УДК 512.552

В. В. Зембик (Ін-т математики НАН України, Київ)

СКРУЧЕНО-ЛАГІДНІ АЛГЕБРИ Є НОДАЛЬНИМИ

We prove that any gentle or skewed-gentle algebra is a nodal algebra of type A.

Доказано, что каждая мягкая или скрученно-мягкая алгебра является нодальной алгеброй типа A.

Лагідні та скручено-лагідні алгебри були введені в роботах [1, 2] у зв'язку з теорією зображень. Пізніше виявилось, що ці алгебри відіграють істотну роль і при дослідженні похідних категорій. Тому їх вивченню приділяється значна увага фахівців. У роботах [3, 4] було розглянуто новий клас алгебр — *нодальні* (або *вузлові*) та вивчено їх будову й зображення. У цій роботі ми доводимо, що кожна лагідна або скручено-лагідна алгебра є насправді нодальною алгеброю типу A.

Нагадаємо відповідні означення. Ми фіксуємо алгебраїчно замкнене поле $\mathbf{k}$ і розглядаємо лише скінченновимірні $\mathbf{k}$-алгебри.

Означення 1. *Алгебра A називається нодальною* [3, 4], *якщо існує спадкова алгебра $H \supset$ $\supset A$ така, що*:

(1) $\operatorname{rad} A = \operatorname{rad} H$;

(2) $\operatorname{length}_A(H \otimes_A U) \le 2$ *для кожного простого лівого A-модуля U.*

Будемо казати, що нодальна алгебра A *пов'язана зі спадковою алгеброю H.*

Нагадаємо, що алгебра A називається *базовою* [5], якщо її фактор-алгебра $\bar{A} = A/\operatorname{rad} A$ ізоморфна прямому добутку тіл. Оскільки ми розглядаємо алгебри над алгебраїчно замкненим полем $\mathbf{k}$, то в цьому випадку $A/\operatorname{rad} A \simeq \mathbf{k}^m$ для деякого m.

Як відомо [5] (гл. 3), кожна базова спадкова алгебра ізоморфна алгебрі шляхів деякого сагайдака Q без орієнтованих циклів. У [3, 4] доведено, що кожна базова нодальна алгебра A ізоморфна алгебрі, яка отримується із базової спадкової алгебри H із сагайдаком Q за допомогою деякої послідовності операцій склеювання і роздуття вершин цього сагайдака, причому кожна вершина бере участь щонайбільше в одній такій операції. Нагадаємо, як застосовуються ці операції до вершин сагайдака Q :

(1) при склеюванні вершин i та j

(a) ми ототожнюємо вершини i та j, замінюючи їх однією вершиною і зберігаючи при цьому всі стрілки, які починаються або закінчуються в цих вершинах;

(b) якщо стрілка α починається у вершині i (або j), а стрілка β закінчується у вершині j (відповідно i), то ми накладаємо співвідношення $\alpha\beta = 0$;

(2) при роздутті вершини i

(a) ми замінюємо вершину i двома вершинами i' та i'';

(b) кожну стрілку α, яка закінчується в i, ми замінюємо двома стрілками α' та α'', які закінчуються відповідно в i' та i'';

(c) кожну стрілку β, яка починається в i, ми замінюємо двома стрілками β' та β'', які починаються відповідно в i' та i'';

(d) якщо стрілка β починається у вершині i, а стрілка α закінчується в цій вершині, ми накладаємо співвідношення $\beta'\alpha' = \beta''\alpha''$.

Зауважимо, що після виконання цих операцій можуть з'явитись орієнтовані цикли і навіть петлі, але у подальшому до вершин, у яких утворилися петлі, ці операції вже не застосовуються. Зауважимо також, що спадкову алгебру H і сагайдак Q визначено неоднозначно.

Означення 2. *Базова алгебра* A *називається лагідною, якщо вона задається сагайдаком* Q *зі співвідношеннями* R, *причому виконуються такі умови*:

(1) *для кожної вершини* $i \in Q$ *існує не більше двох стрілок, які починаються в* i, *та не більше двох стрілок, які закінчуються в* i;

(2) *усі співвідношення в* R *мають вигляд* $\alpha\beta$ *для деяких стрілок* α, β;

(3) *якщо існують дві стрілки* α_1, α_2, *які починаються в* i, *то для кожної стрілки* β, *яка закінчується в* i, *або* $\alpha_1\beta \in R$, *або* $\alpha_2\beta \in R$, *але не одночасно*;

(4) *якщо існують дві стрілки* β_1, β_2, *які закінчуються в* i, *то для кожної стрілки* α, *яка починається в* i, *або* $\alpha\beta_1 \in R$, *або* $\alpha\beta_2 \in R$, *але не одночасно.*

Означення 3. *Базова алгебра* A *називається скручено-лагідною, якщо вона отримується з лагідної алгебри* B *шляхом роздуття деяких вершин її сагайдака, в які не більше однієї стрілки* α *входить і не більше однієї стрілки* β *виходить, причому якщо наявні обидві стрілки, то* $\beta\alpha \notin R$.

Це означення відрізняється від означень із робіт [2, 6] (які теж різні), але неважко переконатися, що воно їм рівносильне.

Теорема. *Кожна лагідна або скручено-лагідна алгебра є нодальною, причому сагайдак відповідної спадкової алгебри є незв'язним об'єднанням сагайдаків типу* A *та* $\tilde{\mathrm{A}}$ (*тобто лінійок та циклів*).

Зауважимо, що ця теорема є оберненою до теореми 3.1 із роботи [3]. З цих двох теорем також випливає, що така алгебра є лагідною тоді й лише тоді, коли при її побудові не використовувались роздуття, а лише склейки.

Доведення. Оскільки скручено-лагідна алгебра отримується із лагідної роздуттями вершин відповідного сагайдака, причому ці вершини не беруть участі у співвідношеннях, то достатньо показати, що будь-яка лагідна алгебра є нодальною.

За означенням лагідна алгебра A задається сагайдаком Q зі співвідношеннями R. В цьому сагайдаку нас цікавитимуть лише ті вершини, в яких є співвідношення. Вони поділяються на 3 типи:

(1) у вершину i дві стрілки входять і дві стрілки із неї виходять

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
{} \arrow[dr, "\alpha"] & & {} \\
& i \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\
{} \arrow[ur, "\gamma"'] & & {}
\end{tikzcd}$$

та є два співвідношення, наприклад $\beta\alpha = 0$ і $\delta\gamma = 0$;

(2) у вершину i одна стрілка входить і дві стрілки із неї виходять (або у вершину i дві стрілки входять і одна стрілка із неї виходить)

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & {} \\ {} \arrow[r, "\alpha"] & i \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \\ & & {} \end{tikzcd} \qquad \text{або} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] {} \arrow[dr, "\beta"] & & \\ & i \arrow[r, "\alpha"] & {} \\ {} \arrow[ur, "\gamma"'] & & \end{tikzcd}$$

причому $\beta\alpha = 0$ або $\gamma\alpha = 0$ (відповідно, $\alpha\beta = 0$ або $\alpha\gamma = 0$), але не одночасно;

(3) у вершину i одна стрілка входить і одна стрілка із неї виходить

$$\xrightarrow{\alpha} i \xrightarrow{\beta}$$

та є співвідношення $\beta\alpha = 0$.

Доведення проведемо індукцією по кількості співвідношень. Якщо співвідношень взагалі немає, то лагідна алгебра є спадковою, а її сагайдак є незв'язним об'єднанням сагайдаків типу A або $\tilde{A}$. Нехай i — вершина, яка входить у деяке співвідношення. Припустимо, що вона належить до типу (1). Розглянемо сагайдак Q_1, який отримується із сагайдака Q заміною вершини i двома вершинами i' та i'' :

$$\xrightarrow{\alpha} i' \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\gamma} i'' \xrightarrow{\beta}$$

Всі інші вершини в сагайдаку Q_1 залишаються незмінними. Співвідношення R_1 сагайдака Q_1 — це «старі» співвідношення R без тих двох, які були у вершині i. По суті ми отримали нову алгебру A_1, яка задається сагайдаком Q_1 зі співвідношеннями R_1. Очевидно, що алгебра A одержується із A_1 склеюванням компонент i' та i''.

Якщо вершина i належить до типу (2), то ми її замінюємо двома вершинами i' та i'' вигляду

$$\xrightarrow{\alpha} i' \xrightarrow{\beta}$$

$$i'' \xrightarrow{\gamma}$$

(або із зворотними напрямками стрілок), а якщо вершина i належить до типу (3), то будемо виконувати заміну вигляду

$$\xrightarrow{\alpha} i'$$

$$i'' \xrightarrow{\beta}$$

В результаті такого перетворення одержуємо нову алгебру A_1, з якої алгебра A одержується склеюванням вершин i' та i'', в яких немає співвідношень. Очевидно, ця алгебра також є лагідною, але співвідношень в ній менше, ніж в A. Цим індукція завершується.

1. *Assem I., Skowrońsky A.* Iterated tilted algebras of type A_n // Math. Z. – 1987. – **195**. – S. 269 – 290.
2. *Geiß G, de la Peña J. A.* Auslander – Reiten components for clans // Bol. Soc. mat. mech. Ser III. – 1999. – **5**, № 3. – P. 307 – 326.
3. *Drozd Y. A., Zembyk V. V.* Representations of nodal algebras of type A // Algebra and Discrete Math. – 2013. – **15**, № 2. – P. 179 – 200.
4. *Зембик В. В.* Будова скінченновимірних нодальних алгебр // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – P. 415 – 419.
5. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры. – Киев: Вища шк., 1980.
6. *Bekkert V., Marcos E. N., Merklen H.* Indecomposables in derived categories of skewed-gentle algebras // Communs Algebra. – 2003. – **31**. – P. 2615 – 2654.

Одержано 13.02.15