УДК 517.946

А. М. Кузь, Б. Й. Пташник (Ін-т прикл. механіки і математики НАН України, Львів)

ЗАДАЧА З УМОВОЮ, ЩО МІСТИТЬ ІНТЕГРАЛЬНИЙ ДОДАНОК, ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

In a layer obtained as the Cartesian product of an interval $[-T_1, T_2]$, $T_1, T_2 > 0$, and a space $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, we study a problem with nonlocal condition in the time variable containing an integral term for a mixed parabolic-hyperbolic equation in a class of functions almost periodic in space variables. For this problem, we establish a criterion of uniqueness and sufficient conditions for the existence of the solution. To solve the problem of small denominators encountered in the construction of the solution, we use the metric approach.

В слое, являющемся декартовым произведением отрезка $[-T_1, T_2]$, $T_1, T_2 > 0$, и пространства $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, для смешанного параболо-гиперболического уравнения исследована корректность задачи с нелокальным условием по временной переменной, содержащим интегральное слагаемое, в классе почти периодических по пространственным переменным функций. Найдены критерий единственности и достаточные условия существования в различных функциональных пространствах решения задачи. Для решения проблемы малых знаменателей, которые возникли при построении решения задачи, использован метрический подход.

1. Вступ. В останні роки значна увага математиків спрямована на дослідження задач з інтегральними умовами, які є узагальненням дискретних нелокальних умов. Такі умови часто виникають при моделюванні фізичних процесів, коли межа області є недоступною для проведення вимірювань або коли неможливо безпосередньо знайти певні фізичні величини, однак відомі їхні усереднення.

Задачі з інтегральними умовами за однією зі змінних для гіперболічних, параболічних та безтипних рівнянь вивчалися у різних аспектах багатьма авторами (див. [1 – 6] та наведену там бібліографію).

Однак для некласичних рівнянь, зокрема, для рівнянь параболо-гіперболічного типу, такі задачі досліджені мало. Багато процесів газової динаміки, магнітної гідродинаміки, теорії електричних кіл тощо моделюються рівняннями параболо-гіперболічного типу (див., наприклад, [7, 8]). Задачі з нелокальними (в тому числі інтегральними) умовами для таких рівнянь розглядались у багатьох роботах (див., наприклад, [9 – 13]). Такі задачі, взагалі, є умовно коректними, а їх розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників [14].

У даній статті розглядається задача про знаходження розв'язку мішаного параболо-гіперболічного рівняння з нелокальною умовою за часовою змінною, що містить інтегральний доданок, у класі функцій, майже періодичних за просторовими координатами.

2. Основні позначення. Нехай $\mathbb{Z}_+$ — множина цілих невід'ємних чисел,

$$x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad dx = dx_1 \ldots dx_p; \qquad \partial_t = \partial/\partial t, \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

$$k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p, \qquad |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|,$$

$$\mu_k = (\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}) \in \mathbb{R}^p, \qquad \|\mu_k\| = \sqrt{\mu_{k_1}^2 + \ldots + \mu_{k_p}^2}, \qquad (\mu_k, x) = \mu_{k_1}x_1 + \ldots + \mu_{k_p}x_p,$$

$$\mathcal{D}^p = \big\{(t, x) : t \in (-T_1, T_2), x \in \mathbb{R}^p\big\}, \quad T_1, T_2 > 0,$$

$$\mathcal{D}^p_- = \mathcal{D}^p \cap \{t < 0\}, \qquad \mathcal{D}^p_+ = \mathcal{D}^p \cap \{t > 0\},$$

$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}$, c_j, $j = 1, 2, \ldots,$ — додатні величини, що не залежать від k та μ_k.

3. Функціональні простори. Позначимо

$$\mathcal{V} := \{\mu_n \in \mathbb{R} \colon \mu_{-n} = -\mu_n, d_1|n|^{\theta_1} \leqslant |\mu_n| \leqslant d_2|n|^{\theta_2}, n \in \mathbb{Z}\},$$
$$0 < d_1 \leqslant d_2, \quad 0 < \theta_1 \leqslant \theta_2; \tag{1}$$

$$\mathcal{M} := \{\mu_k \in \mathbb{R}^p \colon \mu_{k_j} \in \mathcal{V}, j \in \{1, \ldots, p\},\ k \in \mathbb{Z}^p\};$$

$W^{q,s}_{\mathcal{M}}$, $q \in \mathbb{R}$, $s \geqslant 0$, — простір майже періодичних функцій із заданим спектром $\mathcal{M}$, отриманий шляхом поповнення простору скінченних сум $v(x) = \sum_{|k| \leqslant N} v_k \exp(i\mu_k, x)$, $N \in \mathbb{N}$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, за нормою [15]

$$\left\| v; W^{q,s}_{\mathcal{M}} \right\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} |v_k|^2 (1 + \|\mu_k\|)^{2q} \exp(2s\|\mu_k\|^2) \right)^{1/2};$$

$C^n([c,d], W^{q,s}_{\mathcal{M}})$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, — простір функцій $u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k, x)$, $u_k(t) \in C^n[c,d]$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, таких, що для кожного фіксованого $t \in [c,d]$ похідні $\partial_t^j u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k^{(j)}(t) \exp(i\mu_k, x)$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, належать простору $W^{q,s}_{\mathcal{M}}$ і є неперервними по t на $[c,d]$ в нормі цього простору,

$$\left\| u; C^n([c,d], W^{q,s}_{\mathcal{M}}) \right\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t \in [c,d]} \left\| \partial_t^j u(t,x); W^{q,s}_{\mathcal{M}} \right\|.$$

Зауважимо, що $W^{q_2,s}_{\mathcal{M}} \subset W^{q_1,s}_{\mathcal{M}}$, $q_2 > q_1$, причому

$$\left\| v; W^{q_1,s}_{\mathcal{M}} \right\| < \left\| v; W^{q_2,s}_{\mathcal{M}} \right\|. \tag{2}$$

Із (1) випливає, що для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконуються оцінки

$$D_1|k|^{\theta_1} \leqslant \|\mu_k\| \leqslant D_2|k|^{\theta_2}, \qquad D_1 = d_1 \min\{1, p^{1-\theta_1}\}, \qquad D_2 = p^{1/2} d_2 \max\{1, p^{1-\theta_2}\}. \tag{3}$$

4. Постановка задачі. В області D^p розглядаємо задачу про знаходження функції $u := u(t,x)$, яка є майже періодичною по x зі спектром $\mathcal{M}$ і задовольняє умови

$$\partial_t u - a\Delta u = 0, \quad (t,x) \in \mathcal{D}^p_+,$$
$$\partial_t^2 u - b^2 \Delta u = 0, \quad (t,x) \in \mathcal{D}^p_-, \tag{4}$$

$$\alpha u(-T_1, x) + \beta u(T_2, x) + \gamma \int_{-T_1}^{T_2} u(t,x) dt = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{5}$$

$$u \in C^1([-T_1, T_2]; W^{q,s}_{\mathcal{M}}) \cap C^2([-T_1, 0], W^{q,s}_{\mathcal{M}}), \quad q \in \mathbb{R}, \quad s \geqslant 0, \tag{6}$$

де $a > 0$, $b > 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, $\alpha + \beta + \gamma(T_1 + T_2) \neq 0$, функція $\varphi(x)$ є майже періодичною зі спектром $\mathcal{M}$,

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k, x), \qquad \varphi_{jk} = \lim_{H \to \infty} \frac{1}{H^p} \int\limits_{[0,H]^p} \varphi(x) \exp(-i\mu_k, x) dx, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{7}$$

5. Єдиність розв'язку задачі. Розв'язок задачі (4) – (6) шукатимемо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k, x), \quad \mu_k \in \mathcal{M}. \tag{8}$$

Із означення простору $C^1([-T_1, T_2], W^{q,s}_{\mathcal{M}})$ випливає, що кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, із (8) належить простору $C^1[-T_1, T_2]$, тобто задовольняє умови спряження

$$u_k(0 - 0) = u_k(0 + 0), \qquad u'_k(0 - 0) = u'_k(0 + 0). \tag{9}$$

Підставляючи ряди (7), (8) у рівняння (4) та умову (5), отримуємо, що коефіцієнти $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, крім умов (9), повинні задовольняти такі умови:

$$\begin{aligned} &u'_k(t) - a\|\mu_k\|^2 u_k(t) = 0, \quad 0 < t < T_2, \\ &u''_k(t) - b^2\|\mu_k\|^2 u_k(t) = 0, \quad -T_1 < t < 0, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\alpha u_k(-T_1) + \beta u_k(T_2) + \gamma \int\limits_{-T_1}^{T_2} u_k(t) dt = \varphi_k. \tag{11}$$

Якщо $k = \vec{0}$ $\left(\mu_{\vec{0}} = \vec{0}\right)$, то задача (9) – (11) має єдиний розв'язок

$$u_{\vec{0}} = \frac{\varphi_{\vec{0}}}{\alpha + \beta + \gamma(T_1 + T_2)}. \tag{12}$$

Якщо $k \neq \vec{0}$ $\left(\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}\right)$, то загальний розв'язок рівняння (10) є таким:

$$u_k(t) = \begin{cases} C_{1k} \exp(-a\|\mu_k\|^2 t), \quad 0 < t \leqslant T_2, \\ C_{2k} \cos(b\|\mu_k\| t) + C_{3k} \sin(b\|\mu_k\| t), \quad -T_1 \leqslant t < 0. \end{cases} \tag{13}$$

Підставляючи (13) в умови (9), (11), отримуємо для знаходження коефіцієнтів C_{1k}, C_{2k}, C_{3k} систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} &C_{1k} - C_{2k} = 0, \\ &\frac{a}{b}\|\mu_k\| C_{1k} + C_{3k} = 0, \\ &\left(\frac{\gamma + (\beta a\|\mu_k\|^2 - \gamma) \exp(-a\|\mu_k\|^2 T_2)}{a\|\mu_k\|^2}\right) C_{1k} + \left(\alpha \cos(b\|\mu_k\| T_1) + \frac{\gamma \sin(b\|\mu_k\| T_1)}{b\|\mu_k\|}\right) C_{2k} + \\ &\quad + \left(\frac{\gamma(\cos(b\|\mu_k\| T_1) - 1)}{b\|\mu_k\|} - \alpha \sin(b\|\mu_k\| T_1)\right) C_{3k} = \varphi_k, \end{aligned} \tag{14}$$

визначник якої зображується формулою

$$\Delta(\mu_k,T_1,T_2)=\frac{1}{ab^2\|\mu_k\|^2}\Big(a^2\gamma\|\mu_k\|^2+b^2\big(\gamma+(a\beta\|\mu_k\|^2-\gamma)\exp(-a\|\mu_k\|^2T_2)\big)+$$

$$+a\left(\alpha b^2-a\gamma\right)\|\mu_k\|^2\cos(b\|\mu_k\|T_1)+ab(a\alpha\|\mu_k\|^2+\gamma)\|\mu_k\|\sin(b\|\mu_k\|T_1)\Big), \tag{15}$$

де $\mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}$.

Система (14) має єдиний розв'язок тоді і лише тоді, коли $\Delta(\mu_k,T_1,T_2)\neq 0$, $\mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}$. Легко показати (методом від супротивного), що задача (9)–(11) не може мати двох різних розв'язків для тих і лише для тих $\mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}$, для яких $\Delta(\mu_k,T_1,T_2)\neq 0$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (4), (5) *у шкалі просторів* $C^1([-T_1,T_2];W^{q,s}_{\mathcal{M}})\cap$ $\cap\, C^2([-T_1,0],W^{q,s}_{\mathcal{M}})$ *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\Delta(\mu_k,T_1,T_2)\neq 0\quad \forall\mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}. \tag{16}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1 із [3] з урахуванням (12).

6. Існування розв'язку задачі. За умови (16) для кожного $\mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}$ розв'язок задачі (9)–(11) визначається формулою

$$u_k(t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_k\exp(-a\|\mu_k\|^2t)}{\Delta(\mu_k,T_1,T_2)}, & 0\leqslant t\leqslant T_2,\\[2ex] \dfrac{\varphi_k\left(\cos(b\|\mu_k\|t)-\dfrac{a}{b}\|\mu_k\|\sin(b\|\mu_k\|t)\right)}{\Delta(\mu_k,T_1,T_2)}, & -T_1\leqslant t\leqslant 0.\end{cases} \tag{17}$$

Враховуючи (12), отримуємо, що формальний розв'язок задачі (4)–(6) зображується рядом

$$u(t,x)=\frac{\varphi_{\vec{0}}}{\alpha+\beta+\gamma(T_1+T_2)}+\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}}u_k(t)\exp(i\mu_k,x), \tag{18}$$

де $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}$, визначено формулами (17).

Ряд (18), взагалі, є розбіжним, оскільки вираз $|\Delta(\mu_k,T_1,T_2)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k\in\mathcal{M}$.

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (16) *та існують сталі* $\eta,\nu\in\mathbb{R}$ *такі, що для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $\mu_k\in\mathcal{M}$ *виконується оцінка*

$$|\Delta(\mu_k,T_1,T_2)|\geqslant(1+\|\mu_k\|)^{-\eta}\exp(-\nu\|\mu_k\|^2). \tag{19}$$

Якщо $\varphi(x)\in W^{q+\eta+3,s+\nu}_{\mathcal{M}}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (4)–(6). *Цей розв'язок зображується рядом* (18), *причому*

$$\max\{\|u;C^1([-T_1,T_2];W^{q,s}_{\mathcal{M}})\|,\|u;C^2([-T_1,0];W^{q,s}_{\mathcal{M}})\|\}\leqslant 3c_1\|\varphi;W^{q+\eta+3,s+\nu}_{\mathcal{M}}\|,$$

де $c_1=\max\left\{1,b,b^2,a,ab,a/b,|\alpha+\beta+\gamma(T_1+T_2)|^{-1}\right\}$.

Доведення. З (12), (17) та (19) випливають такі оцінки:

$$\max_{t\in[-T_1,T_2]}\left|u_k^{(j)}(t)\right|\leqslant c_1(1+\|\mu_k\|)^{\eta+2j}\exp(\nu\|\mu_k\|^2)|\varphi_k|,\quad j\in\{0,1\}, \tag{20}$$

$$\max_{t\in[-T_1,0]}\left|u_k^{(j)}(t)\right| \leqslant c_1(1+\|\mu_k\|)^{\eta+j+1}\exp(\nu\|\mu_k\|^2)|\varphi_k|, \quad j\in\{0,1,2\}. \tag{21}$$

На підставі (18), (20) отримуємо

$$\left\|u;C^1([-T_1,T_2];W_{\mathcal{M}}^{q,s})\right\| \leqslant c_1\sum_{j=0}^{1}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{t\in[-T_1,T_2]}|u_k^{(j)}(t)|^2(1+\|\mu_k\|)^{2q}\exp(2s\|\mu_k\|^2)\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2c_1\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|\varphi_k|^2(1+\|\mu_k\|)^{2q+2\eta+4}\exp(2(s+\nu)\|\mu_k\|^2)\right)^{1/2} = 2c_1\left\|\varphi;W_{\mathcal{M}}^{q+\eta+2,s+\nu}\right\|. \tag{22}$$

Аналогічно, на підставі (18), (21) одержуємо оцінку

$$\left\|u;C^2([-T_1,0];W_{\mathcal{M}}^{q,s})\right\| \leqslant 3c_1\left\|\varphi;W_{\mathcal{M}}^{q+\eta+3,s+\nu}\right\|. \tag{23}$$

З оцінок (2), (22) та (23) випливає оцінка

$$\max\left\{\|u;C^1([-T_1,T_2];W_{\mathcal{M}}^{q,s})\|,\|u;C^2([-T_1,0];W_{\mathcal{M}}^{q,s})\|\right\} \leqslant 3c_1\left\|\varphi;W_{\mathcal{M}}^{q+\eta+3,s+\nu}\right\|.$$

Отримана нерівність завершує доведення теореми.

З'ясуємо можливість виконання нерівності (19).

Теорема 3. *Нехай в умові* (5) $\alpha=0$ *і* $\gamma\neq 0$. *Тоді для довільних фіксованих* a, b, T_1, T_2, β *та для довільного* $m\in\mathbb{R}$, $m>2$, *нерівність*

$$|\Delta(\mu_k,T_1,T_2)| \geqslant \frac{|\gamma|(m-2)}{2ma}(1+\|\mu_k\|)^{-2}$$

виконується для всіх векторів $\mu_k\in\mathcal{M}$ *таких, що* $\|\mu_k\|^2>K(m)$, *де*

$$K(m)=\max\left\{1,\frac{2m\left(1+|a\beta/\gamma|\right)}{a^2T_2^2}\right\}.$$

Доведення. Формула (15) при $\alpha=0$ набирає вигляду

$$\Delta(\mu_k,T_1,T_2)=\frac{\gamma}{ab^2\|\mu_k\|^2}\big(\Delta_1(\mu_k,T_1)+\Delta_2(\mu_k,T_2)\big), \quad \mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}, \tag{24}$$

де

$$\Delta_1(\mu_k,T_1)=a^2\|\mu_k\|^2\left(1-\cos(b\|\mu_k\|T_1)\right)+ab\|\mu_k\|\sin(b\|\mu_k\|T_1), \tag{25}$$

$$\Delta_2(\mu_k,T_2)=b^2\left(1+\frac{a\beta\gamma^{-1}\|\mu_k\|^2-1}{\exp(a\|\mu_k\|^2T_2)}\right). \tag{26}$$

Виконавши елементарні перетворення, вираз (25) запишемо у такій формі:

$$\Delta_1(\mu_k,T_1)=a^2\|\mu_k\|^2+a\|\mu_k\|\sqrt{b^2+a^2\|\mu_k\|^2}\sin(b\|\mu_k\|T_1-\psi_k), \tag{27}$$

де $\psi_k=\arctan\left(ab^{-1}\|\mu_k\|\right)$, $\mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}$. Очевидно, що

$$\Delta_1(\mu_k, T_1) \geqslant a^2\|\mu_k\|^2 - a\|\mu_k\|\sqrt{b^2 + a^2\|\mu_k\|^2} = a^2\|\mu_k\|^2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2\|\mu_k\|^2}}\right) =$$

$$= -b^2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2\|\mu_k\|^2}}\right)^{-1} \geqslant -\frac{b^2}{2}. \tag{28}$$

Оцінимо тепер $\Delta_2(\mu_k, T_2)$. На підставі очевидної нерівності

$$\exp(a\|\mu_k\|^2 T_2) > \frac{(a\|\mu_k\|^2 T_2)^2}{2},$$

яка виконується для довільних $a > 0$, $T_2 > 0$, $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$, отримуємо, що для всіх $\|\mu_k\|^2 \geqslant$ $\geqslant K(m)$ виконується оцінка

$$\left|\frac{a\beta\gamma^{-1}\|\mu_k\|^2 - 1}{\exp(a\|\mu_k\|^2 T_2)}\right| \leqslant 2\left|\frac{a\beta\gamma^{-1}\|\mu_k\|^2 - 1}{a^2T_2^2\|\mu_k\|^4}\right| \leqslant \frac{2}{a^2T_2^2\|\mu_k\|^2}\left||a\beta\gamma^{-1}| + \frac{1}{\|\mu_k\|^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2(1 + |a\beta/\gamma|)}{a^2T_2^2\|\mu_k\|^2} \leqslant \frac{2(1 + |a\beta/\gamma|)}{a^2T_2^2K(m)} \leqslant \frac{1}{m}. \tag{29}$$

З (26) та (29) випливає, що для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ таких, що $\|\mu_k\|^2 \geqslant K(m)$, справджується нерівність

$$\Delta_2(\mu_k, T_2) = b^2\left(1 + \frac{a\beta\gamma^{-1}\|\mu_k\|^2 - 1}{\exp(a\|\mu_k\|^2 T_2)}\right) > b^2\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{m-1}{m}b^2. \tag{30}$$

На підставі (28) і (30) отримуємо, що для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ таких, що $\|\mu_k\|^2 > K(m)$, $m > 2$, виконується нерівність $\Delta_1(\mu_k, T_1) + \Delta_2(\mu_k, T_2) > \dfrac{m-2}{2m}b^2$ і з урахуванням (24)

$$|\Delta(\mu_k, T_1, T_2)| > \frac{m-2}{2ma}\frac{|\gamma|}{\|\mu_k\|^2} > \frac{|\gamma|(m-2)}{2ma}(1 + \|\mu_k\|)^{-2}.$$

Теорему 3 доведено.

***Зауваження* 1.** Теорема 3 дає сильнішу (не метричну) оцінку знизу визначника $\Delta(\mu_k, T_1, T_2)$, ніж теорема 3 із [13], де розглядалася задача (4), (5) при $\alpha = \beta = 0$ у класі 2π-періодичних за просторовими змінними функцій і вважалося, що розв'язність задачі пов'язана з проблемою малих знаменників.

***Зауваження* 2.** Якщо в (5) $\alpha = \gamma = 0$, то визначник $\Delta(\mu_k, T_1, T_2) := \widetilde{\Delta}(\mu_k, T_2)$ зображується формулою

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T_2) = \beta\exp(-a\|\mu_k\|^2 T_2),$$

з якої випливає, що для довільних фіксованих a, b, T_2 та $\beta \neq 0$ оцінка (19) справджується для всіх $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$ при $\eta = 0$ і $\nu = aT_2$.

***Зауваження* 3.** З теореми 3 та зауваження 2 випливає, що при $\alpha = 0$ розв'язність задачі (4)–(6) не пов'язана з проблемою малих знаменників.

Теорема 4. *Нехай* $\alpha \neq 0$. *Тоді для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $T_1 > 0$ *та для довільних фіксованих* a, b, β, γ, T_2 *оцінка* (19) *справджується для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$, *якщо* $\nu = 0$ *та* $\eta > p/\theta_1 - 1$.

Доведення. Формулу (15) можна записати у такому вигляді:

$$\Delta(\mu_k, T_1, T_2) = \frac{A(\mu_k)\sin(b\|\mu_k\|T_1 + \psi_k) + B(\mu_k, T_2)}{ab^2\|\mu_k\|^2}, \tag{31}$$

де

$$A(\mu_k) = a\|\mu_k\|\sqrt{a^2b^2\alpha^2\|\mu_k\|^4 + (b^4\alpha^2 + a^2\gamma^2)\|\mu_k\|^2 + b^2\gamma^2}, \tag{32}$$

$$B(\mu_k, T_2) = a^2\gamma\|\mu_k\|^2 + b^2\left(\gamma + (a\beta\|\mu_k\|^2 - \gamma)\exp(-a\|\mu_k\|^2T_2)\right), \tag{33}$$

$$\psi_k = \arctan\frac{(\alpha b^2 - a\gamma)\|\mu_k\|}{ab\alpha\|\mu_k\|^2 + \gamma b}.$$

Зафіксуємо a, b, β, γ, T_2 та $\alpha \neq 0$. Позначимо через E множину тих чисел T_1 з деякого інтервалу $(0, T_0]$, $T_0 > 0$, для яких нерівність

$$|\Delta(\mu_k, T_1, T_2)| \leqslant \|\mu_k\|^{1-p/\theta_1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \tag{34}$$

виконується для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$. Через $\mathcal{M}_1$ позначимо множину векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ таких, що $\|\mu_k\| \leqslant K_1$, $K_1 = \max\{1, K_2, K_2^{\theta_1/p}\}$, де

$$K_2 = \frac{2(ab^2(|\beta| + 1) + |\gamma|(a^2 + 2b^2))}{a^2b|\alpha|}.$$

З (3) випливає, що до множини $\mathcal{M}_1$ належать усі вектори μ_k, $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких $|k| < (K_1/D_2)^{1/\theta_2}$. Очевидно, що множина $\mathcal{M}_1$ складається зі скінченної кількості елементів.

Нехай $E(\tilde{\mu}_k)$ — множина тих $T_1 \in (0, T_0]$, для яких виконується оцінка (34) при фіксованому $\mu_k = \tilde{\mu}_k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1$ $(k = \tilde{k})$. З (31) випливає, що нерівність (34) еквівалентна системі нерівностей

$$F_1(\tilde{\mu}_k) \leqslant \sin\left(b\|\tilde{\mu}_k\|T_1 + \psi_{\tilde{k}}\right) \leqslant F_2(\tilde{\mu}_k), \tag{35}$$

де

$$F_1(\tilde{\mu}_k) = \frac{-ab^2\|\tilde{\mu}_k\|^{3-p/\theta_1-\varepsilon} - B(\tilde{\mu}_k, T_2)}{A(\tilde{\mu}_k)}, \qquad F_2(\tilde{\mu}_k) = \frac{ab^2\|\tilde{\mu}_k\|^{3-p/\theta_1-\varepsilon} - B(\tilde{\mu}_k, T_2)}{A(\tilde{\mu}_k)}. \tag{36}$$

З (32), (33) випливають оцінки

$$A(\tilde{\mu}_k) > c_2\|\tilde{\mu}_k\|^3, \qquad |B(\tilde{\mu}_k, T_2)| < c_3\|\tilde{\mu}_k\|^2, \tag{37}$$

де $c_2 = a^2b|\alpha|$, $c_3 = (a^2 + 2b^2)|\gamma| + b^2a|\beta|$. На підставі (36), (37) отримуємо, що виконуються нерівності $F_1(\tilde{\mu}_k) < F_2(\tilde{\mu}_k)$ та

$$|F_j(\tilde{\mu}_k)| \leqslant \frac{ab^2\|\tilde{\mu}_k\|^{3-p/\theta_1-\varepsilon} + c_3\|\tilde{\mu}_k\|^2}{c_2\|\tilde{\mu}_k\|^3} < \frac{ab^2 + c_3}{c_2}\max\{\|\tilde{\mu}_k\|^{-p/\theta_1-\varepsilon}, \|\tilde{\mu}_k\|^{-1}\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{ab^2 + c_3}{c_2}\max\{K_1^{-p/\theta_1-\varepsilon}, K_1^{-1}\} = \frac{K_2}{2}\max\{K_1^{-p/\theta_1-\varepsilon}, K_1^{-1}\}, \quad j = 1, 2. \tag{38}$$

Якщо $K_2 \leqslant 1$, то $K_1 = 1$ і, відповідно, $K_2 \max\{K_1^{-p/\theta_1-\varepsilon}, K_1^{-1}\} \leqslant 1$. Якщо $K_2 > 1$, то, з одного боку, $K_1 \geqslant K_2$, а тому $K_1^{-1} \leqslant K_2^{-1}$, а з іншого — $K_1 \geqslant K_2^{\theta_1/p}$, а тому $K_1^{-p/\theta_1-\varepsilon} \leqslant \leqslant K_2^{1+\varepsilon\theta_1/p} \leqslant K_2^{-1}$. Отже, $K_2 \max\{K_1^{-p/\theta_1-\varepsilon}, K_1^{-1}\} \leqslant 1$ при $K_2 > 1$. З викладеного вище та (38) випливають оцінки

$$|F_j(\tilde{\mu}_k)| \leqslant \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2. \tag{39}$$

Розв'язок системи нерівностей (35) відносно T_1 є об'єднанням інтервалів

$$\left[\frac{\arcsin F_1(\tilde{\mu}_k) - \psi_{\tilde{k}} + 2\pi n}{b\|\mu_k\|}, \frac{\arcsin F_2(\tilde{\mu}_k) - \psi_{\tilde{k}} + 2\pi n}{b\|\tilde{\mu}_k\|}\right],$$
$$\left[\frac{\pi - \arcsin F_2(\tilde{\mu}_k) - \psi_{\tilde{k}} + 2\pi n}{b\|\tilde{\mu}_k\|}, \frac{\pi - \arcsin F_1(\tilde{\mu}_k) - \psi_{\tilde{k}} + 2\pi n}{b\|\tilde{\mu}_k\|}\right], \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{40}$$

Оскільки функція $\sin(b\|\tilde{\mu}_k\|T_1 + \psi_{\tilde{k}})$ є періодичною по T_1 з періодом $2\pi/(b\|\tilde{\mu}_k\|)$, то кількість усіх інтервалів (40), що потрапляють в інтервал $(0, T_0]$, не перевищує $(2+bT_0/\pi)\|\tilde{\mu}_k\|$. Довжина кожного з інтервалів (40)

$$L_{\tilde{k}} = \frac{\arcsin F_2(\tilde{\mu}_k) - \arcsin F_1(\tilde{\mu}_k)}{b\|\tilde{\mu}_k\|}. \tag{41}$$

На підставі (41) і теореми Лагранжа про скінченні прирости отримуємо

$$L_{\tilde{k}} = \frac{F_2(\tilde{\mu}_k) - F_1(\tilde{\mu}_k)}{b\|\tilde{\mu}_k\|\sqrt{1-(\xi(\tilde{\mu}_k))^2}}, \qquad \xi(\tilde{\mu}_k) \in [F_1(\tilde{\mu}_k), F_2(\tilde{\mu}_k)]. \tag{42}$$

З (39) випливає, що $|\xi(\tilde{\mu}_k)| \leqslant 1/2$ і, відповідно, справджується оцінка

$$\sqrt{1-(\xi(\tilde{\mu}_k))^2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{43}$$

На підставі (36), (37), (42) та (43) отримуємо

$$L_{\tilde{k}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{F_2(\tilde{\mu}_k) - F_1(\tilde{\mu}_k)}{b\|\tilde{\mu}_k\|} \leqslant \frac{4ab}{\sqrt{3}} \frac{\|\tilde{\mu}_k\|^{3-p/\theta_1-\varepsilon}}{\|\tilde{\mu}_k\| A(\tilde{\mu}_k)} \leqslant \frac{4ab}{\sqrt{3}c_2}\|\tilde{\mu}_k\|^{-1-p/\theta_1-\varepsilon}. \tag{44}$$

З (3) та (44) випливає, що для міри множини $E(\tilde{\mu}_k)$ виконується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(\tilde{\mu}_k) \leqslant \left(\frac{bT_0}{\pi} + 2\right)\|\tilde{\mu}_k\| L_{\tilde{k}} \leqslant \frac{4ab}{\sqrt{3}c_2}\left(\frac{bT_0}{\pi} + 2\right)\|\tilde{\mu}_k\|^{-p/\theta_1-\varepsilon} \leqslant c_4|\tilde{k}|^{-p-\theta_1\varepsilon}, \tag{45}$$

де $c_4 = 4ab(bT_0 + 2\pi)/(\sqrt{3}\pi c_2 D_1^{p/\theta_1+\varepsilon})$. Підсумовуючи (45) по всіх $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1$, отримуємо

$$\sum_{\|\mu_k\| > K_1} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(\mu_k) \leqslant \sum_{|k| > (K_1/D_1)^{1/\theta_1}} c_4|k|^{-p-\theta_1\varepsilon}. \tag{46}$$

Оскільки ряд $\sum_{|k|>(K_1/D_1)^{1/\theta_1}} c_4|k|^{-p-\theta_1\varepsilon}$ є збіжним, то з (46) і леми Бореля – Кантеллі [14] (§ 3) випливає, що міра тих $T_1 \in (0, T_0]$, які потрапляють у нескінченну кількість множин $E(\mu_k)$, $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1$, дорівнює нулеві, тобто $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E = 0$. Отже, для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}$) точок $T_1 \in (0, T_0]$ нерівність, протилежна до нерівності (34), виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$. Враховуючи, що інтервал $(0, \infty)$ можна покрити зліченною кількістю проміжків вигляду $[0, T_0]$, завершуємо доведення теореми.

Теорема 5. *Нехай справджується* (16). *Якщо виконуються умови теореми* 3 *і* $\varphi(x) \in \in W_{\mathcal{M}}^{q+5,0}$ (*виконуються умови теореми* 4 *і* $\varphi(x) \in W_{\mathcal{M}}^{q+2+p/\theta_1,0}$), *то існує (для майже всіх щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}$ *точок* $T_1 > 0$) *єдиний розв'язок задачі* (4), (5) *у шкалі просторів* $C^1([-T_1,T_2];W_{\mathcal{M}}^{q,0}) \cap C^2([-T_1,0],W_{\mathcal{M}}^{q,0})$. *Цей розв'язок зображується рядом* (18), *причому*

$$\max\Big\{\|u;C^1([-T_1,T_2];W_{\mathcal{M}}^{q,0})\|,\|u;C^2([-T_1,0];W_{\mathcal{M}}^{q,0})\|\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant c_5\|\varphi;W_{\mathcal{M}}^{q+5,0}\|\,\Big(\leqslant c_5\|\varphi;W_{\mathcal{M}}^{q+2+p/\theta_1,0}\|\Big),$$

де $c_5 = 3c_1\max\{1, ma|\gamma|^{-1}(m-2)^{-1}\}$, $m>2$.

Теорема 6. *Якщо в* (5) $\alpha=\gamma=0$, *а* $\varphi(x) \in W_{\mathcal{M}}^{q+3,s+aT_2}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (4), (5) *у шкалі просторів* $C^1\big([-T_1,T_2];W_{\mathcal{M}}^{q,s}\big) \cap C^2\big([-T_1,0],W_{\mathcal{M}}^{q,s}\big)$. *Цей розв'язок зображується рядом* (18), *причому*

$$\max\big\{\|u;C^1([-T_1,T_2];W_{\mathcal{M}}^{q,s})\|,\|u;C^2([-T_1,0];W_{\mathcal{M}}^{q,s})\|\big\} \leqslant \frac{3c_1}{|\beta|}\|\varphi;W_{\mathcal{M}}^{q+3,s+aT_2}\|.$$

Доведення теорем 5 та 6 проводиться за схемою доведення теореми 2 з урахуванням теорем 3, 4 та зауваження 2.

7. Висновки. У даній роботі у $(p+1)$-вимірному шарі для параболо-гіперболічного рівняння досліджено коректність задачі з нелокальною умовою за часовою змінною, що містить інтегральний доданок, у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій. Знайдено критерій єдиності та достатні умови існування розв'язку задачі. Для розв'язання проблеми малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід. Показано, що у деяких частинних випадках (зокрема, у випадку інтегральної умови) у розглядуваній задачі відсутня проблема малих знаменників.

Результати роботи можна поширити на випадок рівнянь вигляду

$$P_1\left(\partial_t,\partial_x\right)u=0, \quad (t,x)\in\mathcal{D}_+^p,$$

$$P_2\left(\partial_t^2,\partial_x\right)u=0, \quad (t,x)\in\mathcal{D}_-^p,$$

де $P_1\left(\partial_t,\partial_x\right)$ та $P_2\left(\partial_t^2,\partial_x\right)$ — параболічний та гіперболічний за Петровським, відповідно, диференціальні вирази зі сталими коефіцієнтами високого порядку.

1. *Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D.* On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations // Bull. Georg. Nat. Acad. Sci. – 2011. – **5**, № 1. – P. 31 – 37.
2. *Данилкина О. Ю.* Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения // Вестн. Самар. гос. ун-та. – 2007. – № 6(56). – С. 141 – 153.
3. *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з інтегральними умовами за часом для рівнянь, гіперболічних за Гордінгом // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 252 – 265.
4. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами // Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2012. – № 740. – С. 25 – 33.
5. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 7. – С. 887 – 892.
6. *Симотюк М. М., Медвідь О. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 98 – 107.

7. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, № 3. — С. 3 – 19.
8. *Золина Л. А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1966. – **6**, № 6. – С. 991 – 1001.
9. *Капустян В. О., Пишнограєв І. О.* Умови існування і єдиності розв'язку параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами // Наук. вісті НТУ „КПІ". – 2012. – № 4. – С. 72 – 76.
10. *Сабитов К. Б.* Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Дифференц. уравнения. – 2010. – **46**, № 10. – С. 1472 – 1481.
11. *Sabitov K. B.* Nonlocal problem for a parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain // Math. Notes. – 2011. – **89**, № 4. – P. 562 – 567.
12. *Юнусова Г. Р.* Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. – 2011. – № 8(89). – С. 108 – 117.
13. *Савка І. Я., Симотюк М. М.* Задача спряження з інтегральною умовою для мішаного рівняння параболо-гіперболічного типу // Одинадцята відкрита наукова конференція ІМФН „PSC-IMFS-11" (Львів, 13 – 14 червня 2013 р.): Збірник матеріалів та програма конференції. – Львів: Вид-во Львів. політехніки, 2013. – С. 84 – 85.
14. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
15. *Шубин М. А.* Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, № 2. – С. 3 – 47.

Одержано 20.03.15