства из пп.* $1, 2$ *теоремы* 2.

Доказательства лемм 1, 2 и теорем 4, 5 проводятся аналогично схеме доказательства соответствующих лемм и теорем из [6, 9] с учетом неравномерности разбиения области Ω и импульсных воздействий на решение.

1. *Rogovchenko S. P.* Periodic Solutions for hyperbolic impulsive systems (in Russian). – Kiev, 1988. – 20 p. – (Preprint / Ukr. Acad. Sci. Inst. Math.; № 88.3).
2. *Perestyuk N. A., Tkach A. B.* Periodic solutions for weakly nonlinear partial system with pulse influense // Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, № 4. – P. 601 – 605.
3. *Bainov D. D., Minchev E., Myshkis A.* Periodic boundary-value problems for impulsive hyperbolic systems // Commun. Appl. Anal. – 1997. – **1**, № 4. – P. 1 – 14.
4. *Tkach A. B.* Numerical-analytic method of finding periodic solutions for systems of partial differential equations with pulse influence // Nonlinear Oscillations. – 2001. – **4**, № 2. – P. 278 – 288.
5. *Асанова А. Т.* О нелокальной краевой задаче для систем гиперболических уравнений с импульсными воздействиями // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 315 – 328.
6. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 10. – С. 1343 – 1354.

7. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Докл. РАН. – 2003. – **391**, № 3. – С. 295 – 297.
8. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Периодические и ограниченные на плоскости решения систем гиперболических уравнений // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 4. – С. 562 – 572.
9. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 3. – С. 337 – 446.
10. *Джумабаев Д. С., Асанова А. Т.* Признаки корректной разрешимости линейной нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 7 – 11.
11. *Асанова А. Т.* О краевой задаче с данными на нехарактеристических пересекающихся линиях для систем гиперболических уравнений со смешанной производной // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 1. – С. 3 – 12.
12. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.* Well-posedness of nonlocal boundary-value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2013. – **402**, № 1. – P. 167 – 178.
13. *Джумабаев Д. С.* Метод параметризации решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. АН КазССР. – 1988. – № 1. – С. 48 – 52.
14. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – **29**, № 1. – С. 50 – 66.
15. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
16. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. – New York etc.: Halsted Press, 1989. – 345 p.
17. *Hu S., Lakshmikantham V.* Periodic boundary-value problems for second order impulsive differential systems // Nonlinear Anal. – 1989. – **13**, № 1. – P. 75 – 85.
18. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1989. – 434 p.

Получено 27.12.13