УДК 514.752.433

І. В. Потапенко (Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

СІТКА ЛЕЙКО НА ПОВЕРХНЯХ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ E_3

We introduce the notion of Leiko network as a generalization of the geodetic network on the surfaces of nonzero Gaussian curvature in the Euclidian space E_3 and study its characteristics. The conditions of preservation of the Leiko network under infinitesimal deformations of the surfaces are also obtained.

Вводится в рассмотрение понятие сети Лейко, которая является обобщением геодезической сети на поверхностях ненулевой гауссовой кривизны в евклидовом пространстве E_3, и исследуются ее свойства. Получены также условия сохранения сети Лейко при инфинитезимальных деформациях поверхностей.

У даній статті вводиться поняття сітки на поверхні в тривимірному евклідовому просторі, однопараметричні сім'ї якої — ізопериметричні екстремалі повороту, тобто ІЕП-сітки, яка є узагальненням геодезичної сітки. Вивченням ізопериметричних екстремалей повороту займався С. Г. Лейко [4 – 8]. Вшановуючи пам'ять про С. Г. Лейко, автор назвав цю сітку його іменем. Дослідження властивостей сітки Лейко проведемо в тензорній формі, використовуючи методику Я. С. Дубнова, викладену в монографії В. Ф. Кагана [3, с. 366 – 370].

Означення 1. *Ізопериметричні екстремалі повороту* (*ІЕП*) *на поверхнях в тривимірному евклідовому просторі — це криві*, *вздовж яких виконується співвідношення*

$$k_g = cK\,, \tag{1}$$

де k_g *— геодезична кривина без знаку*, K *— гауссова* (*повна*) *кривина поверхні*, c *— ізопериметрична стала*.

З означення 1 випливає, що нетривіальні ІЕП з'являються на поверхнях ненульової гауссової (повної) кривини. Більш детальні властивості ІЕП можна знайти в [5, 7, 8]. Отже, далі ми розглядаємо поверхні ненульової гауссової (повної) кривини.

Нагадаємо, що однопараметрична сім'я ліній на поверхні називається регулярною, якщо через кожну точку поверхні проходить одна і лише одна лінія цієї сім'ї.

Дві різні однопараметричні сім'ї кривих регулярні в спільній області, утворюють на поверхні регулярну сітку, якщо: 1) через кожну точку області сітки проходять дві криві, що належать різним сім'ям і 2) лінії з різних сімей у жодній точці не мають спільної дотичної. В. Ф. Каган [3, с. 340] використовує термін „регулярна область сітки”.

Означення 2. *Регулярна сітка на поверхні ненульової гауссової* (*повної*) *кривини* K *називається ІЕП-сіткою або сіткою Лейко, якщо кожна лінія будь-якої з двох однопараметричних сімей, що утворюють сітку, є ізопериметричною екстремаллю повороту. При цьому для будь-яких двох різних ліній однієї сім'ї ізопериметрична стала є однаковою.*

Означення 3. *Тензор другої валентності, що визначається матрицею*

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{g} \\ -\sqrt{g} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де g — дискримінант метричного тензора поверхні, називається дискримінантним тензором поверхні [2, с. 162], який будемо позначати c_{ij}.

Даний тензор типу $(2\ 0)$ породжує дискримінантні тензори інших типів $(0\ 2)$ та $(1\ 1)$ за формулами

$$c^{ij} = g^{i\alpha} g^{j\beta} c_{\alpha\beta}$$

та

$$c_{i\cdot}^{\cdot j} = g^{\alpha j} c_{i\alpha},$$

де g^{ij} — контраваріантні компоненти метричного тензора поверхні.

Нехай $\omega(x^1, x^2)$ — сітковий кут, що змінюється в межах $(0, \pi)$. Напрямні вектори одно-параметричних сімей $\bar{l}(\lambda^1, \lambda^2)$ та $\overline{m}(\mu^1, \mu^2)$ — орти, що визначаються в дотичній площині, а в круглих дужках вказано їх відповідні координати.

Розглянемо контраваріантний тензор з матрицею компонент

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2\lambda^1\mu^1}{\sin\omega} & \dfrac{\lambda^1\mu^2 + \lambda^2\mu^1}{\sin\omega} \\ \dfrac{\lambda^1\mu^2 + \lambda^2\mu^1}{\sin\omega} & \dfrac{2\lambda^2\mu^2}{\sin\omega} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Дискримінант матриці (3) дорівнює $-\dfrac{1}{g}$.

Для регулярної сітки зведені мінори матриці (3) утворюють симетричний тензор другої валентності $\overset{0}{\phi}_{ij}$ з компонентами

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{2\lambda^2\mu^2 g}{\sin\omega} & \dfrac{(\lambda^1\mu^2 + \lambda^2\mu^1)g}{\sin\omega} \\ \dfrac{(\lambda^1\mu^2 + \lambda^2\mu^1)g}{\sin\omega} & -\dfrac{2\lambda^1\mu^1 g}{\sin\omega} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В індексному позначенні, використовуючи дискримінантний тензор поверхні (2), маємо

$$\overset{0}{\phi}_{ij} = -\frac{c_{i\alpha} c_{j\beta} (\lambda^\alpha \mu^\beta + \lambda^\beta \mu^\alpha)}{\sin\omega}. \tag{5}$$

Тензор (5), уведений Я. С. Дубновим [3, с. 341], називається *нормованим тензором сітки* і відіграє ключову роль в теорії регулярних сіток. Тензор з матрицею компонент (3) — це зведені мінори матриці (4). Будемо позначати його $\tilde{\phi}^{ij}$.

Означення 4. *Вектор* $\bar{\tau}(\tau_1, \tau_2)$ *з компонентами*

$$\tau_i = c^{\alpha\lambda} c^{\beta\mu} \overset{0}{\phi}_{i\alpha} \overset{0}{\phi}_{\lambda\mu,\beta}$$

називається чебишовським вектором сітки [3, *с.* 356], *де* c^{ij} — *дискримінантний тензор поверхні,* $\overset{0}{\phi}_{ij}$ — *нормований тензор сітки, комою позначено коваріантну похідну на базі метричного тензора поверхні.*

Зауважимо, що в круглих дужках тут і далі наведено координати вектора в дотичній площині.

Теорема 1. *Якщо регулярна сітка на поверхні ненульової гауссової (повної) кривини* K *є сіткою Лейко, то мають місце співвідношення*

$$\bar{\tau}\bar{m} = \bar{\Omega}\bar{l} + \frac{2c_l K}{\sin\omega}, \tag{6}$$

$$\bar{\tau}\bar{l} = \bar{\Omega}\bar{m} - \frac{2c_m K}{\sin\omega}, \tag{7}$$

де $\bar{l}(\lambda^1, \lambda^2)$, $\bar{m}(\mu^1, \mu^2)$ — *орти напрямних векторів двох однопараметричних сімей, що утворюють регулярну сітку,* $\bar{\tau}(\tau_1, \tau_2)$ — *чебишовський вектор сітки,* $\omega = (\bar{l} \,\hat{}\, , \bar{m})$ — *сітковий кут,* $\bar{\Omega}(\Omega_1, \Omega_2)$ — *градієнт сітки, зв'язаний з сітковим кутом формулою*

$$\Omega = \ln tg^2 \frac{\omega}{2}, \tag{8}$$

c_l, c_m — *ізопериметричні сталі сімей.*

Доведення. Геодезична кривина лінії сітки визначається формулою [3, с. 339]

$$k_g(l) = c_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta_{,\gamma} \lambda^\gamma. \tag{9}$$

У формулі (9) враховано, що лінія входить до складу однопараметричної сім'ї з напрямним вектором $\bar{l}(\lambda^1, \lambda^2)$, $c_{\alpha\beta}$ — дискримінантний тензор поверхні.

Використовуючи формулу для скалярного добутку градієнта сіткового кута та напрямного вектора [2, с. 366]

$$\omega_i \lambda^i = c_{\alpha\beta}(\lambda^\alpha_{,\gamma} \lambda^\gamma \lambda^\beta + \mu^\alpha \mu^\beta_{,\gamma} \lambda^\gamma),$$

а також вираз для чебишовського вектора $\bar{\tau}(\tau_1, \tau_2)$ [3, с. 362]

$$\frac{1}{2} \tau_\alpha \mu^\alpha \sin\omega = -c_{\alpha\beta} \mu^\alpha_{,\gamma} \mu^\beta \lambda^\gamma,$$

маємо

$$k_g(l) = \frac{1}{2}\tau_\alpha\mu^\alpha \sin\omega - \omega_i\lambda^i .$$

Аналогічно для ліній другої однопараметричної сім'ї з напрямним вектором $\overline{m}(\mu^1, \mu^2)$

$$k_g(\mu) = -\frac{1}{2}\tau_\alpha\lambda^\alpha \sin\omega + \omega_i\mu^i .$$

Знак мінус з'явився тому, що сітковий кут $\omega = (\overline{l} \,\hat{,}\, \overline{m})$ відкладається від вектора $\overline{l}(\lambda^1, \lambda^2)$ до вектора $\overline{m}(\mu^1, \mu^2)$. Оскільки дана регулярна сітка є сіткою Лейко, то будуть мати місце співвідношення

$$\omega_i\lambda^i = \frac{1}{2}\tau_\alpha\mu^\alpha \sin\omega - c_l K , \tag{10}$$

$$\omega_i\mu^i = \frac{1}{2}\tau_\alpha\lambda^\alpha \sin\omega + c_m K , \tag{11}$$

де c_l, c_m — ізопериметричні сталі сімей, K — гауссова (повна) кривина поверхні.

Якщо ввести до розгляду функцію (8) та врахувати, що

$$\frac{2\omega_i}{\sin\omega} = \Omega_i ,$$

то співвідношення (10), (11) наберуть вигляду

$$\tau_\alpha\mu^\alpha = \Omega_\alpha\lambda^\alpha + \frac{2c_l K}{\sin\omega}, \tag{12}$$

$$\tau_\alpha\lambda^\alpha = \Omega_\alpha\mu^\alpha - \frac{2c_m K}{\sin\omega}. \tag{13}$$

Співвідношення (12), (13) і є (6), (7) в іншій формі.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Для того щоб регулярна сітка на поверхні ненульової гауссової* (*повної*) *кривини* K *була сіткою Лейко*, *необхідно і достатньо виконання умов*

$$-\tau_j \cos\omega + \tilde{\tilde{\phi}}{}^\alpha_j \tau_\alpha \sin\omega = \Omega_j + \frac{2K}{\sin^2\omega} c_{j\beta}\left(c_l\mu^\beta + c_m\lambda^\beta \right), \tag{14}$$

де $\overline{l}(\lambda^1, \lambda^2)$, $\overline{m}(\mu^1, \mu^2)$ — *орти напрямних векторів двох однопараметричних сімей, що утворюють регулярну сітку,* $\overline{\tau}(\tau_1, \tau_2)$ — *чебишовський вектор сітки,* $\omega = (\overline{l} \,\hat{,}\, \overline{m})$ — *сітковий кут,* $\overline{\Omega}(\Omega_1, \Omega_2)$ — *градієнт сітки*, *зв'язаний з сітковим кутом формулою* (8), c_l,

c_m — *ізопериметричні сталі сімей,* $c_{\alpha\beta}$ — *дискримінантний тензор поверхні,* $\tilde{\tilde{\phi}}{}^{\alpha}_{j} =$ $= c_{j\beta} c^{\beta}_{\rho.} \tilde{\tilde{\phi}}{}^{\alpha\rho}$, $\tilde{\tilde{\phi}}{}^{\alpha\rho}$ *с— зведені мінори нормованого тензора сітки.*

Доведення. Із рівнянь (10), (11) маємо

$$\tau_\alpha(\mu^\alpha\mu^i - \lambda^\alpha\lambda^i) = \Omega_\alpha(\lambda^\alpha\mu^i - \lambda^i\mu^\alpha) + \frac{2K}{\sin\omega}(c_l\mu^i + c_m\lambda^i). \tag{15}$$

Із урахуванням співвідношення [3, с. 341]

$$\lambda^\alpha\mu^i - \lambda^i\mu^\alpha = c^{\alpha i}\sin\omega \tag{16}$$

(15) набирає вигляду

$$\tau_\alpha(\mu^\alpha\mu^i - \lambda^\alpha\lambda^i) = c^{\alpha i}\Omega_\alpha \sin\omega + \frac{2K}{\sin\omega}(c_l\mu^i + c_m\lambda^i). \tag{17}$$

Помноживши (17) на c_{ji} та згорнувши по i, матимемо

$$c_{j\beta}\tau_\alpha(\mu^\alpha\mu^\beta - \lambda^\alpha\lambda^\beta) = \Omega_j \sin\omega + \frac{2K}{\sin\omega} c_{j\beta}(c_l\mu^\beta + c_m\lambda^\beta).$$

Враховуючи співвідношення [3, с. 345]

$$\mu^i = \lambda^i\cos\omega + c^{i}_{\rho.}\lambda^\rho \sin\omega,$$

$$\lambda^i = \mu^i\cos\omega - c^{i}_{\rho.}\mu^\rho \sin\omega,$$

отримуємо

$$c_{j\beta}\tau_\alpha((\mu^\alpha\lambda^\beta - \lambda^\alpha\mu^\beta)\cos\omega + c^{\beta}_{\rho.}(\mu^\alpha\lambda^\rho + \mu^\rho\lambda^\alpha)\sin\omega) =$$

$$= \Omega_j \sin\omega + \frac{2K}{\sin\omega} c_{j\beta}(c_l\mu^\beta + c_m\lambda^\beta). \tag{18}$$

Використовуючи (16) та формулу [3, с. 341]

$$\mu^\alpha\lambda^\rho + \mu^\rho\lambda^\alpha = \tilde{\tilde{\phi}}{}^{\alpha\rho}\sin\omega,$$

(18) записуємо у вигляді

$$c_{j\beta}\tau_\alpha\left(c^{\alpha\beta}\sin\omega\cos\omega + c^{\beta}_{\rho.}\tilde{\tilde{\phi}}{}^{\alpha\rho}\sin^2\omega\right) = \Omega_j\sin\omega + \frac{2K}{\sin\omega}c_{j\beta}(c_l\mu^\beta + c_m\lambda^\beta). \tag{19}$$

Розділивши (19) на $\sin\omega$, з урахуванням [3, с. 368] співвідношень

$$c_{j\beta}c^{\alpha\beta}\tau_\alpha = \tau_j\,,$$

$$c_{j\beta}c^{.\beta}_{\rho.}\tilde{\dot{\phi}}^{\alpha\rho}\tau_\alpha = \tilde{\dot{\phi}}^{\alpha}_{j}\tau_\alpha$$

отримаємо (14).

Теорему 2 доведено.

Означення 5. *Вектор* $\overline{P}(p^1, p^2)$ *з компонентами*

$$p^\beta = c_l\mu^\beta + c_m\lambda^\beta\,, \tag{20}$$

який повністю визначається ізопериметричними сталими c_l, c_m, *назвемо вектором повороту сітки.*

Нагадаємо [3, с. 369], що вектор з компонентами

$$\gamma_j = \dot{\phi}^\alpha_j\tau_\alpha - \dot{H}\tau_j - 2\dot{H}_j \tag{21}$$

називається вектором кривини сітки, де $\dot{H}$ *— перший інваріант нормованого тензора сітки* $\overset{0}{\phi}_{ij}$, *який означується* [3, *с*. 342] *формулою*

$$2\dot{H} = \overset{0}{\phi}_{ij}\,g^{ij}\,,$$

g^{ij} *— контраваріантні компоненти метричного тензора поверхні.*

Теорема 3. *В кожній точці регулярної сітки поверхні ненульової гауссової (повної) кривини* K *прикладено два вектори з компонентами* (20) *та* (21). *Сітка Лейко характеризується тим, що ці вектори зв'язані між собою співвідношенням*

$$\gamma_j = \frac{2K}{\sin^3\omega}c_{j\beta}p^\beta\,, \tag{22}$$

де $\omega = (\overline{l}\,\hat{,}\,\overline{m})$ *— сітковий кут,* $c_{j\beta}$ *— дискримінантний тензор поверхні.*

Доведення. Підставимо в (14) вирази [3, с. 369]

$$\tilde{\dot{\phi}}^\alpha_j = \dot{\phi}^\alpha_j - 2\dot{H}\delta^\alpha_j\,,$$

$$\Omega_j = 2\dot{H}_j\sin\omega\,.$$

З урахуванням (20) отримаємо

$$-\tau_j\cos\omega + \dot{\phi}^\alpha_j\tau_\alpha\sin\omega - 2\dot{H}\tau_j\sin\omega = 2\dot{H}_j\sin\omega + \frac{2K}{\sin^2\omega}c_{j\beta}p^\beta\,. \tag{23}$$

Оскільки [3, с. 344]

$$\dot{H} = -ctg\omega\,, \tag{24}$$

то (23) набирає вигляду

$$\dot{\phi}_j^{\alpha}\tau_\alpha \sin\omega - \dot{H}\tau_j \sin\omega = 2\dot{H}_j \sin\omega + \frac{2K}{\sin^2\omega} c_{j\beta} p^{\beta}\,. \tag{25}$$

Після ділення (25) на $\sin\omega$ та переносу $2\dot{H}_j$ у праву частину з урахуванням (21) отримаємо (22).

Теорему 3 доведено.

Використавши (24), співвідношенню (22) з точністю до знаку можна надати вигляду

$$\gamma_j = 2K(1+\dot{H}^2)^{\frac{3}{2}} c_{j\beta} p^{\beta}\,.$$

Розглянемо у тривимірному евклідовому просторі E_3 регулярну класу C^k, $k \geq 3$, поверхню S, гомеоморфну плоскій двовимірній однозв'язній області з векторно-параметричним рівнянням

$$\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2)\,,$$

та її інфінітезимальну регулярну класу C^k, $k \geq 3$, деформацію S_t:

$$\bar{r}_t = \bar{r}(x^1, x^2) + t\,\bar{y}(x^1, x^2)\,, \tag{26}$$

де $\bar{y}(x^1, x^2)$ — вектор зміщення, який є регулярною класу C^k, $k \geq 3$, векторною функцією в даній області, t — малий параметр, та з'ясуємо умови збереження сітки Лейко при інфінітезимальних деформаціях поверхонь (26). Нижче ми будемо розглядати інфінітезимальні деформації першого порядку, а отже, членами порядку t^2 і вище будемо нехтувати.

Теорема 4. *Нехай на регулярній поверхні* S *в деякій її регулярній області існує сітка Лейко. Для того щоб в результаті інфінітезимальної деформації* (26) *ця сітка залишалась стаціонарною*, *достатньо виконання умов*

$$\begin{gathered}
\delta\left(\sqrt{\frac{g}{g_{11}^2}}\right)\Gamma_{11}^2 + \sqrt{\frac{g}{g_{11}^2}}\,\delta\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} c_l (K g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + c^{lj} c^{ik} \delta g_{il,jk})\,, \\
\delta\left(\sqrt{\frac{g}{g_{22}^2}}\right)\Gamma_{22}^1 + \sqrt{\frac{g}{g_{22}^2}}\,\delta\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} c_m (K g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + c^{lj} c^{ik} \delta g_{il,jk})\,,
\end{gathered} \tag{27}$$

де K — *гауссова* (*повна*) *кривина поверхні,* c_l, c_m — *ізопериметричні сталі сімей,* c^{lj} — *дискримінантний тензор поверхонь,* δg_{ij} — *варіація метричного тензора поверхні,* $\delta\Gamma_{ij}^h$ —

варіація символів Крістоффеля другого роду, комою позначено коваріантну похідну на базі метричного тензора поверхні g_{ij} .

Доведення. Нехай k^*_{g1}, k^*_{g2} — геодезичні кривини однопараметричних сімей ліній, що утворюють сітку на здеформованій поверхні. Оскільки в результаті інфінітезимальної деформації (26) сітка Лейко повинна залишитись стаціонарною, то повинні виконуватись умови

$$\begin{aligned} k^*_{g1} &= c_l K^* , \\ k^*_{g2} &= c_m K^* , \end{aligned} \tag{28}$$

де K^* — гауссова кривина здеформованої поверхні. Запишемо (28) у вигляді

$$\begin{aligned} k_{g1} + t\delta k_{g1} &= c_l (K + t\delta K) , \\ k_{g2} + t\delta k_{g2} &= c_m (K + t\delta K) . \end{aligned} \tag{29}$$

Оскільки на даній поверхні вздовж кожної лінії будь-якої з двох однопараметричних сімей виконується співвідношення (1), то умови (29) рівносильні умовам

$$\begin{aligned} \delta k_{g1} &= c_l \delta K , \\ \delta k_{g2} &= c_m \delta K . \end{aligned} \tag{30}$$

У (30) замість варіації δK підставимо вираз [1, с. 69]

$$\delta K = -\frac{1}{2} K g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} c^{lj} c^{ik} \delta g_{il,jk} ,$$

а замість δk_{g1}, δk_{g2} — вирази

$$\delta k_{g1} = \delta \left(\sqrt{\frac{g}{g_{11}^2}} \right) \Gamma^2_{11} + \sqrt{\frac{g}{g_{11}^2}} \delta \Gamma^2_{11} ,$$

$$\delta k_{g2} = -\delta \left(\sqrt{\frac{g}{g_{22}^2}} \right) \Gamma^1_{22} - \sqrt{\frac{g}{g_{22}^2}} \delta \Gamma^1_{22} ,$$

які мають місце, якщо до формул [2, с. 406]

$$k_{g1} = \sqrt{\frac{g}{g_{11}^2}} \Gamma^2_{11} ,$$

$$k_{g2} = -\sqrt{\frac{g}{g_{22}^2}} \Gamma^1_{22}$$

застосувати лему [9, с. 524]. В результаті отримаємо (27).

Теорему 4 доведено.

Підсумовуючи викладене вище, робимо висновок, що на поверхнях ненульової гауссової (повної) кривини K існує відмінна за своїми властивостями від геодезичної сітки нова регулярна сітка, а саме, сітка Лейко, яка визначається цілком певно ізопериметричними сталими c_l, c_m. Очевидно, що її властивості не вичерпуються тими, що були розглянуті в даній статті.

1. *Безкоровайна Л. Л.* Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки. – Одеса: АстроПринт, 1999. – 168 с.
2. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1. – М.; Л.: ОГИЗ, 1947. – 512 с.
3. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 2. – М.; Л.: ОГИЗ, 1948. – 408 с.
4. *Лейко С. Г.* Теорема существования экстремалей поворота на поверхностях в E^3 и поворотные диффеоморфизмы // Всесоюзная школа. Оптимальное управление. Геометрия и анализ. – Кемерово, 1988. – С. 52.
5. *Лейко С. Г.* Вариационные задачи для функционалов поворота и спин-отображения псевдоримановых пространств // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 9 – 17.
6. *Лейко С. Г.* Поворотные диффеоморфизмы на поверхностях евклидова пространства // Мат. заметки. – 1990. – **47**, № 3. – С. 52 – 57.
7. *Лейко С. Г.* Экстремали функционалов поворота кривых псевдориманова пространства и траектории спин-частиц в гравитационных полях // Докл. РАН. – 1992. – **325**, № 4. – С. 659 – 664.
8. *Лейко С. Г.* Изопериметрические экстремали поворота на поверхностях в евклидовом пространстве E^3 // Изв. вузов. – 1996. – № 6. – С. 25 – 32.
9. *Потапенко І. В.* Про відновлення варіації метричного тензора поверхні за заданою варіацією символів Крістоффеля другого роду при інфінітезимальних деформаціях поверхонь в евклідовому просторі E^3 // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 4. – С. 523 – 530.

Одержано 27.02.12