

СКРУЧЕНО-ЛАГІДНІ АЛГЕБРИ Є НОДАЛЬНИМИ

We prove that any gentle or skewed-gentle algebra is a nodal algebra of type A .

Доказано, что каждая мягкая или скрученно-мягкая алгебра является нодальной алгеброй типа A .

Лягідні та скручено-лягідні алгебри були введені в роботах [1, 2] у зв'язку з теорією зображень. Пізніше виявилось, що ці алгебри відіграють істотну роль і при дослідженні похідних категорій. Тому їх вивченню приділяється значна увага фахівців. У роботах [3, 4] було розглянуто новий клас алгебр — нодальні (або вузлові) та вивчено їх будову й зображення. У цій роботі ми доводимо, що кожна лягідна або скручено-лягідна алгебра є насправді нодальною алгеброю типу A .

Нагадаємо відповідні означення. Ми фіксуємо алгебраїчно замкнене поле k і розглядаємо лише скінченновимірні k -алгебри.

Означення 1. Алгебра A називається нодальною [3, 4], якщо існує спадкова алгебра $H \supset A$ така, що:

- (1) $\text{rad } A = \text{rad } H$;
- (2) $\text{length}_A(H \otimes_A U) \leq 2$ для кожного простого лівого A -модуля U .

Будемо казати, що нодальна алгебра A пов'язана зі спадковою алгеброю H .

Нагадаємо, що алгебра A називається базовою [5], якщо її фактор-алгебра $\bar{A} = A/\text{rad } A$ ізоморфна прямому добутку тіл. Оскільки ми розглядаємо алгебри над алгебраїчно замкненим полем k , то в цьому випадку $A/\text{rad } A \simeq k^m$ для деякого m .

Як відомо [5] (гл. 3), кожна базова спадкова алгебра ізоморфна алгебрі шляхів деякого сагайдака Q без орієнтованих циклів. У [3, 4] доведено, що кожна базова нодальна алгебра A ізоморфна алгебрі, яка отримується із базової спадкової алгебри H із сагайдаком Q за допомогою деякої послідовності операцій склеювання і роздуття вершин цього сагайдака, причому кожна вершина бере участь щонайбільше в одній такій операції. Нагадаємо, як застосовуються ці операції до вершин сагайдака Q :

- (1) при склеюванні вершин i та j
 - (а) ми ототожнюємо вершини i та j , замінюючи їх однією вершиною і зберігаючи при цьому всі стрілки, які починаються або закінчуються в цих вершинах;
 - (б) якщо стрілка α починається у вершині i (або j), а стрілка β закінчується у вершині j (відповідно i), то ми накладаємо співвідношення $\alpha\beta = 0$;
- (2) при роздутті вершини i
 - (а) ми замінюємо вершину i двома вершинами i' та i'' ;
 - (б) кожен стрілку α , яка закінчується в i , ми замінюємо двома стрілками α' та α'' , які закінчуються відповідно в i' та i'' ;
 - (в) кожен стрілку β , яка починається в i , ми замінюємо двома стрілками β' та β'' , які починаються відповідно в i' та i'' ;

(d) якщо стрілка β починається у вершині i , а стрілка α закінчується в цій вершині, ми накладаємо співвідношення $\beta'\alpha' = \beta''\alpha''$.

Зауважимо, що після виконання цих операцій можуть з'явитись орієнтовані цикли і навіть петлі, але у подальшому до вершин, у яких утворилися петлі, ці операції вже не застосовуються. Зауважимо також, що спадкову алгебру H і сагайдак Q визначено неоднозначно.

Означення 2. Базова алгебра A називається лагідною, якщо вона задається сагайдаком Q зі співвідношеннями R , причому виконуються такі умови:

(1) для кожної вершини $i \in Q$ існує не більше двох стрілок, які починаються в i , та не більше двох стрілок, які закінчуються в i ;

(2) усі співвідношення в R мають вигляд $\alpha\beta$ для деяких стрілок α, β ;

(3) якщо існують дві стрілки α_1, α_2 , які починаються в i , то для кожної стрілки β , яка закінчується в i , або $\alpha_1\beta \in R$, або $\alpha_2\beta \in R$, але не одночасно;

(4) якщо існують дві стрілки β_1, β_2 , які закінчуються в i , то для кожної стрілки α , яка починається в i , або $\alpha\beta_1 \in R$, або $\alpha\beta_2 \in R$, але не одночасно.

Означення 3. Базова алгебра A називається скручено-лагідною, якщо вона отримується з лагідної алгебри B шляхом роздуття деяких вершин її сагайдака, в які не більше однієї стрілки α входить і не більше однієї стрілки β виходить, причому якщо наявні обидві стрілки, то $\beta\alpha \notin R$.

Це означення відрізняється від означень із робіт [2, 6] (які теж різні), але неважко переко-
натися, що воно їм рівносильне.

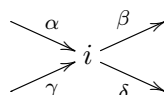
Теорема. Кожна лагідна або скручено-лагідна алгебра є нодальною, причому сагайдак відповідної спадкової алгебри є незв'язним об'єднанням сагайдаків типу A та \tilde{A} (тобто лінійок та циклів).

Зауважимо, що ця теорема є оберненою до теореми 3.1 із роботи [3]. З цих двох теорем також випливає, що така алгебра є лагідною тоді й лише тоді, коли при її побудові не використовувались роздуття, а лише склейки.

Доведення. Оскільки скручено-лагідна алгебра отримується із лагідної роздуттями вершин відповідного сагайдака, причому ці вершини не беруть участі у співвідношеннях, то достатньо показати, що будь-яка лагідна алгебра є нодальною.

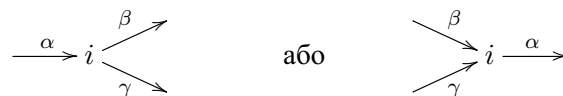
За означенням лагідна алгебра A задається сагайдаком Q зі співвідношеннями R . В цьому сагайдаку нас цікавитимуть лише ті вершини, в яких є співвідношення. Вони поділяються на 3 типи:

(1) у вершину i дві стрілки входять і дві стрілки із неї виходять



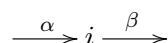
та є два співвідношення, наприклад $\beta\alpha = 0$ і $\delta\gamma = 0$;

(2) у вершину i одна стрілка входить і дві стрілки із неї виходять (або у вершину i дві стрілки входять і одна стрілка із неї виходить)



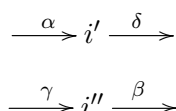
причому $\beta\alpha = 0$ або $\gamma\alpha = 0$ (відповідно, $\alpha\beta = 0$ або $\alpha\gamma = 0$), але не одночасно;

(3) у вершину i одна стрілка входить і одна стрілка із неї виходить



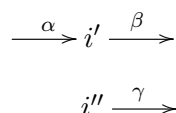
та є співвідношення $\beta\alpha = 0$.

Доведення проведемо індукцією по кількості співвідношень. Якщо співвідношень взагалі немає, то лагідна алгебра є спадковою, а її сагайдак є незв'язним об'єднанням сагайдаків типу A або \tilde{A} . Нехай i — вершина, яка входить у деяке співвідношення. Припустимо, що вона належить до типу (1). Розглянемо сагайдак Q_1 , який отримується із сагайдака Q заміною вершини i двома вершинами i' та i'' :

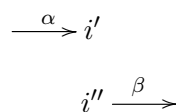


Всі інші вершини в сагайдаку Q_1 залишаються незмінними. Співвідношення R_1 сагайдака Q_1 — це «старі» співвідношення R без тих двох, які були у вершині i . По суті ми отримали нову алгебру A_1 , яка задається сагайдаком Q_1 зі співвідношеннями R_1 . Очевидно, що алгебра A одержується із A_1 склеюванням компонент i' та i'' .

Якщо вершина i належить до типу (2), то ми її замінюємо двома вершинами i' та i'' вигляду



(або із зворотними напрямками стрілок), а якщо вершина i належить до типу (3), то будемо виконувати заміну вигляду



В результаті такого перетворення одержуємо нову алгебру A_1 , з якої алгебра A одержується склеюванням вершин i' та i'' , в яких немає співвідношень. Очевидно, ця алгебра також є лагідною, але співвідношень в ній менше, ніж в A . Цим індукція завершується.

1. *Assem I., Skowroński A.* Iterated tilted algebras of type A_n // *Math. Z.* – 1987. – **195**. – S. 269–290.
2. *Geiß G., de la Peña J. A.* Auslander–Reiten components for clans // *Bol. Soc. mat. mech. Ser. III.* – 1999. – **5**, № 3. – P. 307–326.
3. *Drozd Y. A., Zembyk V. V.* Representations of nodal algebras of type A // *Algebra and Discrete Math.* – 2013. – **15**, № 2. – P. 179–200.
4. *Зембик В. В.* Будова скінченновимірних нодальних алгебр // *Укр. мат. журн.* – 2014. – **66**, № 3. – P. 415–419.
5. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры. – Киев: Вища шк., 1980.
6. *Bekkert V., Marcos E. N., Merklen H.* Indecomposables in derived categories of skewed-gentle algebras // *Commun Algebra.* – 2003. – **31**. – P. 2615–2654.

Одержано 13.02.15