УДК 517.984.5

А. С. Горюнов (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗБІЖНІСТЬ І АПРОКСИМАЦІЯ ОПЕРАТОРІВ ШТУРМА — ЛІУВІЛЛЯ З ПОТЕНЦІАЛАМИ-РОЗПОДІЛАМИ

The paper investigates the operators $L_n y = -(p_n y')' + q_n y$, $n \in \mathbb{Z}_+$, given on the finite interval by various boundary conditions. We assume that the function q_n is a derivative (in the sense of distributions) of Q_n and complex-valued functions $1/p_n$, Q_n/p_n, Q_n^2/p_n are integrable. The sufficient conditions for the Green functions G_n of the operators L_n to converge uniformly on the square for $n \to \infty$ to G_0 are found. Every G_0 is proved to be a limit of the Green functions of operators L_n with smooth coefficients. If $p_0 > 0$, $Q_0(t) \in \mathbb{R}$, then they can be chosen so that $p_n > 0$ and q_n are real-valued and have compact support.

Исследуются заданные на конечном интервале операторы $L_n y = -(p_n y')' + q_n y$, $n \in \mathbb{Z}_+$, с различными краевыми условиями. Предполагается, что q_n является производной (в смысле распределений) от Q_n, а комплекснозначные функции $1/p_n$, Q_n/p_n, Q_n^2/p_n суммируемы. Найдены достаточные условия равномерной на квадрате сходимости при $n \to \infty$ функций Грина G_n операторов L_n к G_0. Доказано, что каждая G_0 является пределом функций Грина операторов L_n с гладкими коэффициентами. Если $p_0 > 0$, $Q_0(t) \in \mathbb{R}$, то их можно выбрать так, что $p_n > 0$, а q_n вещественнозначны и финитны.

1. Вступ. Теорія операторів Штурма — Ліувілля є одним із найбільш розвинених напрямків теорії звичайних диференціальних рівнянь (див., наприклад, монографію [1] і наведену там бібліографію).

Основним об'єктом цієї теорії є заданий на скінченному інтервалі $[a, b]$ вираз

$$l(y) = -\big(p(t)y'(t)\big)' + q(t)y(t) \tag{1}$$

і пов'язані з ним оператори. Стандартним припущенням щодо регулярності коефіцієнтів (1) є таке:

$$1/p, \quad q \in L_1\big([a, b]; \mathbb{C}\big).$$

Разом з тим у зв'язку з роботами фізиків виник інтерес до ситуації, коли в диференціальному виразі (1) функція q є мірою або ще більш сингулярною узагальненою функцією (див., наприклад, монографії [2, 3] і наведену там бібліографію).

У роботах [4, 5] (див. також [6]) запропоновано підхід, який дозволяє коректно визначити диференціальний вираз (1) при значно ширших умовах на коефіцієнти

$$q = Q', \quad 1/p, \quad Q/p, \quad Q^2/p \in L_1\big([a, b]; \mathbb{C}\big), \tag{2}$$

де похідна Q' розуміється в сенсі узагальнених функцій. Цей підхід спирається на теорію квазідиференціальних операторів Шина — Цеттла [7, 8] і дозволяє дослідити диференціальні оператори високого порядку [5, 9]. При цьому природним чином виникає питання про можливість зображення диференціального оператора, породженого виразом (1) і однорідними двоточковими крайовими умовами, у вигляді рівномірної резольвентної границі (див. [10]) аналогічних операторів з гладкими коефіцієнтами. Для випадку $p(t) \equiv 1$ позитивну відповідь на нього дано в роботах [11, 12]. Випадок $p(t) > 0$ майже скрізь на $[a, b]$ і дійснозначної функції Q вивчався у [13]. У даній роботі наведено узагальнення і посилення цього результату, яке формулюється у термінах рівномірної апроксимації функції Гріна.

2. Попередні результати. Спочатку наведемо необхідні результати з [4]. Введемо для заданої на інтервалі $[a, b]$ функції квазіпохідні:

$$D^{[0]}y = y,$$

$$D^{[1]}y = py' - Qy,$$

$$D^{[2]}y = (D^{[1]}y)' + \frac{Q}{p}D^{[1]}y + \frac{Q^2}{p}y.$$

Позначимо

$$\widehat{y}(t) = \big(D^{[0]}y(t), D^{[1]}y(t)\big) \in \mathbb{C}^2.$$

У припущеннях (2) вирази $D^{[0]}y(t), D^{[1]}y(t), D^{[2]}y(t)$ є квазіпохідними Шина — Цеттла (див. [8], розділ 1). Також легко перевірити, що для достатньо гладких функцій p і Q (випадок класичного виразу Штурма — Ліувілля) справджується рівність $l(y) = -D^{[2]}y$.

Тому формальний вираз (1) можна коректно визначити як квазідиференціальний вираз Шина — Цеттла

$$l[y] = -D^{[2]}y.$$

Відповідна йому матриця Шина — Цеттла має вигляд

$$A(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{Q}{p} & \dfrac{1}{p} \\ -\dfrac{Q^2}{p} & -\dfrac{Q}{p} \end{pmatrix} \in L_1\big([a, b]; \mathbb{C}^{2\times 2}\big). \tag{3}$$

Розглянемо двоточкову квазідиференціальну крайову задачу

$$l[y] = f(t) \in L_1\big([a, b], \mathbb{C}\big), \tag{4}$$

$$\alpha\widehat{y}(a) + \beta\widehat{y}(b) = 0, \tag{5}$$

де матриці $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

Наступне твердження пов'язує квазідиференціальну крайову задачу (4), (5) із системами диференціальних рівнянь першого порядку.

Лема 1. *Функція $y(t)$ є розв'язком крайової задачі* (4), (5) *тоді і тільки тоді*, *коли вектор-функція $w(t) = \widehat{y}(t)$ є розв'язком крайової задачі*

$$w'(t) = A(t)w(t) + \varphi(t), \tag{6}$$

$$\alpha w(a) + \beta w(b) = 0, \tag{7}$$

де квадратну матрицю-функцію $A(t)$ задано формулою (3), *а* $\varphi(t) = (0, -f(t)) \in L_1\big([a, b]; \mathbb{C}^2\big)$.

Нехай однорідна крайова задача

$$w'(t) = A(t)w(t), \qquad \alpha w(a) + \beta w(b) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок. Тоді, як відомо, існує матриця Гріна цієї задачі

$$G(t,s)=\begin{pmatrix} g_{11}(t,s) & g_{12}(t,s)\\ g_{21}(t,s) & g_{22}(t,s)\end{pmatrix}\in L_\infty\big([a,b];\mathbb{C}^{2\times 2}\big),$$

що має вигляд

$$G(t,s)=\begin{cases} -Y(t)(\alpha+\beta Y(b))^{-1}\beta Y(b)Y^{-1}(s), & a\le t<s,\\ Y(t)\left[I_2-(\alpha+\beta Y(b))^{-1}\beta Y(b)\right]Y^{-1}(s), & s<t\le b,\end{cases} \tag{8}$$

де I_2 — одинична (2×2)-матриця, а $Y(t)$ — матрицант, тобто розв'язок матричної задачі Коші

$$Y'(t)=A(t)Y(t), \qquad Y(a)=I_2.$$

Матриця Гріна дозволяє подати єдиний розв'язок задачі (6), (7) у вигляді

$$w(t)=\int\limits_a^b G(t,s)\varphi(s)ds, \quad t\in[a,b]. \tag{9}$$

Введемо аналогічний об'єкт для квазідиференціальної крайової задачі (4), (5).

Означення 1. *Під функцією Гріна напіводнорідної крайової задачі* (4), (5) *будемо розуміти неперервну функцію* $\Gamma(t,s)\in C\big([a,b]\times[a,b],\mathbb{C}\big)$, *за допомогою якої розв'язок цієї задачі записується у вигляді*

$$y(t)=\int\limits_a^b \Gamma(t,s)f(s)ds.$$

Теорема 1. *Нехай однорідна крайова задача*

$$D^{[2]}y(t)=0, \quad \alpha\widehat{y}(a)+\beta\widehat{y}(b)=0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Тоді існує і єдина функція Гріна $\Gamma(t,s)$ *крайової задачі* (4), (5) *і*

$$\Gamma(t,s)=-g_{12}(t,s).$$

Доведення. За лемою 1 із припущення теореми випливає, що однорідна крайова задача

$$w'(t)=A(t)w(t), \qquad \alpha w(a)+\beta w(b)=0$$

також має лише тривіальний розв'язок, отже, для задачі (6), (7) існує матриця Гріна $G(t,s)$ і справджується рівність (9).

Знову скористаємось лемою 1 і запишемо (9) у вигляді

$$D^{[0]}y(t)=-\int\limits_a^b g_{12}(t,s)f(s)ds,$$

$$D^{[1]}y(t)=-\int\limits_a^b g_{22}(t,s)f(s)ds,$$

де $y(t)$ — єдиний розв'язок задачі (4), (5).

З формули (8) видно, що всі елементи матриці $G(t,s)$ поза головною діагоналлю є неперервними функціями внаслідок неперервності матриціанта $Y(t)$ і $Y^{-1}(t)$.

Звідси випливає існування функції Гріна.

Тепер нехай $\Gamma'(t,s)$ — інша функція Гріна крайової задачі (4), (5).

Тоді для довільної функції $f \in L_1([a,b],\mathbb{C})$ єдиний розв'язок цієї задачі можна записати так:

$$y(t) = \int\limits_a^b \Gamma(t,s)f(s)ds = \int\limits_a^b \Gamma'(t,s)f(s)ds,$$

тобто

$$\int\limits_a^b \left(\Gamma'(t,s) - \Gamma(t,s)\right) f(s)ds = 0,$$

отже, обмежене ядро $\Gamma'(t,s) - \Gamma(t,s)$ породжує нульовий інтегральний оператор.

Тоді, як відомо, $\Gamma'(t,s) - \Gamma(t,s) = 0$ майже скрізь на $[a,b]$, звідки внаслідок неперервності функцій $\Gamma(t,s)$ і $\Gamma'(t,s)$ випливає єдиність функції Гріна.

Теорему 1 доведено.

3. Збіжність функцій Гріна. Розглянемо поряд з виразом $l(y)$ сім'ю виразів Штурма — Ліувілля $l_n(y)$ вигляду (1) з коефіцієнтами

$$p_n, q_n = Q_n', \quad n \in \mathbb{N},$$

що задовольняють умови (2). Відповідні їм квазіпохідні позначимо через $D_n^{[0]}y$, $D_n^{[1]}y$, $D_n^{[2]}y$, вектор із квазіпохідних — через

$$\widehat{y}_n(t) := \left(D_n^{[0]}y(t), D_n^{[1]}y(t)\right) \in \mathbb{C}^2,$$

відповідні матриці Шина — Цеттла — через $A_n(t)$, а квазідиференціальні вирази — через $l_n[y]$.

Розглянемо поряд із задачею (4), (5) при кожному n крайові задачі

$$l_n[y](t) = f_n(t) \in L_2([a,b];\mathbb{C}), \tag{10}$$

$$\alpha_n \widehat{y}_n(a) + \beta_n \widehat{y}_n(b) = 0. \tag{11}$$

Вони, згідно з лемою 1, еквівалентні крайовим задачам

$$w'(t) = A_n(t)w(t) + \varphi_n(t), \tag{12}$$

$$\alpha_n w(a) + \beta_n w(b) = 0, \tag{13}$$

де $w(t) = \widehat{y}_n(t)$ і $\varphi_n(t) = \left(0, -f_n(t)\right) \in L_1\left([a,b];\mathbb{C}^2\right)$.

Теорема 2. *Нехай виконано такі умови*:

1) *однорідна крайова задача*

$$D^{[2]}y(t) = 0, \qquad \alpha\widehat{y}(a) + \beta\widehat{y}(b) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок;

2) *для коефіцієнтів виразів справджуються граничні співвідношення при* $n \to \infty$:

a) $\|1/p_n\|_1 = O(1)$, $\|Q_n/p_n\|_1 = O(1)$, $\|Q_n^2/p_n\|_1 = O(1)$,

b) $\left\|\int_a^t (1/p_n - 1/p)ds\right\|_\infty \to 0$,

c) $\left\|\int_a^t (Q_n/p_n - Q/p)ds\right\|_\infty \to 0$,

d) $\left\|\int_a^t (Q_n^2/p_n - Q^2/p)ds\right\|_\infty \to 0$;

3) *матриці, що визначають крайові умови, задовольняють граничні співвідношення* $\alpha_n \to \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$, $n \to \infty$.

Тоді при достатньо великих n *існують функції Гріна* $\Gamma_n(t,s)$ *напіводнорідних крайових задач* (10), (11) *і справджується граничне співвідношення*

$$\left\|\Gamma_n(t,s) - \Gamma(t,s)\right\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Тут і далі $\|\cdot\|_\infty$ — $\sup$-норма, а $\|\cdot\|_p$ — норма у просторі Лебега $L_p, p \geq 1$.

***Зауваження* 1.** Умови 2, очевидно, будуть виконані, якщо при $n \to \infty$

$$\|1/p_n - 1/p\|_1 \to 0, \qquad \|Q_n/p_n - Q/p\|_1 \to 0, \qquad \|Q_n^2/p_n - Q^2/p\|_1 \to 0.$$

Доведення цієї теореми ґрунтується на наступному допоміжному результаті з [15]. Зазначимо, що цей результат було посилено в наступних роботах (див. [14] і наведену там бібліографію).

Позначимо через $Y_n(\cdot)$ матриціанти, що відповідають задачам (12), (13), тобто розв'язки матричних задач Коші

$$Y_n'(t) = A_n(t)Y_n(t), \qquad Y_n(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лема 2. *Якщо при* $n \to \infty$ *виконано одну з чотирьох (нееквівалентних між собою) умов*:

$\alpha)$ $\|A_n - A\|_1 = O(1)$,

$\beta)$ $\left\|\int_a^t \big(A_n(s) - A(s)\big)ds \cdot \big(A_n(t) - A(t)\big)\right\|_1 \to 0$,

$\gamma)$ $\left\|\big(A_n(t) - A(t)\big) \cdot \int_a^t \big(A_n(s) - A(s)\big)ds\right\|_1 \to 0$,

$\delta)$ $\left\|\int_a^t \big(A_n(s) - A(s)\big)ds\big(A_n(t) - A(t)\big) - \big(A_n(t) - A(t)\big)\int_a^t \big(A_n(s) - A(s)\big)ds\right\|_1 \to 0$,

то умова $\left\|\int_a^t \big(A_n(s) - A(s)\big)ds\right\|_\infty \to 0$ *рівносильна тому, що при* $n \to \infty$

$$\|Y_n - Y\|_\infty \to 0, \qquad \|Y_n^{-1} - Y^{-1}\|_\infty \to 0. \tag{15}$$

***Доведення теореми* 2.** На підставі леми 1 із припущення 1 теореми 2 випливає, що однорідні крайові задачі

$$w'(t) = A_n(t)w(t), \quad \alpha_n w(a) + \beta_n w(b) = 0$$

також мають лише тривіальні розв'язки при досить великих n. Звідси за теоремою 1 випливає існування функцій Гріна задач (10), (11).

Доведемо тепер співвідношення (14).

Легко бачити, що з умови 1 теореми 2 випливає, що виконано умову $\alpha)$ леми 2, а з умови 2 — що виконується умова $\left\| \int_a^t \big(A_n(s) - A(s)\big)ds \right\|_\infty \to 0.$

Тому з леми 2 випливає граничне співвідношення (15). Із урахуванням формули (8) це означає, що виконується гранична рівність (14).

Теорему 2 доведено.

4. Апроксимація функцій Гріна. Тепер перейдемо до питання апроксимації. Розглянемо знову вираз $l(y)$ вигляду (1), коефіцієнти якого задовольняють умови (2), і породжену ним крайову задачу (4), (5).

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді існують* p_n, Q_n, $n \in \mathbb{N}$ *такі, що* $p_n \in C^\infty\big([a,b],\mathbb{C}\big)$, $Q_n \in C_0^\infty\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ *і виконується умова* 2 *теореми* 2, *тобто для задачі* (4), (5) *можна побудувати послідовність задач Штурма — Ліувілля з гладкими коефіцієнтами виразу* p_n *і* q_n, *таких, що справджується граничне співвідношення* (14).

Якщо додатково функції p *і* Q *є дійснозначними і* $p > 0$ *майже скрізь на* $[a,b]$, *то і гладкі функції* p_n, Q_n (*і, отже,* q_n) *можна вибрати такими самими.*

Доведення. Оскільки $\dfrac{1}{p} \in L_1\big([a,b],\mathbb{C}\big)$, то $p(t) \neq 0$ майже скрізь на $[a,b]$. Позначимо через $\tilde{p}_n$ усереднення Соболєва функції $\dfrac{1}{\sqrt{p}} \in L_2\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ і візьмемо в якості $p_n := \dfrac{1}{\tilde{p}_n^2}$.

Тоді

$$p_n \in C^\infty\big([a,b],\mathbb{C}\big), \qquad \left\| \frac{1}{\sqrt{p_n}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right\|_2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Також з умови теореми випливає, що $\dfrac{Q}{\sqrt{p}} \in L_2\big([a,b],\mathbb{C}\big)$. Оскільки множина $C_0^\infty\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ є щільною у просторі $L_2\big([a,b],\mathbb{C}\big)$, можна вибрати $\widetilde{Q}_n \in C_0^\infty\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ так, що $\left\| \widetilde{Q}_n - \dfrac{Q}{\sqrt{p}} \right\|_2 \to 0,$ $n \to \infty$. Взявши $Q_n := \widetilde{Q}_n\sqrt{p_n}$, отримаємо

$$Q_n \in C_0^\infty\big([a,b],\mathbb{C}\big), \qquad \left\| \frac{Q_n}{\sqrt{p_n}} - \frac{Q}{\sqrt{p}} \right\|_2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Далі

$$\left\| \frac{Q_n}{p_n} - \frac{Q}{p} \right\|_1 = \left\| \frac{Q_n}{p_n} - \frac{Q}{\sqrt{p_n}\sqrt{p}} + \frac{Q}{\sqrt{p_n}\sqrt{p}} - \frac{Q}{p} \right\|_1 \leq$$

$$\leq \left\| \frac{1}{\sqrt{p_n}} \right\|_2 \left\| \frac{Q_n}{\sqrt{p_n}} - \frac{Q}{\sqrt{p}} \right\|_2 + \left\| \frac{Q}{\sqrt{p}} \right\|_2 \left\| \frac{1}{\sqrt{p_n}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right\|_2,$$

$$\left\| \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p} \right\|_1 = \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{p_n}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{p_n}} + \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \right\|_1 \leq$$

$$\leq \left\| \frac{1}{\sqrt{p_n}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right\|_2 \left\| \frac{1}{\sqrt{p_n}} + \frac{1}{\sqrt{p}} \right\|_2,$$

$$\left\| \frac{Q_n^2}{p_n} - \frac{Q^2}{p} \right\|_1 = \left\| \left(\frac{Q_n}{\sqrt{p_n}} - \frac{Q}{\sqrt{p}} \right) \left(\frac{Q_n}{\sqrt{p_n}} + \frac{Q}{\sqrt{p}} \right) \right\|_1 \leq$$

$$\leq \left\| \frac{Q_n}{\sqrt{p_n}} - \frac{Q}{\sqrt{p}} \right\|_2 \left\| \frac{Q_n}{\sqrt{p_n}} + \frac{Q}{\sqrt{p}} \right\|_2,$$

і таким чином отримуємо, що виконуються умови зауваження 1.

Теорему 3 доведено.

5. Збіжність і апроксимація операторів. Знову наведемо необхідні результати з [4].

Квазідиференціальний вираз $l[y]$ породжує в гільбертовому просторі $L_2\big([a,b];\mathbb{C}\big)$ (див. [7, 8]) *максимальний* квазідиференціальний оператор

$$L_{\max} \colon y \to l[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_{\max}) = \left\{ y \,\middle|\, D^{[k]}y \in AC\big([a,b];\mathbb{C}\big), k = \overline{0, m-1},\ D^{[m]}y \in L_2\big([a,b];\mathbb{C}\big) \right\}.$$

Мінімальний квазідиференціальний оператор визначається як звуження оператора $L_{\max}$ на лінійний многовид

$$\mathrm{Dom}(L_{\min}) := \left\{ y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}) \,|\, \widehat{y}(a) = \widehat{y}(b) = 0 \right\}.$$

***Зауваження* 2.** Очевидно, квазіпохідні $D^{[1]}y$, $D^{[2]}y$ залежать від вибору первісної Q з точністю до сталої. Однак, як неважко перевірити, самі оператори $L_{\min}$, $L_{\max}$ при цьому не змінюються.

Розглянемо поряд з (1) формально спряжений диференціальний вираз

$$l^+(y) = (-\overline{p}(t)y'(t))' + \overline{q}(t)y(t),$$

де риска позначає комплексне спряження. Позначимо через $L^+_{\max}$ і $L^+_{\min}$ пов'язані з ним максимальний та мінімальний квазідиференціальні оператори у просторі $L_2\big([a,b];\mathbb{C}\big)$. Тоді з результатів монографії [8] для загальних квазідиференціальних виразів Шина — Цеттла і вищенаведеного випливає, що оператори $L_{\min}$, $L^+_{\min}$, $L_{\max}$, $L^+_{\max}$ щільно задані і замкнені у просторі $L_2\big([a,b];\mathbb{C}\big)$,

$$L^*_{\min} = L^+_{\max}, \qquad L^*_{\max} = L^+_{\min}.$$

Аналогічно, вирази $l_n[y]$ при кожному n породжують у гільбертовому просторі $L_2\big([a,b];\mathbb{C}\big)$ оператори $L^n_{\min}$, $L^n_{\max}$.

У роботі [5] описано деякі класи розширень мінімального квазідиференціального оператора $L_{\min}$ за умови його симетричності. Тут ми розглянемо довільне розширення мінімального (взагалі кажучи, не симетричного) оператора, задане двоточковими крайовими умовами. А саме, розглянемо оператор

$$Ly = l[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L) = \left\{ y \in \mathrm{Dom}\,(L_{\max}) |\, \alpha\widehat{y}(a) + \beta\widehat{y}(b) = 0 \right\},$$

який відповідає задачі (4), (5), і оператори

$$L_n y = l_n[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_n) = \left\{ y \in \mathrm{Dom}\,(L^n_{\max}) |\, \alpha_n\widehat{y}_n(a) + \beta_n\widehat{y}_n(b) = 0 \right\},$$

що відповідають крайовим задачам (10), (11).

Очевидно, що $L_{\min} \subset L \subset L_{\max}$ і $L^n_{\min} \subset L_n \subset L^n_{\max}$.

Теорема 4. *Нехай резольвентна множина граничного оператора $\rho(L)$ не порожня і при $n \to \infty$ виконуються умови 2, 3 теореми 2.*

Тоді для будь-якого $\lambda \in \rho(L)$ $\lambda \in \rho(L_n)$ для достатньо великих n і

$$\left\|(L_n - \lambda)^{-1} - (L - \lambda)^{-1}\right\|_{HS} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{16}$$

де $\|\cdot\|_{HS}$ — норма Гільберта — Шмідта.

Доведення. Припустимо спочатку, що $0 \in \rho(L)$. Це означає, що оператор L є оборотним, тобто задача $Ly = f$ еквівалентна задачі (4), (5), має при будь-якому $f \in L_2\big([a,b], \mathbb{C}\big)$ єдиний розв'язок, що рівносильно умові 1 теореми 2.

Цей розв'язок $y(t)$ можна записати у вигляді $y(t) = \int_a^b \Gamma(t,s) f(s) ds$.

За теоремою 2 оператори L_n також є оборотними, існують функції Гріна відповідних крайових задач (10), (11), і їх розв'язки мають вигляд $y_n(t) = \int_a^b \Gamma_n(t,s) f(s) ds$.

Таким чином,

$$\left\|L_n^{-1} - L^{-1}\right\|_{HS} = \left(\int_a^b \int_a^b \left|\Gamma_n(t,s) - \Gamma(t,s)\right|^2 dt ds\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \|\Gamma_n(t,s) - \Gamma(t,s)\|_{\infty} \cdot (b-a) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Розглянемо тепер загальний випадок. Отже, існує деяке $\lambda \in \rho(L)$. Тоді, очевидно, $0 \in \in \rho(L - \lambda)$.

Розглянемо оператор $L - \lambda$. Задача $(L-\lambda)y = f$ еквівалентна крайовій задачі

$$l[y] - \lambda y = f(t) \in L_1\big([a,b], \mathbb{C}\big),$$

$$\alpha\widehat{y}(a) + \beta\widehat{y}(b) = 0.$$

Для неї справедливою є лема 1 з матрицею $A = A_\lambda$. Проте легко бачити, що матриці A, A_n задовольняють умовами теореми 2 разом з матрицями A_λ, $A_{n\lambda}$.

Повторюючи вищенаведені міркування, переконуємося, що $0 \in \rho(L_n - \lambda)$ для достатньо великих n, існують функції Гріна відповідних крайових задач і виконується граничне співвідношення (16).

***Зауваження* 3.** З теореми 4 випливає рівномірна резольвентна збіжність операторів L_n до L, встановлена раніше в [4].

***Зауваження* 4.** Аналогічно зауваженню 1, для збіжності резольвент операторів (16) достатніми є наступні умови на коефіцієнти виразу при $n \to \infty$:

$$\|1/p_n - 1/p\|_1 \to 0, \qquad \|Q_n/p_n - Q/p\|_1 \to 0, \qquad \|Q_n^2/p_n - Q^2/p\|_1 \to 0.$$

З теорем 3 і 4 випливає наступний результат.

Теорема 5. *Нехай квазідиференціальний оператор L, який відповідає формальному виразу Штурма — Ліувілля $l(y)$, що задовольняє умови* (2), *має непорожню резольвентну множину $\rho(L)$.*

Тоді існує послідовність класичних операторів Штурма — Ліувілля з гладкими коефіцієнтами така, що їх резольвенти апроксимують резольвенту оператора L за нормою Гільберта — Шмідта, тобто виконується співвідношення (16).

1. *Zettl A.* Sturm — Liouville theory. – Providence: Amer. Math. Soc., 2005. – xii + 328 p.
2. *Albeverio S., Gestezy F., Hoegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. – New York: Springer-Verlag, 1988. – xiv + 452 p.
3. *Albeverio S., Kurasov P.* Singular perturbations of differential operators. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. – xiv + 429 p.
4. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of singular Sturm — Liouville equations // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2010. – **16**, № 2. – P. 120 – 130.
5. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A., Pankrashkin K.* Formally self-adjoint quasi-differential operators and boundary-value problems // Electron. J. Different. Equat. – 2013. – № 101. – P. 1 – 16.
6. *Eckhardt J., Gesztesy F., Nichols R., Teschl G.* Weyl – Titchmarsh theory for Sturm — Liouville operators with distributional coefficients // Opusc. Math. – 2013. – **33**, № 3. – P. 467 – 563.
7. *Zettl A.* Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mountain J. Math. – 1975. – **5**, № 3. – P. 453 – 474.
8. *Everitt W. N., Markus L.* Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators. – Providence: Amer. Math. Soc., 1999. – xii + 187 p.
9. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives // Ukr. Math. J. – 2011. – **63**, № 9. – P. 1190 – 1205.
10. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. – Berlin: Springer-Verlag, 1995. – xxii + 619 p.
11. *Savchuk A., Shkalikov A.* Sturm — Liouville operators with singular potentials // Math. Notes. – 1999. – **66**, № 5-6. – P. 741 – 753.
12. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Resolvent convergence of Sturm — Liouville operators with singular potentials // Math. Notes. – 2010. – **87**, № 1-2. – P. 287 – 292.
13. *Yan J., Shi G.* Inequalities among eigenvalues of Sturm – Liouville problems with distribution potentials // J. Math. Anal. and Appl. – 2014. – **409**, № 1. – P. 509 – 520.
14. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – P. 77 – 90.
15. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 774 – 777.

Одержано 23.03.15