УДК 517.9

О. В. Капустян, А. В. Русіна (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ РОЗПОДІЛЕНОГО ОБМЕЖЕНОГО КЕРУВАННЯ В ПАРАБОЛІЧНІЙ ЗАДАЧІ ЗІ ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

We study the problem of finding the optimal control in the form of feedback (synthesis) for a linear–quadratic problem in the form of a parabolic equation with rapidly oscillating coefficients and distributed control on the right-hand side (whose Fourier coefficients obey certain restrictions in the form of inequalities) and a quadratic quality criterion. We deduce the exact formula of synthesis and justify its approximate form corresponding to the replacement of rapidly oscillating coefficients by their averaged values.

Рассматривается задача нахождения оптимального управления в форме обратной связи (синтеза) для линейно-квадратичной задачи, состоящей из параболического уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами и распределенным управлением в правой части, на коэффициенты Фурье которого наложено ограничение типа неравенств, и квадратичного критерия качества. Найдена точная формула синтеза и обоснована его приближенная форма, которая заключается в замене быстроосциллирующих параметров на усредненные.

Вступ. В теорії лінійно-квадратичних нескінченновимірних задач оптимального керування [1 – 3] однією з найважливіших є задача знаходження оптимального керування в формі оберненого зв’язку (синтезу). При відсутності обмежень у класі розподілених керувань цю задачу для широкого кола задач розв’язано у [3]. Параметричний синтез для зосереджених обмежених керувань було отримано в роботі [4], для обмеженої стабілізації в класі розподілених керувань — у статті [5]. У роботах [6, 7] для задач зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами та зосередженим керуванням $g(x)u(t)$, де $g(x)$ є фіксованим, було запропоновано та обґрунтовано процедуру побудови наближеного усередненого синтезу, яка полягає в заміні у формулі точного розв’язку всіх швидкоосцилюючих параметрів на усереднені, а всіх нескінченних сум — на скінченні. В даній роботі цей підхід реалізовано для параболічної задачі з обмеженим розподіленим керуванням $u(t,x)$. На відміну від випадку зосередженого керування, де вихідна задача зводиться до одновимірної задачі оптимального керування, для розподіленого керування задача зводиться до зліченної кількості задач оптимального керування та з’являється нескінченна кількість точок перемикання у формі параметричного синтезу. В роботі знайдено точну формулу оптимального керування у формі оберненого зв’язку та обґрунтовано процедуру наближеного усередненого синтезу.

Постановка задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область, $\varepsilon \in (0,1)$ — малий параметр, $\xi = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2$ — заданий вектор. У циліндрі $Q = (0,T)\times\Omega$ розглядається задача оптимального керування

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = A^{\varepsilon} y + u(t,x), \quad (t,x)\in Q,\\ &y\,|_{\partial\Omega} = 0, \\ &y\,|_{t=0} = y_0^{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$J(y,u) = \int\limits_{\Omega} y^2(T,x)dx + \int\limits_{Q} u^2(t,x)dtdx \to \inf, \tag{2}$$

$$u \in U_\varepsilon = \left\{ v \in L^2(Q) \mid \forall i \geq 1 \quad \left| \int\limits_\Omega v(t,x) X_i^\varepsilon(x) dx \right| \leq \xi_i \quad \text{для м.в. } t \right\}, \tag{3}$$

де $A^\varepsilon = \operatorname{div}(a^\varepsilon \nabla)$, $a^\varepsilon(x) = a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $a = \big((a_{ij})\big)$ — вимірна симетрична періодична матриця, що задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості:

$$\exists\, v_1 > 0,\, v_2 > 0 \quad \forall\, \eta,\, x \in \mathbb{R}^n :\, v_1 \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \eta_i \eta_j \leq v_2 \sum_{i=1}^n \eta_i^2. \tag{4}$$

Нехай $\{X_i^\varepsilon\}$, $\{\lambda_i^\varepsilon\}$ — розв'язки спектральної задачі

$$\begin{aligned} A^\varepsilon X_i^\varepsilon &= -\lambda_i^\varepsilon X_i^\varepsilon, \\ X_i^\varepsilon|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$\{X_i^\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$ — ортонормований базис у $L^2(\Omega)$, $0 < \lambda_1^\varepsilon \leq \lambda_2^\varepsilon \leq \ldots,\, \lambda_i^\varepsilon \to \infty$, $i \to \infty$.

Далі через $\|\cdot\|$ і $(\cdot,\cdot)$ будемо позначати норму і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$.

Оскільки $U_\varepsilon \subset L^2(Q)$ є замкненою опуклою множиною, то задача (1)–(3) має єдиний розв'язок $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ у класі $W(0,T) \times L^2(Q)$ [1, с. 120], де

$$W(0,T) = \left\{ y \in L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big) \;\middle|\; \frac{dy}{dt} \in L^2\big(0,T; H^{-1}(\Omega)\big) \right\}.$$

У випадку сталої матриці a та відсутності обмежень $\big(U_\varepsilon = L^2(Q)\big)$ у [3] побудовано оптимальне керування у формі оберненого зв'язку.

Метою роботи є побудова оптимального синтезу задачі (1)–(3) та обґрунтування за допомогою усереднення швидкоосцилюючих параметрів його наближеної формули.

Перед формулюванням основних результатів проаналізуємо множину допустимих керувань U_ε.

По-перше, U_ε містить нетривіальний елемент. Дійсно, за теоремою Рісса–Фішера [11, с. 153] для будь-якого вектора $\eta = (\eta_i)_{i=1}^\infty \in l_2$, $|\eta_i| \leq \xi_i$ існує функція $v_\eta^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ така, що $\displaystyle\int_\Omega v_\eta^\varepsilon(x) X_i^\varepsilon(x) dx = \eta_i$ $\forall i \geq 1$. Отже, будь-яка функція

$$u(t,x) = \sum_{i=1}^N \varphi_k(t) \chi_{T_k}(t) v_k^\varepsilon(x)$$

належить U_ε, де $\{T_k\}_{k=1}^N$ — вимірні функції, $\bigcup_{k=1}^N T_k = (0,T)$, $T_n \cap T_m = \varnothing$, $n \neq m$, φ_k — вимірні функції, $\operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \big|\varphi_k(t)\big| \leq 1$, функція $v_k^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ відповідає вектору $\eta^{(k)} \in l_2$, $\left|\eta_i^{(k)}\right| \leq \xi_i$.

По-друге, як показано в роботі [5], у випадку сталих коефіцієнтів диференціального оператора обмеження (3) тісно пов'язані з оцінкою на модуль неперервності функції $u(t,\cdot)$.

По-третє, у випадку $\dim \Omega = 1$ можна дати ефективні достатні умови належності функції до множини U_ε, що не використовують власних функцій спектральної задачі (5). Зокрема, за допомогою інтегрування частинами одержуємо, що якщо $\Omega = (0,1)$, $a \in C^1(\mathbb{R})$ задовольняє (4), для майже всіх $t \in (0,T)$ функція $u(t,\cdot)\colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ є абсолютно неперервною, $u(t,0) = u(t,1) = 0$ та

$$\int_0^1 \left(u_x'(t,x)\right)^2 dx \le \frac{c}{v_2},$$

де константа $c > 0$ така, що $c^2 \le \xi_i^2 \lambda_i^\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ $\forall i \ge 1$, то функція $u = u(t,x)$ належить множині U_ε.

Побудова параметричного синтезу. Будемо шукати розв'язок задачі (1)–(3) у вигляді

$$y^\varepsilon(t,x) = \sum_{i=1}^\infty y_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x), \qquad u^\varepsilon(t,x) = \sum_{i=1}^\infty u_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x).$$

Тоді маємо зліченну систему одновимірних задач оптимального керування

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} y_i^\varepsilon(t) = -\lambda_i^\varepsilon y_i^\varepsilon + u_i^\varepsilon(t), \\ &y_i^\varepsilon(0) = (y_0^\varepsilon, X_i^\varepsilon), \\ &\left(y_i^\varepsilon(T)\right)^2 + \int_0^T \left(u_i^\varepsilon(t)\right)^2 dt \to \inf, \\ &\left|u_i^\varepsilon(t)\right| \le \xi_i. \end{aligned} \tag{6}$$

Якщо при $i \ge 1$ оптимальне керування не виходить на обмеження, то з принципу максимуму Понтрягіна одержуємо формулу

$$u_i^\varepsilon(t) = -\frac{y_i^\varepsilon(0) e^{\lambda_i^\varepsilon (t-2T)}}{1 + \dfrac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}\left(1 - e^{-2\lambda_i^\varepsilon T}\right)}. \tag{7}$$

Оскільки функція u_i^ε є монотонно зростаючою, то за умови

$$\frac{|y_i^\varepsilon(0)| e^{-2\lambda_i^\varepsilon T}}{1 + \dfrac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}\left(1 - e^{-2\lambda_i^\varepsilon T}\right)} < \xi_i \tag{8}$$

оптимальне керування $u_i^\varepsilon(t)$ має не більше однієї точки перемикання, і така точка завжди існує, якщо

$$\frac{|y_i^\varepsilon(0)| e^{-\lambda_i^\varepsilon T}}{1 + \dfrac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}\left(1 - e^{-2\lambda_i^\varepsilon T}\right)} > \xi_i. \tag{9}$$

Проаналізуємо умови (8) та (9).

По-перше, якщо $y_i^\varepsilon(0) = 0$, то оптимальним процесом в (6) буде $y_i^\varepsilon(t) \equiv 0$, $u_i^\varepsilon(t) \equiv 0$.

По-друге, одночасне виконання (8) і (9) для всіх значень $i \ge 1$ гарантує нерівність

$$e^{\lambda_i^\varepsilon T}\left(1 + \frac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}\right) < \frac{\left|y_i^\varepsilon(0)\right|}{\xi_i} < e^{2\lambda_i^\varepsilon T} \quad \forall\, i \ge 1, \tag{10}$$

що внаслідок монотонного прямування λ_i^ε до $+\infty$ вирізує непорожню множину початкових даних задачі (1)–(3).

По-третє, ефективна перевірка умов (8), (9) можлива завдяки переходу в них до усереднених величин власних чисел і функцій (див. (16)–(18)). Зокрема, якщо $\Omega = (0,1)$, то $\lambda_i^0 = a^0\pi^2 i^2$, $X_i^0(x) = \sqrt{2}\sin(\pi i x)$, де $a^0 = \left(\int_0^1 \frac{dx}{a(x)}\right)^{-1}$ [8, с. 22]. Тоді якщо $\|y_0^\varepsilon\| \le C$, то достатньою умовою для виконання (8) є умова

$$C < \xi_i e^{2a^0\pi^2 i^2 T}.$$

При цьому в класі початкових функцій $y_0^\varepsilon(x) \equiv C$ компоненти оптимального керування з парними номерами дорівнюють нулю, а для непарних номерів достатньою умовою для виконання (9) є така:

$$C > \frac{i\pi}{2\sqrt{2}}\xi_i\left(1 + \frac{1}{2a^0 i^2\pi^2}\right)e^{a^0\pi^2 i^2 T}.$$

Будемо розглядати випадок, коли для всіх $i \ge 1$ виконуються умови (8), (9) (щодо інших випадків див. зауваження в кінці роботи.) Тоді програмне оптимальне керування задачі (6) має вигляд

$$u_i^\varepsilon(t) = \begin{cases} -\dfrac{y_i^\varepsilon(0)e^{\lambda_i^\varepsilon(t-2T)}}{1 + \dfrac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}\Big(1 - e^{-2\lambda_i^\varepsilon T}\Big)}, & t \in [0, t_i^\varepsilon], \\ -\operatorname{sign}\big(y_i^\varepsilon(0)\big)\xi_i, & t \in [t_i^\varepsilon, T], \end{cases} \tag{11}$$

де точка перемикання t_i^ε визначається рівністю

$$t_i^\varepsilon = \frac{1}{\lambda_i^\varepsilon}\ln\left(\frac{\xi_i}{|y_i^\varepsilon(0)|}\left(e^{2\lambda_i^\varepsilon T} + \frac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}(e^{2\lambda_i^\varepsilon T} - 1)\right)\right). \tag{12}$$

Для побудови оптимального синтезу підставимо (11) у формулу розв'язку $y_i^\varepsilon(t)$ при $t \in [0, t_i^\varepsilon]$:

$$y_i^\varepsilon(t) = y_i^\varepsilon(0)e^{-\lambda_i^\varepsilon t} + e^{-\lambda_i^\varepsilon t}\int_0^t u_i^\varepsilon(s)e^{\lambda_i^\varepsilon s}ds.$$

Одержуємо

$$y_i^\varepsilon(t) = y_i^\varepsilon(0)e^{-\lambda_i^\varepsilon t}\frac{1 + \dfrac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}\Big(1 - e^{2\lambda_i^\varepsilon(t-T)}\Big)}{1 + \dfrac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}\Big(1 - e^{-2\lambda_i^\varepsilon T}\Big)} \qquad \text{при} \quad t \in [0, t_i^\varepsilon].$$

Звідси і з (11) згідно з рівністю $\operatorname{sign}\big(y_i^\varepsilon(t_i^\varepsilon)\big) = \operatorname{sign}(y_i^\varepsilon(0))$ отримуємо

$$u_i^\varepsilon[t, y_i^\varepsilon(t)] = \begin{cases} -\dfrac{y_i^\varepsilon(t)e^{2\lambda_i^\varepsilon(t-T)}}{1 + \dfrac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}\left(1 - e^{2\lambda_i^\varepsilon(t-T)}\right)}, & t \in [0, t_i^\varepsilon], \\ -\operatorname{sign}\big(y_i^\varepsilon(t_i^\varepsilon)\big)\xi_i, & t \in [t_i^\varepsilon, T], \end{cases} \tag{13}$$

де t_i^ε визначається з рівняння у формі синтезу

$$t_i^\varepsilon = \frac{1}{\lambda_i^\varepsilon}\ln\left(\frac{\xi_i e^{2\lambda_i^\varepsilon T}\left(1 + \dfrac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}(1 - e^{2\lambda_i^\varepsilon(t-T)}\right)}{\big|y_i^\varepsilon(t)\big|e^{\lambda_i^\varepsilon t}}\right). \tag{14}$$

Тут $y_i^\varepsilon(t)$, $t \in [0, t_i^\varepsilon]$, — розв'язок рівняння (6) з керуванням (13), (14).

Таким чином, за виконання умов (8), (9) формули (13), (14) для кожного $i \geq 1$ визначають оптимальне керування у формі оберненого зв'язку в задачі (6).

Лема. *Формула*

$$u^\varepsilon\big[t, x, y^\varepsilon(t,x)\big] = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\alpha_i^\varepsilon(t)(y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon) + \beta_i^\varepsilon(t)\Big) X_i^\varepsilon(x) \tag{15}$$

визначає оптимальне керування у формі оберненого зв'язку в задачі (1)–(3), *де*

$$\alpha_i^\varepsilon(t) = \begin{cases} -\dfrac{e^{2\lambda_i^\varepsilon(t-T)}}{1 + \dfrac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}\left(1 - e^{2\lambda_i^\varepsilon(t-T)}\right)}, & t \in [0, t_i^\varepsilon], \\ 0, & t \in (t_i^\varepsilon, T], \end{cases}$$

$$\beta_i^\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_i^\varepsilon], \\ -\operatorname{sign}\big(y^\varepsilon(t_i^\varepsilon), X_i^\varepsilon\big)\xi_i, & t \in (t_i^\varepsilon, T], \end{cases}$$

$$t_i^\varepsilon = \gamma_i^\varepsilon(t) - \frac{1}{\lambda_i^\varepsilon} \ln \big|(y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon)\big|, \quad t \in [0, t_i^\varepsilon],$$

$$\gamma_i^\varepsilon(t) = \frac{1}{\lambda_i^\varepsilon} \ln \left(\xi_i e^{-\lambda_i^\varepsilon t} e^{2\lambda_i^\varepsilon T} \left(1 + \frac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}\left(1 - e^{2\lambda_i^\varepsilon(t-T)}\right)\right)\right).$$

Доведення. Оскільки

$$|\alpha_i^\varepsilon(t)| \leq 1, \ |\beta_i^\varepsilon(t)| \leq \xi_i \quad \forall\, t \in [0, T],$$

то згідно з рівністю Парсеваля для довільних $t \in [0, T]$, $y \in L^2(\Omega)$

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^\varepsilon(t)(y, X_i^\varepsilon) X_i^\varepsilon \right\| \leq \|y\|, \qquad \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon \right\| \leq \|\xi\|.$$

Отже, згідно з результатами [9, с.177] задача (1) з керуванням (15) має єдиний розв'язок $y^\varepsilon(t,x)$ в $W(0,T)$. Залишилось показати, що записане за формулою (15) керування

$$u^\varepsilon(t,x) := u^\varepsilon\big[t, x, y^\varepsilon(t,x)\big]$$

дійсно є оптимальним керуванням у задачі (1)–(3). Оскільки $y^\varepsilon(t,x) \in W(0,T)$, то з наведених вище оцінок випливає, що $u^\varepsilon(t,x) \in L^2(Q)$. Застосовуючи до задачі (1) з формулою керування (15) метод Фур'є, одержуємо, що єдиний розв'язок $y^\varepsilon(t,x)$ цієї задачі має вигляд

$$y^\varepsilon(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x),$$

де для кожного $i \geq 1$ функція $y_i^\varepsilon(t)$ є єдиним розв'язком рівняння (6) з початковими даними $(y_0^\varepsilon, X_i^\varepsilon)$ і керуванням (13), (14). Це дозволяє стверджувати, що у формулі (15)

$$u^\varepsilon\big[t, x, y^\varepsilon(t,x)\big] = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x),$$

де для кожного $i \geq 1$ функція u_i^ε — єдиний розв'язок задачі оптимального керування (6), що визначається з (11), (12). Зокрема, $|u_i^\varepsilon(t)| \leq \xi_i \ \forall\, t \in [0,T] \ \forall\, i \geq 1$, отже, формула (15) визначає функцію з множини U_ε. Тепер нехай $v^\varepsilon(t,x)$ — оптимальне керування в задачі (1)–(3). Тоді $v^\varepsilon(t,x) = \sum_{i=1}^\infty v_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x)$, де для кожного $i \geq 1$ $v_i^\varepsilon(t)$ — оптимальне керування в задачі (6). Отже, $v_i^\varepsilon \equiv u_i^\varepsilon$. Це означає, що формула (15) задає оптимальний синтез в задачі (1)–(3).

Лему доведено.

Побудова і обґрунтування наближеного усередненого синтезу. Нехай стала матриця a^0 є усередненою [8, с. 20] для $a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $A^0 = \operatorname{div}(a^0\nabla)$, $\{\lambda_i^0\}$, $\{X_i^0\}$ — розв'язки відповідної спектральної задачі

$$A^0 X_i^0 = -\lambda_i^0 X_i^0,$$

$$X_i^0|_{\partial\Omega} = 0,$$

причому спектр A^0 є простим, тобто

$$0 < \lambda_1^0 < \lambda_2^0 < \ldots < \lambda_k^0 < \ldots, \lambda_i^0 \to \infty, \quad i \to \infty. \tag{16}$$

Ця умова гарантовано виконується, якщо $\dim \Omega = 1$. Тоді для довільних $i \geq 1$ справджуються граничні рівності [8, с. 299]

$$\lambda_i^\varepsilon \to \lambda_i^0, \qquad X_i^\varepsilon \to X_i^0 \quad \text{в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{17}$$

Будемо вважати виконаними умови збіжності

$$a^\varepsilon \xrightarrow{G} a^0, \qquad y_0^\varepsilon \to y_0 \quad \text{слабко в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{18}$$

Слід зауважити, що клас симетричних матриць, що задовольняють умову (4), є компактним відносно G-збіжності [8, с. 167].

Тоді з (12) маємо, що для всіх $i \geq 1$ при $\varepsilon \to 0$

$$t_i^\varepsilon \to t_i^0 = \frac{1}{\lambda_i^0} \ln\left(\frac{\xi_i}{|y_i^0|}\left(e^{2\lambda_i^0 T} + \frac{1}{2\lambda_i^0}\left(e^{2\lambda_i^0 T} - 1\right)\right)\right), \tag{19}$$

де $y_i^0 = (y_0, X_i^0)$.

Крім того, оскільки $\operatorname{sign}(y_i^\varepsilon(t_i^\varepsilon)) = \operatorname{sign}(y_i^\varepsilon(0))$ та $y_i^\varepsilon(0) \to y_i^0$ при $\varepsilon \to 0$, то згідно з умовами (8), (9) для будь-яких $i \geq 1$ та $t \in [0,T] \setminus \{t_i^0\}_{i=1}^\infty$ при $\varepsilon \to 0$

$$\alpha_i^\varepsilon(t) \to \alpha_i^0(t) = \begin{cases} -\dfrac{e^{2\lambda_i^0(t-T)}}{1 + \dfrac{1}{2\lambda_i^0}\left(1 - e^{2\lambda_i^0(t-T)}\right)}, & t \in [0, t_i^0], \\ 0, & t \in (t_i^0, T], \end{cases}$$

$$\beta_i^\varepsilon(t) \to \beta_i^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_i^0], \\ -\operatorname{sign}(y_i^0)\xi_i, & t \in (t_i^0, T]. \end{cases} \tag{20}$$

Дотримуючись робіт [6, 7], на основі параметричного синтезу (15) побудуємо наближений усереднений синтез для задачі (1)–(3)

$$u_N^0\left[t, x, y_N^\varepsilon(t,x)\right] = \sum_{i=1}^N \left(\alpha_i^0(t)(y_N^\varepsilon(t), X_i^0) + \beta_i^0(t)\right) X_i^0(x), \tag{21}$$

де моменти $\{t_i^0\}_{i=1}^\infty$ визначаються рівністю (19), а функції $\{\alpha_i^0\}_{i=1}^\infty$, $\{\beta_i^0\}_{i=1}^\infty$ — рівностями (20), $y_N^\varepsilon(t,x)$ — розв'язок задачі (1) з керуванням (21), існування і єдиність якого у класі $W(0,T)$ для кожних $N \geq 1$ і $\varepsilon > 0$ випливає з [9, с. 177].

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови* (4), (8), (9), (16), (18). *Тоді формула* (21) *є наближеним усередненим синтезом для задачі* (1)–(3) *в тому сенсі, що для будь-яких* $\eta > 0$ *і* $\delta > 0$ *існують* $\overline{N} \geq 1$ *та* $\overline{\varepsilon} \in (0,1)$ *такі, що для будь-яких* $N \geq \overline{N}$ *і* $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$

$$\left\| u^\varepsilon[\cdot,\cdot,y^\varepsilon] - u_N^0[\cdot,\cdot,y_N^\varepsilon] \right\|_{L_2(Q)} < \eta,$$

$$\|y^\varepsilon - y_N^\varepsilon\|_{C([\delta,T];L^2(\Omega)))} < \eta,$$

$$\left| J(y^\varepsilon, u^\varepsilon[t,x,y^\varepsilon] - J(y_N^\varepsilon, u_N^0[t,x,y_N^\varepsilon]) \right| < \eta.$$

Доведення. Спочатку розглянемо допоміжну задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial t} = A^\varepsilon z + u^0[t,x,z], \\ &z|_{\partial\Omega} = 0, \\ &z|_{t=0} = y_0^\varepsilon, \end{aligned} \tag{22}$$

де

$$u^0[t,x,z] = \sum_{i=1}^\infty (\alpha_i^0(t)(z, X_i^0) + \beta_i^0(t)) X_i^0(x). \tag{23}$$

Задача (22) у класі $W(0,T)$ має єдиний розв'язок $z^\varepsilon(t,x)$ [9, с. 177], причому $z^\varepsilon \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ і для майже всіх $t \in (0,T)$ справджується оцінка

$$\frac{d}{dt}\|z^\varepsilon(t)\|^2 + 2v_1\|z^\varepsilon(t)\|_{H_0^1}^2 \leq 2\sum_{i=1}^\infty \left(\left|\alpha_i^0(t)\right| (z^\varepsilon(t), X_i^0)^2 + \left|\beta_i^0(t)\right| \left|(z^\varepsilon(t), X_i^0)\right| \right). \tag{24}$$

З оцінки (24) та рівності Парсеваля, враховуючи, що $\left|\alpha_i^0(t)\right| \leq 1$, $\left|\beta_i^0(t)\right| \leq \xi_i$, маємо

$$\|z^\varepsilon(t)\|^2 + 2v_1 \int_0^t \|z^\varepsilon(s)\|_{H_0^1}^2 ds \leq \|y_0^\varepsilon\|^2 + 2\int_0^t \|z^\varepsilon(s)\|^2 ds + 2\int_0^t \|\xi\|\|z^\varepsilon(s)\| ds \leq$$

$$\leq \|y_0^\varepsilon\|^2 + 3\int_0^t \|z^\varepsilon(s)\|^2 ds + \|\xi\|^2 T. \tag{25}$$

Із (25) і нерівності Гронуолла одержуємо

$$\|z^\varepsilon(t)\|^2 \leq \left(\|y_0^\varepsilon\|^2 + \|\xi\|^2 T\right) e^{3T} \quad \forall t \in [0,T], \tag{26}$$

$$\int_0^T \|z^\varepsilon(t)\|_{H_0^1}^2 dt \leq \frac{1}{2v_1}\left(\|y_0^\varepsilon\|^2 + \|\xi\|^2 T\right)\left(3Te^{3T} + 1\right). \tag{27}$$

При цьому, оскільки
$$\big\|u^0[t,x,z^\varepsilon]\big\|^2 \le 2\big(\|z^\varepsilon(t)\|^2+\|\xi\|^2\big) \quad \forall t\in[0,T], \tag{28}$$
згідно з (22)
$$\left\{\frac{\partial z^\varepsilon}{\partial t}\right\} \quad \text{є обмеженою в} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{29}$$
Співвідношення (26) – (29) і лема 63.2 про компактність [9, с. 378] гарантують, що існує функція $z\in W(0,T)\subset C\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$ така, що по підпослідовності
$$z^\varepsilon\to z \quad \text{в } L^2(Q) \quad \text{і майже скрізь в} \quad Q,$$
$$z^\varepsilon(t)\to z(t) \quad \text{в } L^2(\Omega) \quad \text{для майже всіх} \quad t\in[0,T], \tag{30}$$
$$z^\varepsilon\to z \quad \text{слабко в} \quad L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big).$$
Оскільки для $t\in(0,T)$
$$\big\|u^0[t,x,z^\varepsilon]-u^0[t,x,z]\big\|\le\|z^\varepsilon(t)-z(t)\|, \tag{31}$$
то з (30) виводимо, що
$$u^0[t,x,z^\varepsilon]\to u^0[t,x,z] \quad \text{в} \quad L^2(Q). \tag{32}$$
Оскільки $A^\varepsilon \xrightarrow{G} A^0$, то з (32) на підставі леми 1 [10] одержуємо, що z — розв'язок задачі (22) при $\varepsilon=0$, тобто задачі (22) з оператором A^0 та початковим значенням y_0, причому при $\varepsilon\to0$
$$z^\varepsilon\to z \quad \text{в} \quad C\big([\delta,T];L^2(\Omega)\big) \quad \forall\,\delta>0. \tag{33}$$
Далі, оскільки задача (22) має єдиний розв'язок, то збіжність в (30), (33) відбувається по всій послідовності. Звідси, зокрема, випливає, що
$$J\big(z^\varepsilon,u^0[t,x,z^\varepsilon]\big)\to J\big(z,u^0[t,x,z]\big), \quad \varepsilon\to0. \tag{34}$$

Тепер покажемо, що для будь-якого $\eta>0$ існують $N_1\ge1$ і $\varepsilon_1\in(0,1)$ такі, що
$$\big|J\big(y_N^\varepsilon,u_N^0[t,x,y_N^\varepsilon]\big)-J\big(z^\varepsilon,u^0[t,x,z^\varepsilon]\big)\big|<\frac{\eta}{3} \quad \forall N\ge N_1 \quad \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_1). \tag{35}$$
Зауважимо, що y_N^ε задовольняє (24) – (27), $u_N^0[t,x,y_N^\varepsilon]$ — (28), тому існує константа $C_1>0$ (що не залежить від N і ε) така, що
$$\big|J(y_N^\varepsilon,u_N^0[t,x,y_N^\varepsilon])-J(z^\varepsilon,u^0[t,x,z^\varepsilon])\big|\le$$
$$\le C_1\left(\big\|y_N^\varepsilon(T)-z^\varepsilon(T)\big\|+\left(\int\limits_0^T\big\|u_N^0[t,y_N^\varepsilon]-u^0[t,z^\varepsilon]\big\|^2dt\right)^{1/2}\right). \tag{36}$$
Для різниці $\omega_N^\varepsilon=y_N^\varepsilon-z^\varepsilon$ маємо задачу
$$\begin{aligned}&\frac{\partial\omega_N^\varepsilon}{\partial t}=A^\varepsilon\omega_N^\varepsilon+\sum_{i=1}^N\alpha_i^0(t)(\omega_N^\varepsilon(t),X_i^0)X_i^0(x)+f_N^\varepsilon(t,x),\\ &\omega_N^\varepsilon\mid_{\partial\Omega}=0,\\ &\omega_N^\varepsilon\mid_{t=0}=0,\end{aligned} \tag{37}$$

де

$$f_N^\varepsilon(t,x) = -\sum_{i=N+1}^{\infty} \big(\alpha_i^0(t)(z^\varepsilon, X_i^0) + \beta_i^0(t)\big) X_i^0(x).$$

Використовуючи рівність Парсеваля, для $t \in [0,T]$ одержуємо

$$\|f_N^\varepsilon(t)\|^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} \left|\alpha_i^0(t)(z^\varepsilon(t), X_i^0) + \beta_i^0(t)\right|^2 \leq 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} (\alpha_i^0(t))^2 (z^\varepsilon(t), X_i^0)^2 +$$

$$+2 \sum_{i=N+1}^{\infty} (\beta_i^0(t))^2 \leq 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} (z^\varepsilon(t), X_i^0)^2 + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \xi_i^2 \leq$$

$$\leq 4 \sum_{i=N+1}^{\infty} (z(t), X_i^0)^2 + 4\|z^\varepsilon(t) - z(t)\|^2 + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \xi_i^2, \tag{38}$$

де z — розв'язок задачі (22) при $\varepsilon = 0$.

З (37) маємо оцінки для майже всіх $t \in (0,T)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_N^\varepsilon(t)\|^2 + v_1 \|\omega_N^\varepsilon(t)\|_{H_0^1}^2 \leq \|\omega_N^\varepsilon(t)\|^2 + \big(f_N^\varepsilon(t), \omega_N^\varepsilon(t)\big),$$

$$\frac{d}{dt}\|\omega_N^\varepsilon(t)\|^2 \leq 3\|\omega_N^\varepsilon(t)\|^2 + \|f_N^\varepsilon(t)\|^2.$$

Тоді з леми Гронуолла випливає, що

$$\|\omega_N^\varepsilon(t)\|^2 \leq \int_0^T \|f_N^\varepsilon(t)\|^2 dt \cdot e^{3T} \quad \forall t \in [0,T]. \tag{39}$$

З (38), (39) одержуємо

$$\exists C_2 > 0 \quad \forall t \in [0,T]: \quad \|\omega_N^\varepsilon(t)\|^2 \leq$$

$$\leq C_2 \left(\int_0^T \sum_{i=N+1}^{\infty} (z(t), X_i^0)^2 dt + \int_0^T \|z^\varepsilon(t) - z(t)\|^2 dt + \sum_{i=N+1}^{\infty} \xi_i^2 \right). \tag{40}$$

Оскільки для будь-якого $t \in [0,T]$ згідно з нерівністю Бесселя

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (z(t), X_i^0)^2 \to 0, \quad N \to \infty,$$

а на підставі (26)

$$\left| \sum_{i=N+1}^{\infty} (z(t), X_i^0)^2 \right| \leq \big(\|y_0\|^2 + \|\xi\|^2 T\big) e^{3T},$$

то за теоремою Лебега перший доданок у (40) прямує до 0 при $N \to \infty$. Тоді згідно з (30) для будь-якого $\eta_1 > 0$ існують $N_1 \geq 1$ і $\varepsilon_1 \in (0,1)$ такі, що

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\omega_N^\varepsilon(t)\|^2 + \int_0^T \left\|u_N^0[t, y_N^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon]\right\|^2 dt < \eta_1 \quad \forall N \geq N_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1). \tag{41}$$

Із нерівностей (41) і (36) одержуємо (35).

Залишилось показати, що

$$J\big(y^\varepsilon, u^\varepsilon[t,x,y^\varepsilon]\big) - J\big(z, u^0[t,x,z]\big) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{42}$$

де z — розв'язок задачі (22) при $\varepsilon = 0$.

Зауважимо, що для y^ε справджуються оцінки (24)–(28), отже, існує функція $y \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ така, що по підпослідовності при $\varepsilon \to 0$

$$y^\varepsilon \to y \quad \text{в сенсі (30).} \tag{43}$$

Покажемо, що при $\varepsilon \to 0$

$$u^\varepsilon[t,y^\varepsilon] \to u^0[t,y] \quad \text{в} \quad L^2(Q). \tag{44}$$

Згідно з (18)–(20) та (43) для майже всіх $(t,x) \in Q$, всіх $i \geq 1$ при $\varepsilon \to 0$

$$\Big(\alpha_i^\varepsilon(t)(y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon) + \beta_i^\varepsilon(t)\Big)X_i^\varepsilon(x) \to \Big(\alpha_i^0(t)\big(y(t), X_i^0\big) + \beta_i^0(t)\Big)X_i^0(x). \tag{45}$$

Тому згідно з оцінки (26) за теоремою Лебега для будь-якого $M > 1$

$$\sum_{i=1}^M \Big(\alpha_i^\varepsilon(t)(y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon) + \beta_i^\varepsilon(t)\Big)X_i^\varepsilon \to \sum_{i=1}^M \Big(\alpha_i^0(t)\big(y(t), X_i^0\big) + \beta_i^0(t)\Big)X_i^0 \quad \text{в} \quad L^2(Q). \tag{46}$$

При цьому аналогічно до попередніх міркувань

$$\int_0^T \left\| \sum_{i=M+1}^\infty (\alpha_i^0(t)\big(y(t), X_i^0\big) + \beta_i^0(t))X_i^0 \right\|^2 dt \to 0, \quad M \to \infty. \tag{47}$$

Оцінимо норму відповідної суми для коефіцієнтів, що залежать від ε. Оскільки

$$\sum_{i=M+1}^\infty \Big(\alpha_i^\varepsilon(t)(y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon) + \beta_i^\varepsilon(t)\Big)X_i^\varepsilon(x) = \sum_{i=M+1}^\infty u_i^\varepsilon(t)X_i^\varepsilon(x),$$

де u_i^ε визначаються формулою (11) і при цьому $|u_i^\varepsilon(t)| \leq \xi_i \ \forall t \in [0,T]$, то

$$\left\| \sum_{i=M+1}^\infty u_i^\varepsilon(t)X_i^\varepsilon \right\|^2 \leq \sum_{i=M+1}^\infty \xi_i^2 \to 0, \quad M \to \infty. \tag{48}$$

Таким чином, виконується збіжність (44), що наслідок G-збіжності A^ε до A^0 означає, що $y \equiv z$ — розв'язок (22) при $\varepsilon = 0$, збіжність у (43) відбувається по всій послідовності і

$$y^\varepsilon \to z \quad \text{в} \quad C\big([\delta,T]; L^2(\Omega)\big) \quad \forall \delta > 0. \tag{49}$$

Тоді має місце (42).

Таким чином, з (32), (41) та (44) випливає справедливість твердження теореми щодо близькості керувань, з (33), (41) і (49) — твердження теореми щодо близькості станів та з (34), (35) та (42) — близькість значень критеріїв якості.

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо для всіх $i \geq 1$ виконується нерівність

$$\frac{|y_i^\varepsilon(0)|e^{-\lambda_i^\varepsilon T}}{1 + \dfrac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}\left(1 - e^{-2\lambda_i^\varepsilon T}\right)} < \xi_i, \tag{50}$$

то оптимальне керування у формі оберненого зв'язку має вигляд

$$u^\varepsilon[t,x,y^\varepsilon] = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\alpha}_i^\varepsilon(t)(y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon)X_i^\varepsilon(x),$$

де

$$\bar{\alpha}_i^\varepsilon(t) = -\frac{e^{2\lambda_i^\varepsilon(t-T)}}{1+\dfrac{1}{2\lambda_i^\varepsilon}\left(1-e^{2\lambda_i^\varepsilon(t-T)}\right)}, \quad t\in[0,T],$$

і формула

$$u_N^0[t,x,y_N^\varepsilon] = \sum_{i=1}^{N} \bar{\alpha}_i^0(t)\big(y_N^\varepsilon(t), X_i^0\big)X_i^0(x)$$

визначає наближений усереднений синтез для задачі (1) – (3).

Легко бачити, що основні результати роботи можуть бути перенесені на випадок, коли для однієї частини номерів $i \geq 1$ виконуються нерівності (8), (9), а для іншої виконується нерівність (50).

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 416 с.
2. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. – Новосибирск: Науч. книга, 1999. – 350 с.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление линейными системами. – Киев: Вища шк., 1988. – 278 с.
4. *Белозеров В. Е., Капустян В. Е.* Геометрические методы модального управления. – Киев: Наук. думка, 1999. – 260 с.
5. *Егоров А. И., Михайлова Т. Ф.* Синтез оптимального управления тепловым процессом с ограниченным управлением. Ч. 1 // Автоматика (Проблемы управления и информатики). – 1990. – № 3. – С. 57 – 61.
6. *Сукретна А. В., Капустян О. А.* Наближений усереднений синтез задачі оптимального керування для параболічного рівняння // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 10. – С. 1384 – 1394.
7. *Капустян О. В., Сукретна А. В.* Усереднений синтез оптимального керування для хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 5. – С. 612 – 620.
8. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.
9. *Sell G. R., You Y.* Dynamics of evolutionary equations. – New York: Springer, 2002. – 670 p.
10. *Капустян О. В., Шкляр Т. Б.* Глобальний атрактор параболічного включення з неавтономною головною частиною // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 1. – С. 77 – 88.
11. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.

Одержано 02.03.14,
після доопрацювання — 05.08.14